RESISTENCIA DE MATERIALES - SOLUCIONARIO
MARCO LLANOS R.

© Marco Llanos R., Autor

Diseño de portada: Giovanna Pérez
Composición de interiores: Melissa Chau
Responsable de edición: Yisela Rojas

© Editorial San Marcos EIRL, Editor
Jr. Dávalos Lisson 135 - Lima
RUC 20260100808
Telefax: 331-1522
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Primera edición: 2008
Tiraje: 1000 ejemplares

ISBN 978-9972-38-465-3
Registro de Proyecto Editorial n.° 31501000700532
Hecho el depósito legal, según ley n.° 26905
Biblioteca Nacional del Perú
Reg. n.° 2008-04470

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin previa autorización escrita del autor y el editor.

Impreso en Perú / Printed in Peru

Pedidos:
Av. Inca Garcilaso de la Vega 974, Lima. Telefax: 424-6563
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com

Composición, diagramación e impresión:
Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas # 1600 - S.J.L.
RUC 10090984344

ÍNDICE

Luego: $\sigma_1 = \dfrac{AB}{A_{AB}} \Rightarrow \sigma_1 = \dfrac{8164{,}966\ N}{400 \times 10^{-6} m^2}$

$\sigma_1 = 20{,}412$ MPa

$\therefore\ \sigma_1 \le \sigma_{AB} = 100$ MPa (cumple)

b) $\sigma_{AB} = 100$ MPa

$A_{AB} = 400\ mm^2$ $\therefore$ AB = 40 000 N

Reemplazando en (1): AC = 48 989,795 N

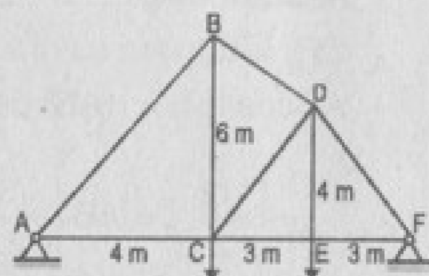
Luego: $\sigma_2 = \dfrac{AC}{A_{AC}} = 244{,}949$ MPa $\Rightarrow \sigma_2 > \sigma_{AC}$ (no cumple)

Entonces: AC = 10 kN

AB = 8,165 kN

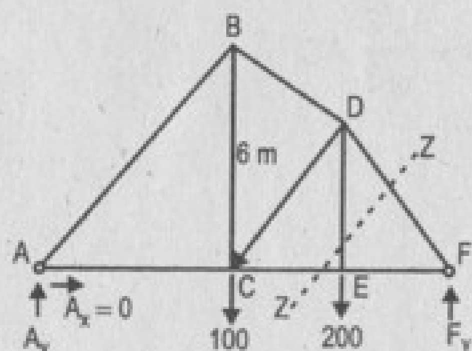
Reemplazando en (2): $\boxed{W = 11{,}154\ kN}$

104. Calcule, para la armadura de la figura, los esfuerzos producidos en los elementos DF, CE y BD. El área transversal de cada elemento es 1200 mm². Indique la tensión (T) o bien la compresión (C).



Resolución:

D.C.L.



En toda la estructura:

$\Sigma F_v = 0$

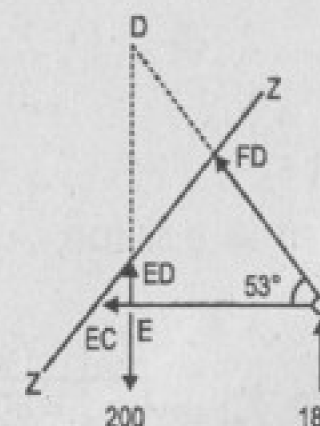
$A_y + F_y = 300$ kN

$\Sigma M_A = 0$

$F_y(10) - 200(7) - 100(4) = 0$

$F_y = 180$ kN

En el corte z - z :



$\Sigma M_E = 0$

$FD\left(\dfrac{4}{5}\right)(3) + 180(3) = 0 \Rightarrow FD = -225$ kN (C)

$\sigma_{FD} = \dfrac{225 \times 10^3\ N}{1200 \times 10^{-6}\ m^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{FD} = 187{,}5\ MPa}$ (C)

$\Sigma F_V = 0$

$FD\left(\dfrac{4}{5}\right) + ED + 180 - 200 = 0$

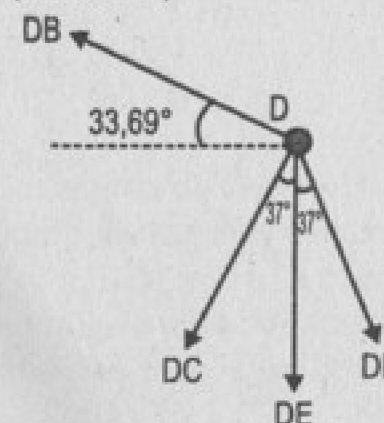
$ED = 20 + 225\left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow ED = 200$ kN (T)

$\Sigma F_H = 0$

$EC = -FD\left(\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow EC = 135$ kN (T)

$\sigma_{EC} = EC / 1200 \times 10^{-6}\ m^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{EC} = 112{,}5\ MPa}$ (T)

D.C.L. (nudo "D")



$\Sigma F_H = 0$

$-DB\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) - DC\left(\dfrac{3}{5}\right) = -DF\left(\dfrac{3}{5}\right)$

$-0{,}2DC - 0{,}277DB = 45$ ...(1)

$\Sigma F_V = 0$

$$DB\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = DE + DC\left(\frac{4}{5}\right) + DF\left(\frac{4}{5}\right)$$

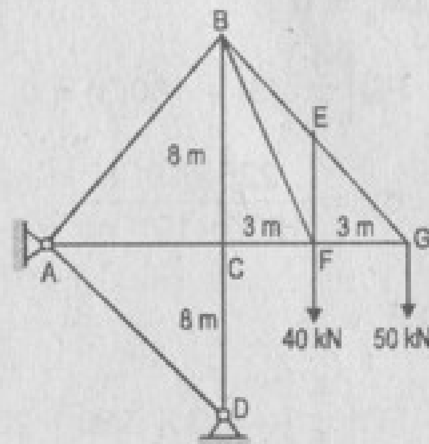
$0{,}554DB = 200 + 0{,}8DC - 180 \Rightarrow 0{,}554DB - 0{,}8\,DC = 20$ ...(2)

Operando:

(1) × 4 + (2): $1{,}662DB = -160$

$DB = -96{,}270$ (C) $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{DB} = 80{,}225 \text{ MPa}}$ (C)

105. Determine, para la armadura de la figura, las áreas transversales de las barras BE, BF y CF, de modo que los esfuerzos no excedan de 100 MN/m² en tensión ni de 80 MN/m² en compresión. Para evitar el peligro de un pandeo, es específica una tensión reducida en la compresión.



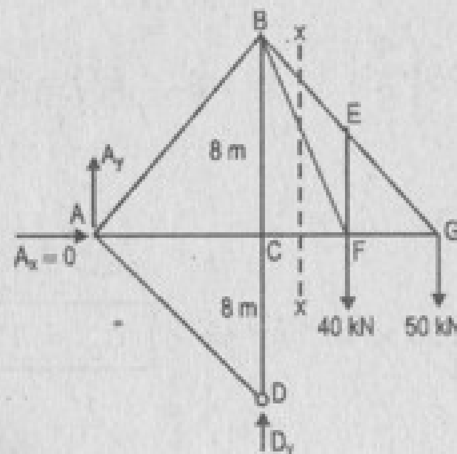
Resolución:

En toda la estructura:

$\Sigma M_A = 0$ (+)

$D_y(6) - 40(9) - 50(12) = 0$

$D_y = 160$ kN

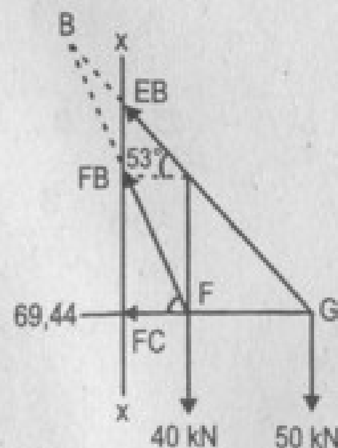


$\Sigma F_V = 0$

$A_y = 90 - 160$

$A_y = -70$ kN

En el corte x-x:



$\Sigma M_F = 0$ (+)

$EB\left(\frac{3}{5}\right)(4) = 50(3) \Rightarrow EB = 62{,}5$ kN (T)

$$A_{EB} = \frac{62{,}5\times10^3 N}{100\times10^6\ N/m^2} \Rightarrow \boxed{A_{EB} = 625\ mm^2}$$

$\Sigma F_V = 0$

$$EB\left(\frac{4}{5}\right) + FB\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right) = 90$$

$FB\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right) = 90 - 50 \Rightarrow FB = 42{,}72$ kN (T)

$$A_{FB} = \frac{42{,}72\times10^3\ N}{100\times10^6\ N/m^2} \Rightarrow \boxed{A_{FB} = 427{,}2\ mm^2}$$

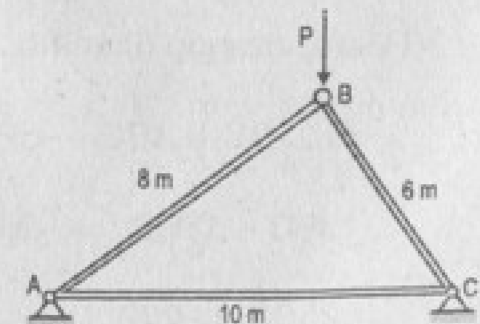
$\Sigma F_H = 0$

$$-EB\left(\frac{3}{5}\right) - FB\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right) - FC = 0$$

$-FC = 62{,}5\left(\frac{3}{5}\right) + 42{,}73\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right) \Rightarrow FC = -52{,}5$ kN (C)

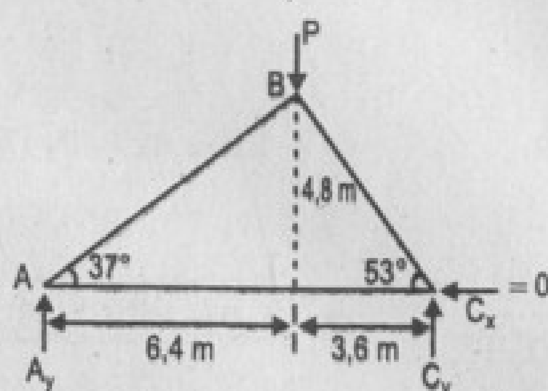
$$A_{FC} = \frac{52{,}5\times10^3\ N}{80\times10^6\ N/m^2} \Rightarrow \boxed{A_{FC} = 656{,}25\ mm^2}$$

106. Todas las barras de la estructura articulada de la figura tienen una sección de 30 mm por 60 mm. Determine la máxima carga P que puede aplicarse sin que los esfuerzos excedan a los fijados en el prob. 105.



Resolución:

D.C.L.



En toda la estructura:

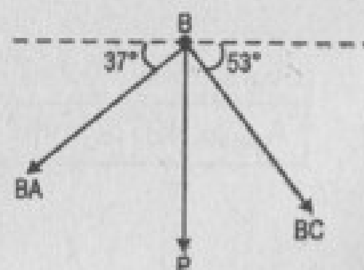
$\Sigma M_C = 0$

$$A_y(10) = P(3,6) \quad \Rightarrow \quad A_y = 0,36P$$

$\Sigma F_V = 0$

$$A_y + C_y = P \quad \Rightarrow \quad C_y = 0,64P$$

D.C.L. (nudo "B")



$\Sigma F_H = 0$

$$BA\left(\frac{4}{5}\right) = BC\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$4BA = 3BC \quad \Rightarrow \quad BA = \frac{3}{4}BC \quad ... \text{(I)}$$

$\Sigma F_V = 0$

$$-BA\left(\frac{3}{5}\right) - BC\left(\frac{4}{5}\right) = P \quad \Rightarrow \quad 3BA + 4BC = -5P$$

Reemplazando (I) en (II):

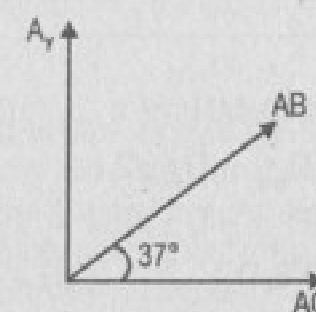
$$3\left(\frac{3}{4}BC\right) + 4BC = -5P$$

$$9BC + 16BC = -20P$$

$$25BC = -20P \quad \Rightarrow \quad BC = -\frac{4}{5}P \quad \text{(C)}$$

Luego: $\boxed{BA = -\frac{3}{5}P}$ (C)

D.C.L. (nudo "A")



$\Sigma F_H = 0$

$$AB\left(\frac{4}{5}\right) + AC = 0$$

$$AC = -\left(-\frac{3}{5}P\right)\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{12}{25}P \quad \text{(T)}$$

$$P = \sigma A$$

$$A = 18 \times 10^{-4}\ m^2$$

En BC: $-\frac{4}{5}P = 80 \times 18 \quad \Rightarrow \quad P = 180$ kN

En BA: $-\frac{3}{5}P = 80 \times 18 \quad \Rightarrow \quad P = 240$ kN

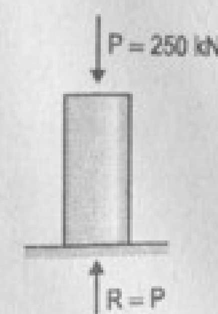
En AC: $\frac{12}{25}P = 100 \times 18 \quad \Rightarrow \quad P = 275$ kN

Escogemos el menor: $\boxed{P = 180 \text{ kN}}$

107. Una columna de hierro fundido (o fundición) soporta una carga axial de compresión de 250 kN. Determinar su diámetro interior si el exterior es de 200 mm y el máximo esfuerzo no debe exceder de 50 MPa.

Resolución:

$\sigma_{máx} = 50$ MPa



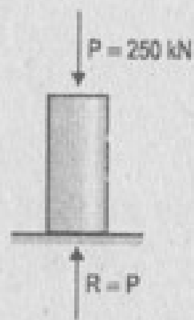
$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{250 \times 10^3\ N}{50 \times 10^6\ N/m^2} \quad \Rightarrow \quad A = 5 \times 10^{-3}\ m^2 = 5000\ mm^2$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D_{ext.}^2 - D_{int.}^2) \quad \Rightarrow \quad 5000 = \frac{\pi}{4}(200^2 - D_{int.}^2)$$

$$D_{int.} = \boxed{183,395 \text{ mm}}$$

108. Calcule el diámetro exterior de un tirante tubular de acero que debe soportar una fuerza de tensión de 500 kN con un esfuerzo máximo de 140 MN/m². Suponga que el espesor de las paredes es una décima parte del diámetro exterior.

Resolución:



$$\sigma_{máx} = 140\ MN/m^2$$
$$e = (D_{ext.} - D_{int.})/2$$
$$0{,}1D_{ext.} = (D_{ext.} - D_{int.})/2$$
$$D_{int.} = 0{,}8\ D_{ext.} \quad ...\ (I)$$
$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{500\times10^3 N}{140\times10^6\ N/m^2}$$

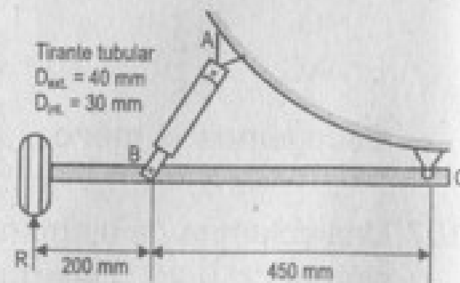
$$A = 3{,}571 \times 10^{-3}\ m^2 = 3571\ mm^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{4}\left(D_{ext.}^2 - D_{int.}^2\right) \quad ...(II)$$

I en II:

$$3571 = \frac{\pi}{4}[D_{ext.}^{\ 2} - (0{,}8D_{ext.})^2]$$

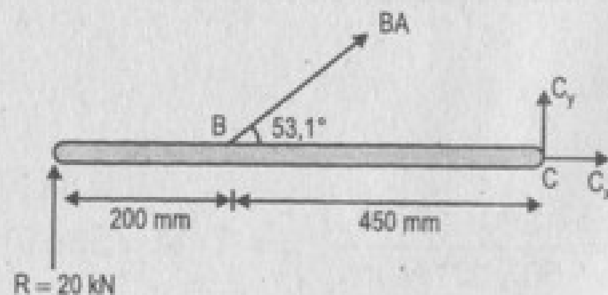
$$4546{,}738 = 0{,}36\ D_{ext.}^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{ext.} = 112\ mm}$$

109. En la figura se muestra parte del tren de aterrizaje de una avioneta. Determine el esfuerzo de compresión en el tornapunta AB producido al aterrizar por una reacción del terreno R = 20 kN. $\overline{AB}$ forma un ángulo de 53,1° con $\overline{BC}$.



Resolución:

D.C.L.



$$\Sigma M_c = 0$$

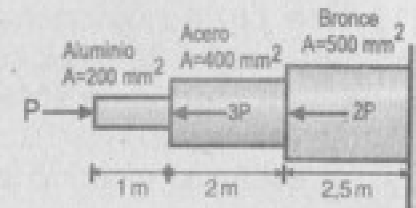
$$R(650) + BA\,sen53{,}1°(450) = 0$$

$$BA = 36{,}125\ kN \quad (C)$$

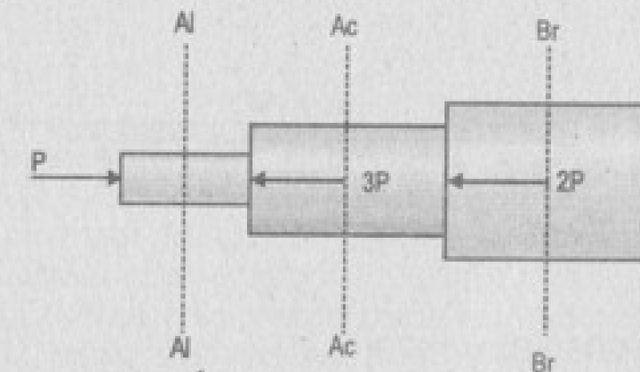
$$A = \frac{\pi}{4}(40^2 - 30^2) = 549{,}779\ mm^2$$

$$\sigma = \frac{36{,}125\times10^3\ N}{549{,}779\times10^{-6}m^2} \Rightarrow \boxed{\sigma = 65{,}708\ MN/m^2}$$

110. Un tubo de acero se encuentra rígidamente sujeto por un perno de aluminio y por otro de bronce, tal como se muestra en la figura. Las cargas axiales se aplican en los puntos indicados. Calcule el máximo valor de P que no exceda un esfuerzo de 80 MPa en el aluminio, de 150 MPa en el acero o de 100 MPa en el bronce.



Resolución:



Corte Al

R = –P (C)

$$\sigma_{Al} = 80 \times 10^6\ \frac{N}{m^2} = \frac{P_{Al}}{200\times10^{-6}\ m^2} \Rightarrow P_{Al} = 16\ kN$$

Corte Ac

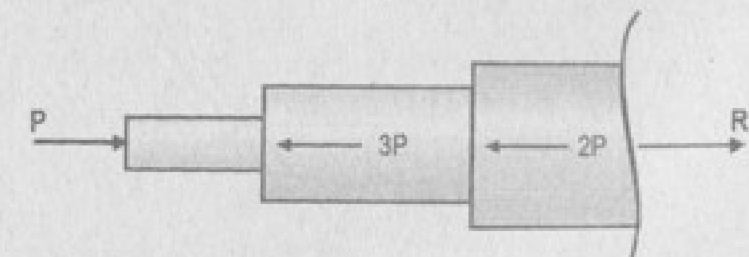
R = –P + 3P = 2P (T)

$$\sigma_{Ac} = 150 \times 10^6\ \frac{N}{m^2} = \frac{2P_{Ac}}{400\times10^{-6}m^2} \Rightarrow P_{Ac} = 30\ kN$$

Corte Br

R = –P + 3P + 2P

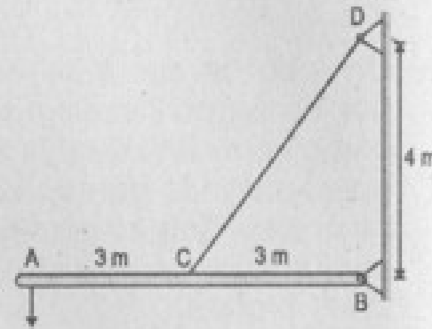
R = 4P (T)



$$\sigma_{Br.} = 100 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2} = \frac{4P_{Br}}{500 \times 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad P_{Br} = 12{,}5 \text{ kN}$$

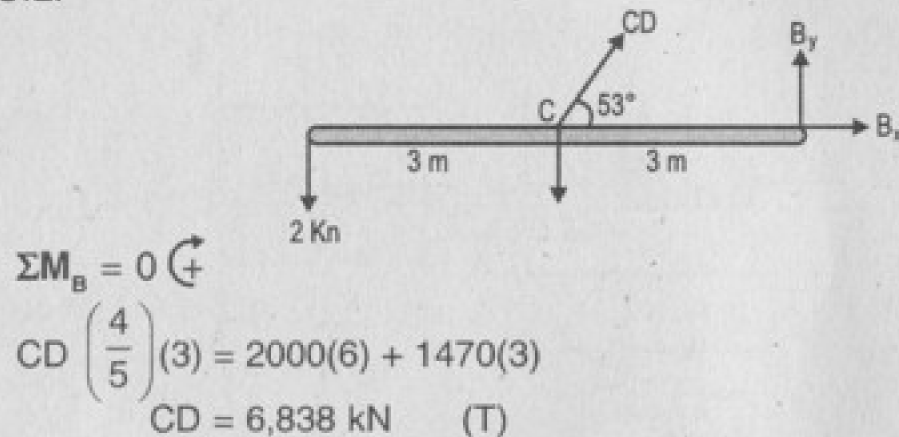
De los 3 valores obtenidos, escogemos el menor. $\therefore$ $\boxed{P = 12{,}5 \text{ kN}}$

111. Una barra homogénea AB (de 150 kg) soporta una fuerza de 2 kN, como puede verse en la figura. La barra está sostenida por un perno (en B) y un cable (CD) de 10 mm de diámetro. Determine el esfuerzo ejercido en el cable.



Resolución:

D.C.L.



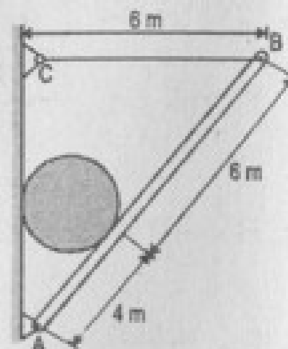
$\Sigma M_B = 0$ ↺+

$$CD\left(\frac{4}{5}\right)(3) = 2000(6) + 1470(3)$$

$$CD = 6{,}838 \text{ kN} \qquad (T)$$

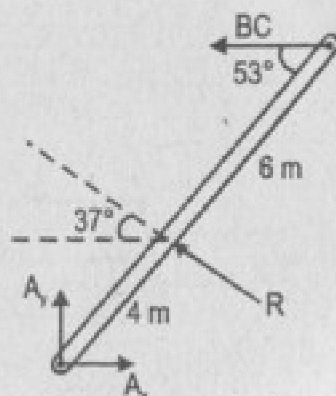
$$A = \frac{\pi}{4}(0{,}01 \text{ m})^2 = 78{,}54 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = 87{,}064 \text{ MPa}}$$

112. Calcule el peso del cilindro más pesado que se puede colocar en la posición que se indica en la figura, sin rebasar un esfuerzo de 50 MN/m² en el cable BC. Desprecie el peso de la barra AB. El área transversal del cable BC es 100 mm².



Resolución:

D.C.L. (barra)

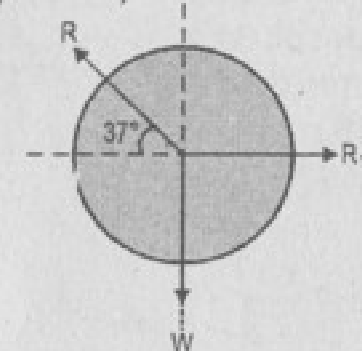


$\Sigma M_A = 0$ ↺+

$$R(4) + BC\left(\frac{4}{5}\right)(10) = 0 \quad \Rightarrow \quad BC = -R/2 \qquad (C)$$

$$\sigma_{BC} = 50 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2} = \frac{0{,}5\,R}{100 \times 10^{-6} m^2} \quad \Rightarrow \quad R = 10 \text{ kN}$$

D.C.L. (cilindro)



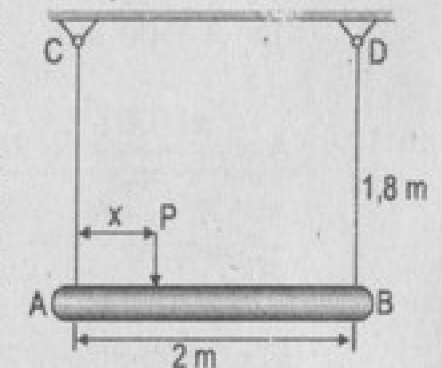
$\Sigma F_v = 0$

$W = R\text{sen}37°$

$$W = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

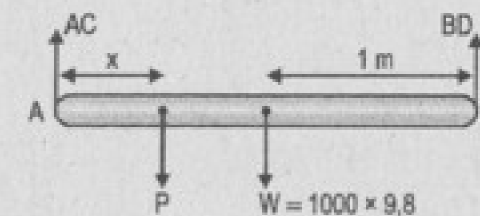
$\boxed{W = 6 \text{ kN}}$

113. Una barra homogénea AB(de 1000 kg de masa) pende de dos cables AC y BD, cada uno de los cuales tiene un área transversal de 400 mm², como se observa en la figura. Determine la magnitud P, así como la ubicación de la fuerza adicional máxima que se puede aplicar a la barra. Los esfuerzos en los cables AC y BD tienen un límite de 100 MPa y 50 MPa, respectivamente.



Resolución:

D.C.L.



$$\sigma_{AC} = 100 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2} = \frac{AC}{400 \times 10^{-6} m^2} \quad \Rightarrow \quad AC = 40 \text{ kN}$$

$\Sigma F_v = 0$

$$AC + BD = 9800 + P \quad \Rightarrow \quad BD = P - 30\ 200 \qquad ...(1)$$

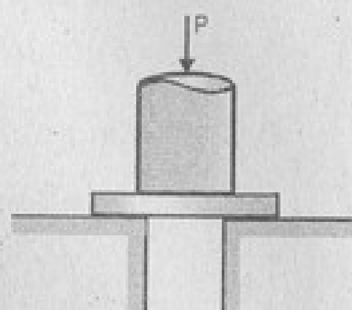
$$\sigma_{BD} = 50 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2} = \frac{BD}{A}$$

Reemplazando BD:

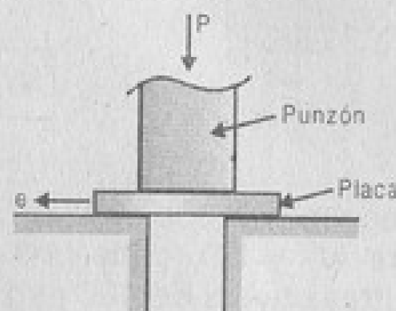
$$50 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2} = \frac{P - 30\ 200}{400 \times 10^{-6} m^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 50{,}200 \text{ N} = 50{,}2 \text{ kN}}$$

$\Sigma M_B = 0$ ↺+
AC(2) = 9800(1) + P(2 – x)
50 200(2 – x) = 70 200 ⇒ **x = 0,602 m**

114. Se quiere punzar una placa, tal como se indica en la figura, que tiene un esfuerzo cortante último de 300 MPa. (a) Si el esfuerzo de compresión admisible en el punzón es 400 MPa, determine el máximo espesor de la placa para poder punzar un orificio de 100 mm de diámetro. (b) Si la placa tiene un espesor de 10 mm, calcule el máximo diámetro que puede punzarse.



Resolución:



a) $\tau = 300$ MPa (placa)
$\sigma_C = 400$ MPa (punzón)
$D = 100$ mm

$$A = \frac{\pi(100)^2}{4} = 7853{,}982\ mm^2$$

$$\frac{P}{A} = \sigma_C$$

$$P = 7853{,}982 \times 10^{-6}\ m^2 \times 400 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \Rightarrow P = 3141{,}59\ kN$$

$$\tau = \frac{P}{\pi.D.e}$$

$$300 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{3141{,}59 \times 10^3\ N}{\pi \times 0{,}1\ m \times e} \Rightarrow \boxed{e = 0{,}033\ m = 33\ mm}$$

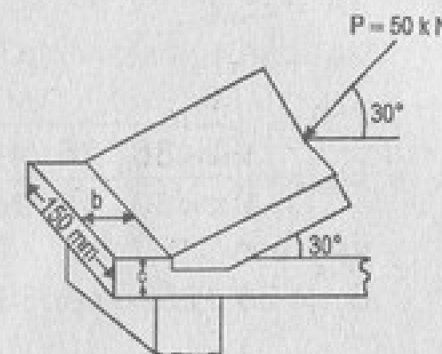
b) e = 10 mm = 0,01 m

$$\sigma_C = \frac{P}{\frac{D^2}{4}} \Rightarrow P = \frac{\pi D^2.\sigma_c}{4} \Rightarrow P = 314\ 159{,}265D^2\ kN$$

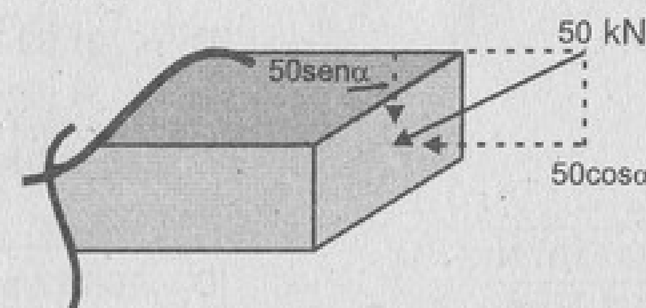
$$\tau = \frac{P}{\pi.D.e}$$

$$300 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{314\ 159{,}265 \times 10^3 D^2}{\pi.D \times 0{,}01} \Rightarrow \boxed{D = 0{,}03\ m = 30\ mm}$$

115. La figura muestra la unión de un tirante y la base de una armadura de madera. Despreciando el rozamiento; (a) determine la dimensión b si el esfuerzo cortante admisible es de 900 kPa. (b) Calcule también la dimensión c si el esfuerzo de contacto no debe exceder de 7 MPa.



Resolución:



a) $\tau = 900 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$; $\tau = \frac{P\cos\alpha}{b \times 0{,}15}$

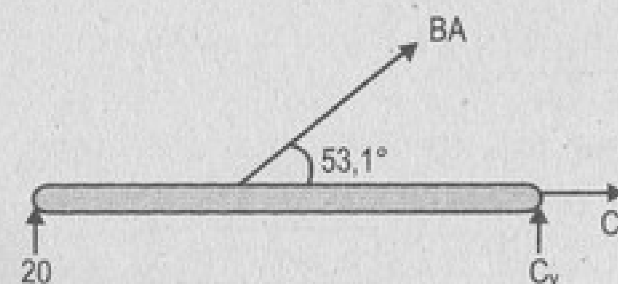
$$900 \times 10^3 \frac{N}{m^2} = \frac{50\cos 30° \times 10^3\ N}{b \times 0{,}15\ m} \Rightarrow \boxed{b = 0{,}321\ m = 321\ mm}$$

b) $\sigma_C = 7 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$

$$c = \frac{50\cos 30° \times 10^3\ N}{7 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \times 0{,}15 m} = 0{,}0412\ m \Rightarrow \boxed{c = 41{,}2\ mm}$$

116. En el dispositivo del tren de aterrizaje descrito en el Prob. 09, los pernos en A y B trabajan a cortante simple y el perno en C a cortante doble. Determine los diámetros necesarios si el esfuerzo cortante admisible es de 50 MN/m².

Resolución:
D.C.L.



BA = 36,125 kN (C) $\tau = 50\times10^{6}\dfrac{N}{m^{2}}$ $D=\sqrt{\dfrac{4P}{\pi.\tau}}$

$D_{BA} = \sqrt{\dfrac{4\times36{,}125\times10^{3}\ N}{\pi\times50\times10^{6}\ N/m^{2}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D_{BA} = 0{,}030\ m = 30\ mm}$

$\Sigma F_V = 0$

$C_y = 36{,}125 \times sen53{,}1° - 20$ $\Rightarrow$ $C_y = 8{,}889\ kN$

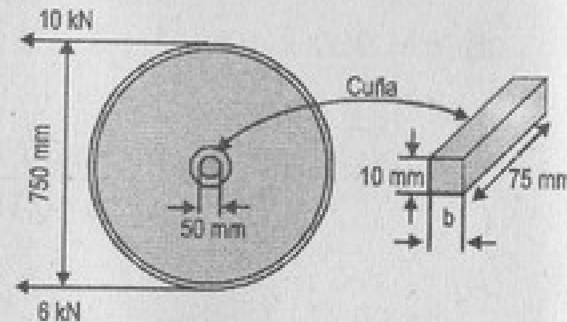
$\Sigma F_H = 0$

$C_x = BAcos53{,}1°$ $\Rightarrow$ $C_x = 21{,}69\ kN$

$C = \sqrt{C_x^{2}+C_y^{2}}$ $\Rightarrow$ $C = 23{,}441\ kN$

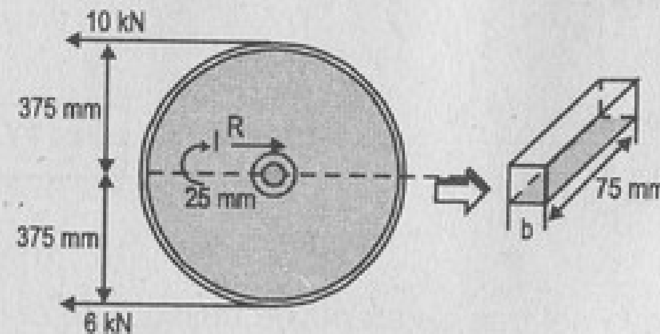
$D_C = \sqrt{\dfrac{2\times23{,}441\times10^{3}\ N}{\pi\times50\times10^{6}\ N/m^{2}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D_C = 0{,}017\ m = 17\ mm}$

117. Una polea de 750 mm sometida a la acción de las fuerzas que indica la figura está montada mediante una cuña en un eje de 50 mm de diámetro. Calcule el ancho b de la cuña si tiene 75 mm de longitud y el esfuerzo cortante admisible es de 70 MPa.



Resolución:

D.C.L.



$\Sigma M_o = 0$ (+)

$R(25) = 10(375) - 6(375)$ $\Rightarrow$ $R = 60\ kN$

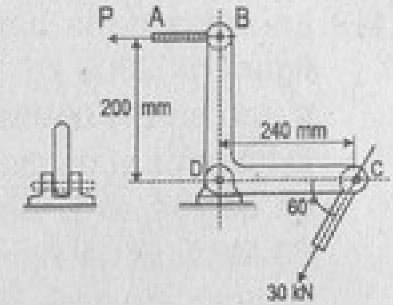
$\tau = 70 \times 10^{6}\ \dfrac{N}{m^{2}} = \dfrac{60\times10^{3}N}{A}$

$A = 857{,}14 \times 10^{-6}\ m^{2}$

$A = 0{,}075 \times b$

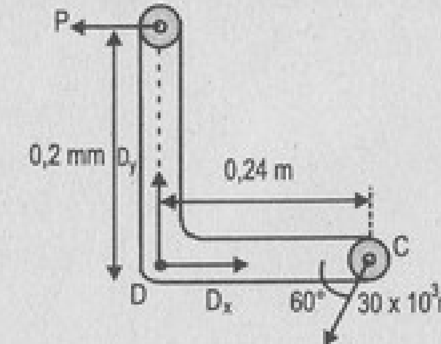
Igualando "A": $\boxed{b = 11{,}4\ mm}$

118. La palanca acodada que representa la figura está en equilibrio. (a) Determine el diámetro de la barra AB si el esfuerzo normal está limitado a 100 MN/m². (b) Determine el esfuerzo cortante en el pasador situado en D, de 20 mm de diámetro.



Resolución:

D.C.L.



$\Sigma M_D = 0$ (+)

$P \times 0{,}2 = 30 \times 10^{3} \times sen60° \times 0{,}24$ $\Rightarrow$ $P = 31\ 176{,}914\ N$ $\Rightarrow$ $\boxed{P = 31{,}177\ kN}$

$\Sigma F_V = 0$

$D_y = 30 \times 10^{3}\ sen60°$ $\Rightarrow$ $D_y = 25{,}981\ kN$

$\Sigma F_H = 0$

$D_x = 30 \times 10^{3} + 31{,}177$ $\Rightarrow$ $D_x = 61{,}177\ kN$

Entonces:

$D = \sqrt{D_x^{2}+D_y^{2}}$ $\therefore$ $\boxed{D = 66{,}465\ kN}$

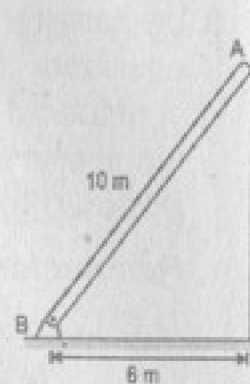
a) $D_{AB} = \sqrt{\dfrac{4(AB)}{\pi.\sigma_{AB}}}$; $P = AB$ $\Rightarrow$ $D_{AB} = \sqrt{\dfrac{4\times31\ 176{,}914\ N}{\pi\times100\times10^{6}\ \dfrac{N}{m^{2}}}}$

$\boxed{D_{AB} = 0{,}02m = 20\ mm}$

b) $\tau_D = \dfrac{D}{2\frac{\pi}{4}(d_D^{2})}$; $d_D = 0{,}02\ m$ $\Rightarrow$ $\tau_D = \dfrac{66465{,}14\ N}{\frac{\pi}{2}(0{,}02)^{2}}$

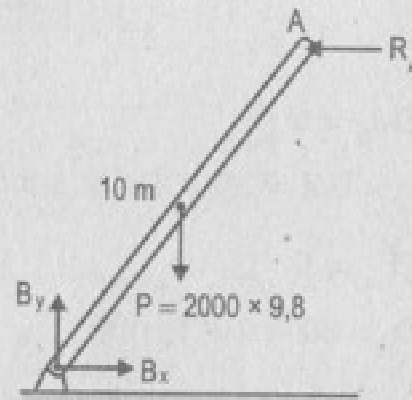
$\boxed{\tau_D = 105{,}782\ MPa}$

119. La masa de la barra homogénea AB mostrada en la figura es 2000 kg. La barra está apoyada mediante un perno en B y mediante una superficie vertical lisa en A. Determine el diámetro del perno más pequeño que pueda usarse en B si su esfuerzo cortante está limitado a 60 MPa. El detalle del apoyo en B es idéntico al apoyo D mostrado en la figura del problema 118.



Resolución:

D.C.L.



$\Sigma M_B = 0$

$R_A(8) = 19{,}6(3) \Rightarrow R_A = 7{,}35$ kN

$\Sigma F_V = 0$

$B_y = 19{,}6$ kN

$\Sigma F_H = 0$

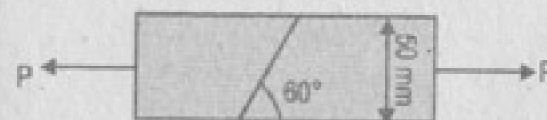
$B_x = R_A \Rightarrow B_x = 7{,}35$ kN

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \Rightarrow B = 20{,}933 \text{ kN}$$

$$d_B = \sqrt{\frac{2P}{\pi.\sigma}}$$

$$d_B = \sqrt{\frac{2 \times 20{,}933 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 100 \times 10^6 \text{ N/m}^2}} \Rightarrow d_B = 0{,}0149 \text{ m} \Rightarrow \boxed{d_B = 14{,}9 \text{ mm}}$$

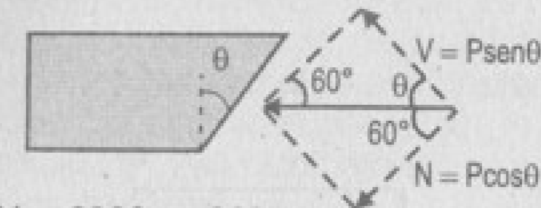
120. Dos piezas de madera, de 50 mm de ancho y 20 mm de espesor, están pegadas como indica la figura. (a) Aplicando las ideas que se expresan en la figura 1-4a, determine la fuerza cortante y el esfuerzo cortante en la unión si P= 6000 N. (b) Generalice el procedimiento para demostrar que el esfuerzo cortante en una sección inclinada un ángulo θ respecto a una sección transversal de área A, tiene un valor dado por τ = (P/2A)(sen2θ).



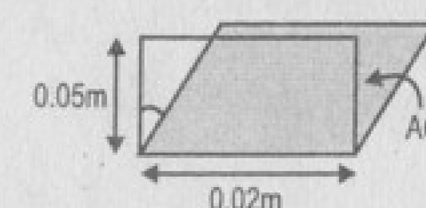
Resolución:

D.C.L.

VISTA LATERAL



VISTA FRONTAL



a) $V = 6000\text{sen}30°$

$V = 3000$ N

$$A = A_\theta \cos\theta \Rightarrow A_\theta = \frac{A}{\cos\theta}$$

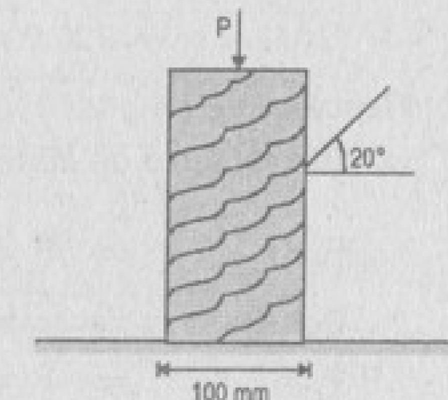
$$A_\theta = \frac{0{,}05 \times 0{,}02}{\cos 30°} = 1154{,}701 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A_\theta} = \frac{3\,000\text{N}}{1154{,}701 \times 10^{-6}\text{m}^2} \Rightarrow \boxed{\tau_\theta = 2{,}60 \text{ MPa}}$$

b) De la figura:

$$\tau_\theta = \frac{P_\theta}{A_\theta} = \frac{P\text{sen}\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau_\theta = \frac{P}{A}\text{sen}\theta\cos\theta \times \left(\frac{2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tau_\theta = \frac{P}{2A}\text{sen}2\theta}$$

121. Un cuerpo rectangular de madera, de sección transversal de 50 mm x 100 mm, se usa como elemento de compresión, según se muestra en la figura. Determine la fuerza axial máxima P que pueda aplicarse con confianza al cuerpo si el esfuerzo de compresión en la madera está limitado a 20 MN/m² y el esfuerzo cortante paralelo a las vetas lo está a 5 MN/m². Las vetas forman un ángulo de 20° con la horizontal, según se muestra. (*Indicación:* use los resultados del problema 120.)



Resolución:

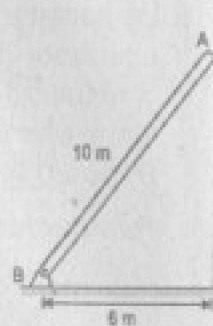
$\sigma_C = 20 \times 10^6$ N/m²

$P_C = \sigma_C \,.\, A$

$P_C = 20 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \times (100)(50) \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad \therefore P_C = 100$ kN

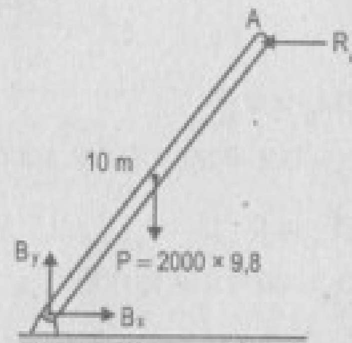
$$\tau_V = \frac{P_V}{2A}\text{sen}2\theta$$

119. La masa de la barra homogénea AB mostrada en la figura es 2000 kg. La barra está apoyada mediante un perno en B y mediante una superficie vertical lisa en A. Determine el diámetro del perno más pequeño que puede usarse en B si su esfuerzo cortante está limitado a 60 MPa. El detalle del apoyo en B es idéntico al apoyo D mostrado en la figura del problema 118.



Resolución:

D.C.L.



$\Sigma M_B = 0$

$R_A(8) = 19{,}6(3) \Rightarrow R_A = 7{,}35$ kN

$\Sigma F_V = 0$

$B_y = 19{,}6$ kN

$\Sigma F_H = 0$

$B_x = R_A \Rightarrow B_x = 7{,}35$ kN

$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \Rightarrow B = 20{,}933$ kN

$d_B = \sqrt{\dfrac{2P}{\pi.\sigma}}$

$d_B = \sqrt{\dfrac{2\times 20{,}933\times 10^3\ \text{N}}{\pi\times 100\times 10^6\ \text{N/m}^2}} \Rightarrow d_B = 0{,}0149$ m $\Rightarrow$ $\boxed{d_B = 14{,}9\ \text{mm}}$

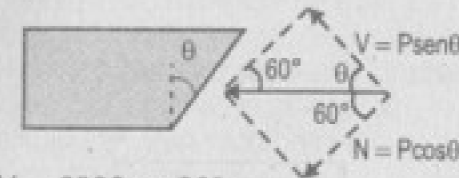
120. Dos piezas de madera, de 50 mm de ancho y 20 mm de espesor, están pegadas como indica la figura. (a) Aplicando las ideas que se expresan en la figura 1-4a, determine la fuerza cortante y el esfuerzo cortante en la unión si P= 6000 N. (b) Generalice el procedimiento para demostrar que el esfuerzo cortante en una sección inclinada un ángulo θ respecto a una sección transversal de área A, tiene un valor dado por τ = (P/2A)(sen2θ).



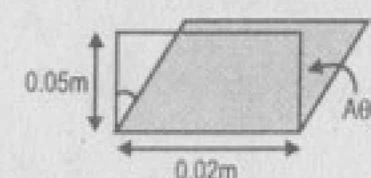
Resolución:

D.C.L.

VISTA LATERAL



VISTA FRONTAL



a) $V = 6000\text{sen}30°$

$V = 3000$ N

$A = A_\theta\cos\theta \Rightarrow A_\theta = \dfrac{A}{\cos\theta}$

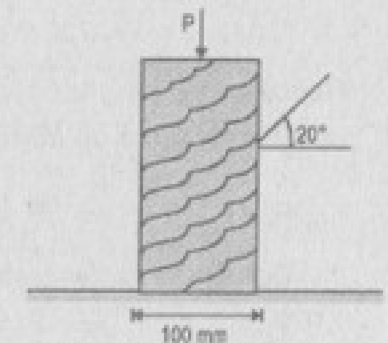
$A_\theta = \dfrac{0{,}05\times 0{,}02}{\cos 30°} = 1154{,}701\times 10^{-6}\ \text{m}^2$

$\tau_\theta = \dfrac{V}{A_\theta} = \dfrac{3\,000\text{N}}{1154{,}701\times 10^{-6}\text{m}^2} \Rightarrow$ $\boxed{\tau_\theta = 2{,}60\ \text{MPa}}$

b) De la figura:

$\tau_\theta = \dfrac{P_\theta}{A_\theta} = \dfrac{P\text{sen}\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau_\theta = \dfrac{P}{A}\text{sen}\theta\cos\theta\times\left(\dfrac{2}{2}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\tau_\theta = \dfrac{P}{2A}\text{sen}2\theta}$

121. Un cuerpo rectangular de madera, de sección transversal de 50 mm x 100 mm, se usa como elemento de compresión, según se muestra en la figura. Determine la fuerza axial máxima P que pueda aplicarse con confianza al cuerpo si el esfuerzo de compresión en la madera está limitado a 20 MN/m² y el esfuerzo cortante paralelo a las vetas lo está a 5 MN/m². Las vetas forman un ángulo de 20° con la horizontal, según se muestra. (*Indicación:* use los resultados del problema 120.)



Resolución:

$\sigma_C = 20\times 10^6\ \text{N/m}^2$

$P_C = \sigma_C \cdot A$

$P_C = 20\times 10^6\ \text{N/m}^2 \times (100)(50)\times 10^{-6}\ \text{m}^2 \quad \therefore P_C = 100$ kN

$\tau_V = \dfrac{P_V}{2A}\text{sen}2\theta$

$$P_V = 5 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \times 2 \times (100)(50) \times 10^{-6}\ m^2 / \text{sen}2(20°)$$

$$P_V = 77{,}786\ kN$$

$$\sigma_N = \frac{P_N}{A} \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad P_N = \sigma_N \cdot A/\cos^2\alpha \qquad \therefore \ P_N = 113{,}247\ kN$$

De los 3 valores escogemos el menor: $\therefore$ $\boxed{P = 77{,}786\ kN}$

122. Problema ilustrativo.

123. En la figura 1-11 se supone que el remache tiene 20 mm de diámetro y une placas de 100 mm de ancho. (a) Si los esfuerzos admisibles son de 140 MN/m² para el aplastamiento y 80 MN/m² para el esfuerzo cortante, determinar el mínimo espesor de cada placa. (b) Según las condiciones especificadas en la parte (a), ¿cuál será el máximo esfuerzo medio de tensión en las placas?

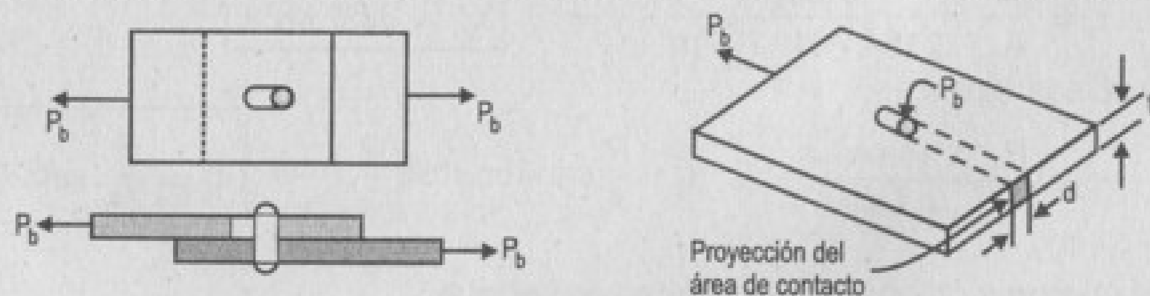


Figura 1-11

Resolución:

a) Del esfuerzo de corte:

$$P = A \times \tau \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2 \times 80 \times 10^6 \quad \therefore \quad P = 25\ 132{,}741\ \ N$$

Del esfuerzo de aplastamiento:

$$P_b = A_b \cdot \sigma_b \quad \Rightarrow \quad P = (0{,}02)(t) \times 140 \times 10^6 \quad \therefore \quad P = 2{,}8 \times 10^6 \times t\ \ N$$

Igualando P:

$$t = 8{,}98 \times 10^{-3}\ m = 8{,}98\ mm \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 8{,}98\ mm}$$

b) Del esfuerzo de tensión:

$$\sigma_N = \frac{P}{t(a-d)} \quad \Rightarrow \quad \sigma_N = \frac{25\ 132{,}741\ N}{8{,}98\times10^{-3} m(0{,}1\ m - 0{,}02\ m)}$$

$$\boxed{\sigma_N = 34{,}984\ MPa}$$

124. La junta que se muestra en la figura está sujeta mediante tres remaches de 20 mm de diámetro. Suponiendo que P = 50 kN, determine (a) el esfuerzo cortante en cada remache, (b) el esfuerzo de contacto en cada placa, y (c) el máximo esfuerzo promedio en cada placa. Suponga que la carga aplicada P está distribuida igualmente entre los tres remaches.



Resolución:

a) $$\tau = \frac{P}{n.°\ \text{remaches}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}(d)^2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{50\times10^3}{3\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}02)^2}$$

$$\boxed{\tau = 53{,}052\ MPa}$$

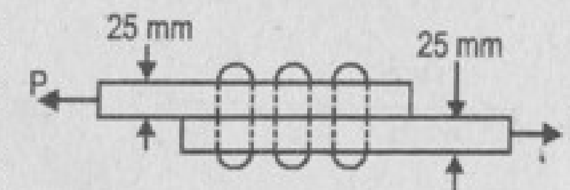
b) $$\sigma_a = \frac{P}{n.°\text{remaches}} \times \frac{1}{t.d} \quad \Rightarrow \quad \sigma_a = \frac{50\times10^3}{3(0{,}02)(0{,}025)}$$

$$\boxed{\sigma_a = 33{,}333\ MPa}$$

c) $$\sigma_N = \frac{P}{n.°\ \text{remaches}} \times \frac{1}{t(a-d)} \quad \Rightarrow \quad \sigma_N = \frac{50\times10^3}{3\times0{,}025\times(0{,}13-0{,}02)}$$

$$\boxed{\sigma_N = 6{,}061\ MPa}$$

125. Para la junta traslapada del problema 124 determine la máxima carga P que pueda aplicarse con confianza si el esfuerzo cortante en los remaches está limitado a 60 MPa, el esfuerzo de contacto en las placas, a 110 MPa y el esfuerzo de tensión medio en las placas, a 140 MPa.



Resolución:

Del esfuerzo cortante:

$$P_\tau = n.°\ \text{remaches} \times \frac{\pi}{4}(d)^2 \times \tau$$

$$P_\tau = 3 \times \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2 \times 60 \times 10^6 \quad \Rightarrow \quad P_\tau = 56{,}549\ kN$$

Del esfuerzo de aplastamiento:

P_a = n.° remaches × t . d × σ_a

$P_a = 3 \times (0{,}025)(0{,}02) \times 110 \times 10^6 \Rightarrow P_a = 165$ kN

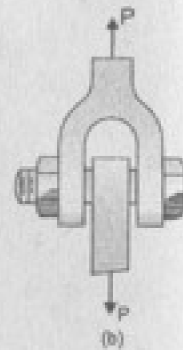
Del esfuerzo de tensión:

P_N = n°. remaches × t × (a – d) × σ_N

$P_N = 3 \times 0{,}025\,(0{,}13 - 0{,}02) \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_N = 1155$ kN

De los tres valores escogemos el menor: ∴ **P = 56,549 kN**

126. En la articulación de la figura 1-10b determine el diámetro mínimo del perno y el mínimo espesor de cada rama de la horquilla si debe soportar una carga P = 55 kN sin sobrepasar un esfuerzo cortante de 80 MPa ni uno de 140 MPa a compresión.



Resolución:

D.C.L.

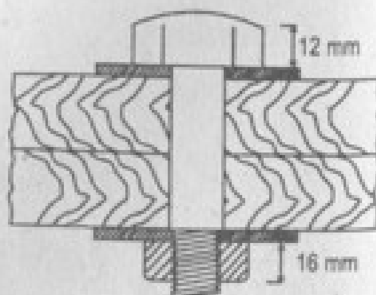
$$\tau = \frac{P/2}{\frac{\pi}{4}(d^2)} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2P}{\pi.\tau}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2\times55\times10^3}{\pi\times70\times10^6}} \Rightarrow d = 0{,}022 \text{ m} \therefore \boxed{d = 22 \text{ mm}}$$

$$\sigma = \frac{P/2}{t.d} \Rightarrow t = \frac{P}{2.d.\sigma} \Rightarrow t = \frac{55\times10^3}{2\times0{,}022\times140\times10^6}$$

$$t = 8{,}928 \times 10^{-3} \text{ m} \therefore \boxed{t = 9 \text{ mm}}$$

127. Un tornillo de 22,2 mm de diámetro exterior y 18,6 mm en el fondo de la rosca, sujeta dos piezas de madera, como se indica en la figura. Se aprieta la tuerca hasta tener un esfuerzo de 34 kN en el tornillo. (a) Calcular el esfuerzo cortante en la cabeza del mismo y en la rosca. (b) Determinar también el diámetro exterior de las arandelas si el interior es de 28 mm y el esfuerzo de aplastamiento admisible en la madera es de 6 MPa.



Resolución:

A) $t = \frac{P}{A}$; P = 34 kN ; A = π . D. t

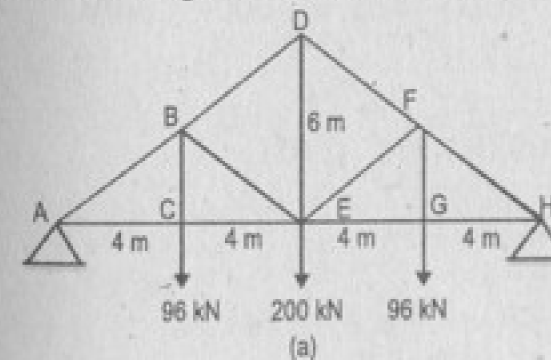
$$\tau_{cabeza} = \frac{34\times10^3 \text{N}}{\pi\times0{,}022 \text{ m}\times0{,}012 \text{ m.}} \Rightarrow \tau_{cabeza} = 40{,}994 \text{ MPa}$$

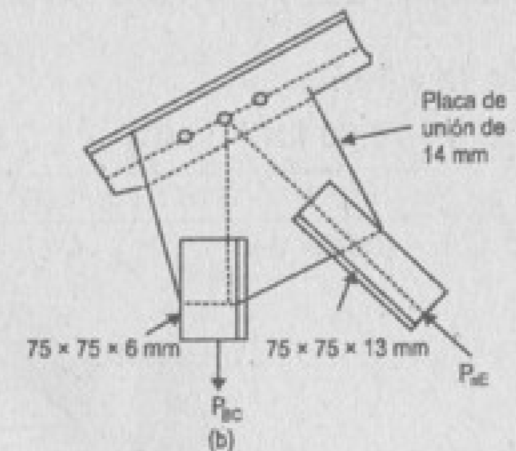
$$\tau_{tuerca} = \frac{34\times10^3 \text{N}}{\pi\times0{,}186 \text{ m}\times0{,}16 \text{ m}} \Rightarrow \tau_{tuerca} = 36{,}366 \text{ MPa}$$

B) $$\sigma_a = \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_{ext.}^2 - d_{int.}^2)} \Rightarrow d_{ext.} = \sqrt{\frac{4P}{\pi.\sigma_a} + d_{int.}^2}$$

$$d_{ext.} = \sqrt{\frac{4\times34\times10^3}{\pi\times6\times10^6} + (0{,}028)^2} \Rightarrow d_{ext.} = 0{,}089 \text{ m} \Rightarrow \boxed{d_{ext.} = 89 \text{ mm}}$$

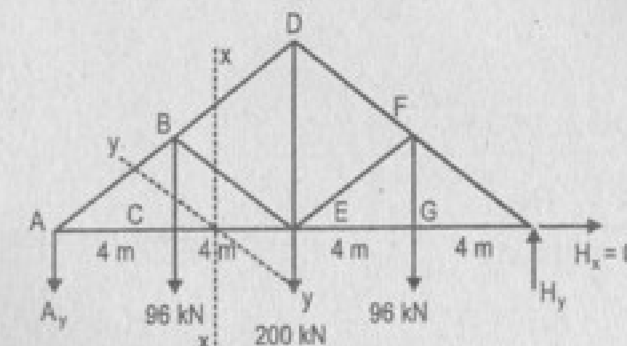
128. En la figura se muestra el esquema de una armadura y en el croquis (b) el detalle de la unión de las barras, mediante una placa, en el nudo B. ¿Cuántos remaches de 19 mm de diámetro se necesitan para unir la barra BC a la placa, si los esfuerzos admisibles son τ = 70 MPa y σ_b = 140 MPa? ¿Cuántos para la barra BE? ¿Cuál es el esfuerzo medio de compresión o de tensión en $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$?





Resolución:

D.C.L.

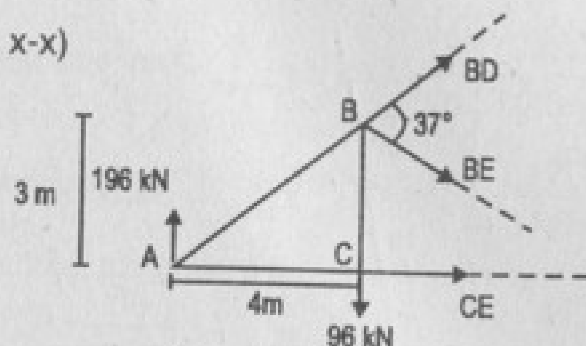


En toda la estructura:

$\Sigma M_H = 0$

$A_y \times 16 = 96 \times 12 + 200 \times 8 + 96 \times 4 \Rightarrow A_y = 196$ kN

D.C.L. (corte x-x)



$\Sigma M_B = 0$ ↺+

$CE(3) = 196(4) \Rightarrow CE = 261{,}333$ kN (T)

$\Sigma F_H = 0$

$$BD\left(\frac{4}{5}\right) + BE\left(\frac{3}{5}\right) + CE = 0 \Rightarrow 4BD + 3BE = -1306{,}667 \quad ...(I)$$

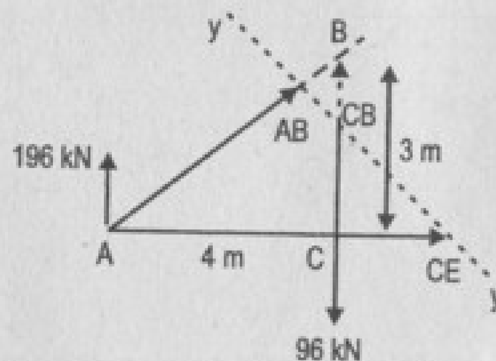
$\Sigma F_V = 0$

$$BD\left(\frac{3}{5}\right) - BE\left(\frac{4}{5}\right) + 196 - 96 = 0 \Rightarrow 3BD - 4BE = -500 \quad ...(II)$$

De (I) y (II):

$BE = -76{,}80$ kN (C) ; $BD = -269{,}067$ kN (C)

D.C.L. (corte y-y)



$\Sigma M_A = 0$ ↺+

$CB(4) = 96(4) \Rightarrow CB = 96$ kN (T)

$$\tau = \frac{P}{n\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} \wedge \sigma_b = \frac{P}{n(t \times d)} \quad ; \quad n = \text{n.° remaches}$$

En la barra BC:

$$n_{\sigma_b} = \frac{96 \times 10^3 \text{ N}}{0{,}006 \text{ m} \times 0{,}019 \text{ m} \times 140 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 6{,}015$$

$n_{\sigma_b} = 7$ remaches

$$n_\tau = \frac{4 \times 96 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times (0{,}019 \text{ m})^2 \times 70 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 4{,}837$$

$n_\tau = 5$ remaches $\therefore$ **para la barra BC se necesitarán 7 remaches**

En la barra BE:

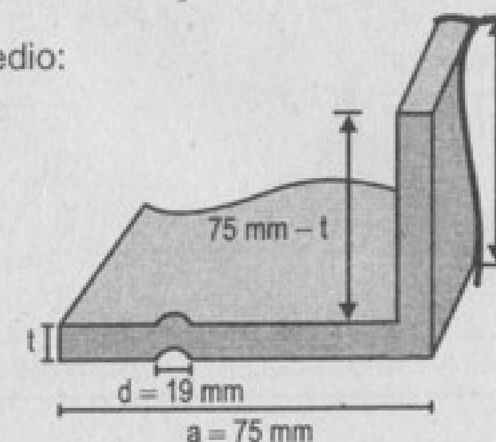
$$n_{\sigma_b} = \frac{76{,}8 \times 10^3 \text{ N}}{0{,}013 \text{ m} \times 0{,}019 \text{ m} \times 140 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

$n_{\sigma_b} = 3$ remaches

$$n_\tau = \frac{4 \times 76{,}8 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times (0{,}019 \text{ m})^2 \times 70 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 3{,}869$$

$n_\tau = 4$ remaches $\therefore$ **para la barra BE se necesitarán 4 remaches**

Cálculo del esfuerzo medio:



$A = t \times (a - d) + (a - t) \times t$

$A = t \times (2a - d - t)$

$$\sigma_{BC} = \frac{96\times10^3}{7\times0{,}006\times(2\times0{,}075-0{,}0019-0{,}006)} \Rightarrow \boxed{\sigma_{BC} = 18{,}286 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{BE} = \frac{76{,}8\times10^3}{4\times0{,}013\times(2\times0{,}075-0{,}019-0{,}013)} \Rightarrow \boxed{\sigma_{BE} = 12{,}516 \text{ MPa}}$$

129. Repetir el problema anterior con remaches de 22 mm de diámetro sin variar los demás datos.

Resolución:

Del problema anterior:

BE = 76,8 kN (C) $\Rightarrow$ BC = 96 kN (T)

Para nuestro caso: d = 0,022 m

En la barra BC:

$$n_\tau = \frac{4\times96\times10^3}{\pi(0{,}022)^2\times70\times10^6} = 3{,}608 \Rightarrow n_\tau = 4 \text{ remaches}$$

$$n_{\sigma_b} = \frac{96\times10^3}{0{,}006\times0{,}022\times140\times10^6} = 5{,}195 \Rightarrow n_{\sigma_b} = 6 \text{ remaches}$$

$\therefore$ para la barra BC se necesitarán 6 remaches

$$\sigma_{BC} = \frac{96\times10^3}{6\times0{,}006\times(2\times0{,}075-0{,}022-0{,}006)} \Rightarrow \sigma_{BC} = 21{,}858 \text{ MPa}$$

En la barra BE:

$$n_\tau = \frac{4\times76{,}80\times10^3}{\pi\times(0{,}022)^2\times70\times10^6} = 2{,}886 \Rightarrow n_\tau = 3 \text{ remaches}$$

$$n_{\sigma_b} = \frac{76{,}8\times10^3}{0{,}013\times0{,}022\times140\times10^6} = 1{,}918 \Rightarrow n_{\sigma_b} = 2 \text{ remaches}$$

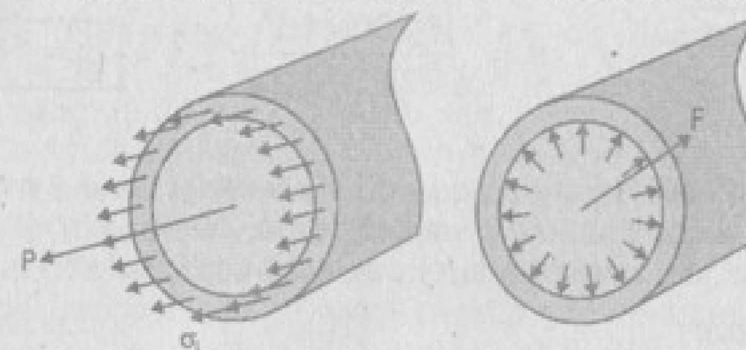
$\therefore$ para la barra BE se necesitarán 2 remaches.

$$\sigma_{BE} = \frac{76{,}8\times10^3}{3\times0{,}013\times(2\times0{,}075-0{,}022-0{,}013)} \Rightarrow \boxed{\sigma_{BE} = 17{,}124 \text{ MPa}}$$

130. Problema ilustrativo.

131. Demuestre que el esfuerzo en un cascarón esférico de pared delgada, de diámetro D y espesor t, sujeto a una presión interna p, está dado por σ = pD/4t.

Resolución:

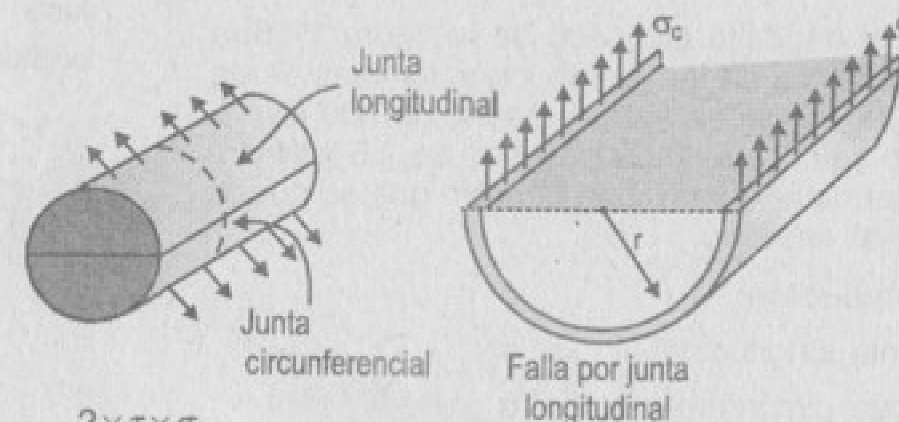


Haciendo equilibrio: P = F

$$\sigma_L \times \pi \times D \times t = p \times \pi \times \frac{D^2}{4} \Rightarrow \boxed{\sigma_L = \frac{p.D}{4t}}$$

132. Un recipiente cilíndrico a presión está fabricado de placas de acero que tienen un espesor de 20 mm. El diámetro del recipiente es 500 mm y su longitud, 3 m. Determine la máxima presión interna que puede aplicársele si el esfuerzo en el acero está limitado a 140 MPa. Si se aumentara la presión interna hasta que el recipiente fallara, bosqueje el tipo de fractura que ocurriría.

Resolución:



$$\sigma_c = \frac{p.D}{2\times t} \Rightarrow p = \frac{2\times\tau\times\sigma_c}{D}$$

$$p = \frac{2\times0{,}02\times140\times10^6}{0{,}5} \therefore \boxed{p = 11{,}20 \text{ MPa}}$$

133. Hallar la velocidad periférica límite de un anillo giratorio de acero si el esfuerzo normal admisible es de 140 MN/m² y la densidad del acero, 7850 kg/m³. Si el radio medio es de 250 mm, ¿a qué velocidad angular se alcanzará un esfuerzo de 200 MN/m²?

Resolución:

De: $\sigma = \rho \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{140\times10^6}{7850}} \therefore \boxed{v = 133{,}545 \text{ m/s}}$

$\sigma = \rho v^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \rho(\omega \cdot r_1)^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho . r_1^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{200\times10^6}{7850\times0,25^2}} \quad \therefore \quad \boxed{\omega = 638,47 \text{ rad/s}}$$

134. Un depósito cilíndrico de agua de eje vertical tiene 8 m de diámetro y 12 m de altura. Si ha de llenarse hasta el borde, determinar el mínimo espesor de las placas que lo componen si el esfuerzo está limitado a 40 MPa.

Resolución:

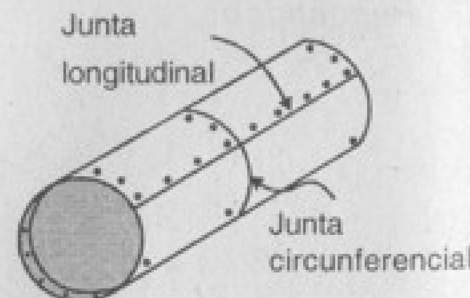
$p = \rho \times g \times L$

$$p = 1000\frac{kg}{m^3}\times 9,81\frac{m}{s^2}\times 12 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad p = 117\ 720 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_c = \frac{p\times D}{2\times t} \rightarrow t = \frac{p\times D}{2\times\sigma_c} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{117\ 720\times 8}{2\times40\times10^6} = 0,0118 \text{ m}$$

$$\therefore \quad \boxed{t = 11,8 \text{ mm}}$$

135. En el depósito cilíndrico de la figura 1-16 la resistencia de las juntas longitudinales es de 480 kN y de las transversales, de 200 kN. Si la presión interior ha de ser de 1,5 MN/m², determinar el máximo diámetro que se puede dar al depósito.



Resolución:

Junta longitudinal $\Rightarrow \sigma_{long.}$

Junta circunferencial $\Rightarrow \sigma_{circ.}$

De la resistencia longitudinal:

$$P_L = \frac{\pi D_L^2}{4}.p$$

$$D_L = 2\sqrt{\frac{P_L}{\pi.p}} = 2\sqrt{\frac{480\times10^3}{\pi\times1,5\times10^6}} \Rightarrow D_L = 0,638 \text{ m} \Rightarrow D_L = 638 \text{ mm}$$

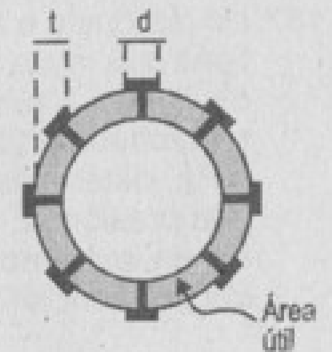
$$P_T = (\pi . D_T . t)\,\sigma_L = (\pi . D_T . t)\times\frac{p.D_T}{4t} \Rightarrow P_T = \frac{\pi.D_T^2}{4}.p$$

$$D_T = 2\sqrt{\frac{P_T}{\pi.p}} = 2\sqrt{\frac{200\times10^3}{\pi\times1,5\times10^6}} \Rightarrow D_T = 0,412 \text{ m} = 412 \text{ mm}$$

De los 2 valores obtenidos escogemos el menor, por lo tanto: $\boxed{D = 412 \text{ mm}}$

136. Una tubería que conduce vapor a 3,5 MPa tiene un diámetro exterior de 450 mm y un espesor de 10 mm. Se cierra uno de sus extremos mediante una placa atornillada al reborde de este extremo, con interposición de una junta o empaquetadura. ¿Cuántos tornillos de 40 mm de diámetro se necesitan para sujetar la tapa si el esfuerzo admisible es de 80 MPa y tiene un esfuerzo de apriete de 55 MPa? ¿Qué esfuerzo circunferencial se desarrolla en la tubería? ¿Por qué es necesario el apriete inicial de los tornillos de la tapa? ¿Qué sucedería si la presión del vapor hiciera duplicar el esfuerzo de apriete?

Resolución:



$$F = \frac{\pi\times D^2}{4}.p$$

$$F = \frac{\pi}{4}\times(0,45 \text{ m})^2\times 3,5\times10^6\ \frac{N}{m^2} \Rightarrow \boxed{F = 556,651 \text{ kN}}$$

$$\tau = \frac{F}{n_\tau\left(\pi.\frac{d^2}{4}\right)} \Rightarrow n_\tau = \frac{F}{\tau\left(\pi.\frac{d^2}{4}\right)}$$

$$n_\tau = \frac{556,651\times10^3}{55\times10^6\times\left(\frac{\pi}{4}\right)\times(0,04 \text{ m})^2} = 8,05 \Rightarrow n_\tau = 9 \text{ tornillos}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$A = \pi . D_{int.} . t - n . d . t \quad \Rightarrow \quad A = t(\pi . D_{int.} - n.d)$$

$$A = \frac{P}{\sigma} \Rightarrow t(\pi . D_{int.} - n\times d) = \frac{P}{\sigma}$$

$$\pi . D_{int.} - \frac{P}{\sigma.t} = n . d \Rightarrow n = \frac{\pi.D_{int.}}{d} - \frac{P}{\sigma.\tau.d}$$

Entonces:

$$n_\sigma = \frac{\pi\times0,43}{0,04} - \frac{556,651\times10^3}{80\times10^6\times0,01\times0,04} \Rightarrow n_\sigma = 16,377 \Rightarrow n_\sigma = 17 \text{ tornillos}$$

De ambos valores escogemos el mayor $\therefore$ $\boxed{\text{se necesitarán 17 tornillos}}$

$$\sigma_C = \frac{p.D_{int.}}{2t}$$

$$D_{int.} = D_{ext.} - 2.t \Rightarrow D_{int.} = 450 \text{ mm} - 2 \times 10 \text{ mm} \Rightarrow D_{int.} = 0{,}43 \text{ m}$$

$$\sigma_C = \frac{3{,}5\times10^6 \frac{N}{m^2}\times0{,}43 \text{ m}}{2\times0{,}01 \text{ m}} \quad \therefore \boxed{\sigma_C = 75{,}25 \text{ MPa}}$$

- El apriete inicial permite que los tornillos permanezcan fijos.
- Si se duplica el esfuerzo de apriete las pernos fallarían.

137. Un conducto o tubería de presión formado por una placa remachada en espiral tiene 1,5 m de diámetro interior y 10 mm de espesor. El paso de la espiral es de 3 m. La junta, en espiral, consiste en un solape sencillo, sujetado con remaches de 20 mm. Si los esfuerzos admisibles son τ = 70 MPa y σ_b = 140 MPa, determinar el espaciamiento de los remaches a lo largo de la junta para una presión de 1,25 MPa de acción hidráulica. Se desprecia el efecto del cierre de un extremo de la tubería (esfuerzo longitudinal). ¿Cuál es el esfuerzo circunferencial?

Resolución:

$D_{int.}$ = 1,5 m — P = 1,25 MPa
t = 0,01 m — τ = 70 MPa
d = 0,02 m — σ_b = 140 MPa
L = 3 m(paso)

$$\sigma_C = \frac{P.D}{2t} \Rightarrow \sigma_C = \frac{1{,}25\times10^6\times1{,}5}{2\times0{,}01} \Rightarrow \boxed{\sigma_C = 93{,}75 \text{ MPa}}$$

$$F = P.D_{int.}.L \Rightarrow F = 1{,}25 \times 10^6 \times 1{,}5 \times 3 \Rightarrow F = 5625 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{P}{n.A} \Rightarrow n = \frac{P}{\tau.A}$$

$$n = \frac{5625\times10^3}{70\times10^6\times\frac{\pi(0{,}02)^2}{4}} \Rightarrow n = 256$$

$$\sigma_b = \frac{P}{n.A} \Rightarrow n = \frac{P}{\sigma_b(t.d)}$$

$$n = \frac{5625\times10^3}{140\times10^6\times(0{,}01)(0{,}02)} \Rightarrow n = 201$$

$$s = \frac{2\pi D}{n} \Rightarrow s = \frac{9{,}424}{256} \Rightarrow \boxed{s = 36{,}81 \text{ mm}}$$

138. Repetir el problema anterior con un diámetro del conducto de 2 m y remaches de 30 mm de diámetro sin modificar los otros datos.

$$\sigma_C = \frac{1{,}25\times10^6\times2}{2\times0{,}01} \Rightarrow \boxed{\sigma_C = 125 \text{ MPa}}$$

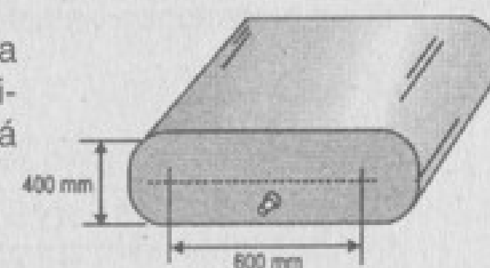
$$F = 1{,}25 \times 10^6 \times 2 \times 3 \Rightarrow F = 7500 \text{ kN}$$

$$n_\tau = \frac{7500\times10^3}{70\times10^6\times\frac{\pi(0{,}03)^2}{4}} \Rightarrow n_\tau = 152$$

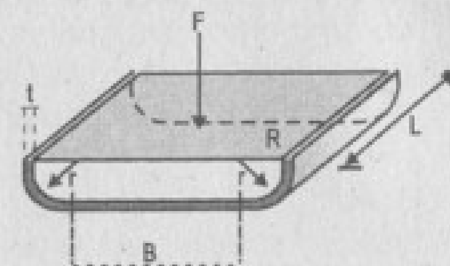
$$n_{\sigma_b} = \frac{7500\times10^3}{140\times10^6\times(0{,}01)(0{,}03)} \Rightarrow n_{\sigma_b} = 179$$

$$s = \frac{2\pi.D}{n} \Rightarrow s = \frac{9{,}424}{179} \Rightarrow \boxed{s = 52{,}65 \text{ mm}}$$

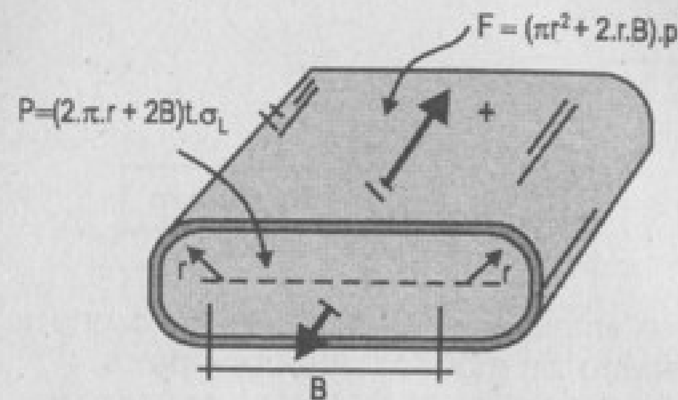
139. El depósito de la figura se construyó con placa de 10 mm de acero. Calcular los esfuerzos máximos circunferencial y longitudinal que originará una presión interior de 1,2 MPa.



Resolución:



$$\sigma_C = p\frac{(B+2\pi)}{2.t.L}.L \Rightarrow \sigma_C = \frac{1{,}2\times10^6(0{,}6+0{,}4)}{2\times0{,}01} \Rightarrow \boxed{\sigma_C = 60 \text{ MPa}}$$



$P = F$

$(\pi \,.\, D + 2 \,.\, B) \,.\, t \,.\, \sigma_L = \left(\frac{\pi.D^2}{4} + BD\right) .\, p$

$$\sigma_L = \frac{(\pi.D^2 + 4.BD)p}{4(\pi.D + 2B).t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{(\pi\times 0,4^2 + 4\times 0,6\times 0,4)\times 1,2\times 10^6}{4(\pi\times 0,4 + 2\times 0,6)\times 0,01}$$

$$\therefore\ \sigma_L = \boxed{\sigma_L = 17,862 \text{ MPa}}$$

140. Calcule el mínimo espesor de la placa que forma el depósito del problema anterior, si el esfuerzo admisible es de 40 MN/m² y la presión interior vale 1,5 MN/m².
De las ecuaciones halladas en el P-139:

$$\sigma_C = \frac{p(B+D)}{2.t}$$

$$t = \frac{p(B+D)}{2.\sigma} = \frac{1,5\times 10^6 \times (0,6+0,4)}{2\times 40\times 10^6} \Rightarrow t = 0,01875 \text{ m} = 18,75 \text{ mm}$$

También:

$$\sigma_L = \frac{(\pi\times D^2 + 4.\,B.\,D).p}{4(\pi.D + 2.B).t}$$

$$t = \frac{(\pi\times D^2 + 4.B.D)p}{4.\sigma.(\pi.D + 2.B)} \Rightarrow t = \frac{(\pi\times 0,4^2 + 4\times 0,6\times 0,4)\times 1,5\times 10^6}{4\times 40\times 10^6.(\pi\times 0,4 + 2\times 0,6)}$$

$t = 0,0056$ m $\Rightarrow$ $t = 5,6$ mm

De ambos valores escogemos el mayor, entonces: $\boxed{t = 18,75 \text{ mm}}$

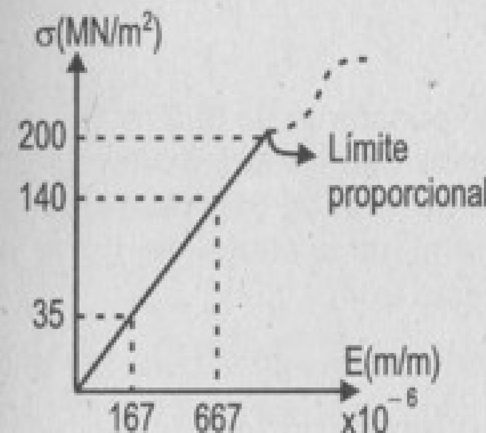
CAPÍTULO 2

DEFORMACIÓN SIMPLE

201; 202: problemas ilustrativos.

203. Durante una prueba esfuerzo-deformación se ha obtenido que para un esfuerzo de 35 MN/m² la deformación ha sido de 167×10^{-6} m/m, y para un esfuerzo de 140 MN/m², de 667×10^{-6} m/m. Si el límite de proporcionalidad es de 200 MN/m², ¿cuál es el valor del módulo elástico? ¿Cuál es el esfuerzo correspondiente a una deformación unitaria de 0,002? Si el límite de proporcionalidad hubiese sido de 150 MN/m², ¿se hubiera deducido los mismos resultados? Razonar la respuesta.

Resolución:



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{35}{167} = \frac{140}{667}$$

$E = 209,581 \times 10^9$ N/m²

$\boxed{E = 209,581 \text{ GPa}}$

$$\frac{140\times 10^6 \text{ N/m}^2}{667\times 10^{-6}\text{ m/m}} = \frac{x}{0,002 \text{ m/m}}$$

$x = 419,79 \times 10^6$ N/m²

$\boxed{\sigma = 419,79 \text{ MPa}}$

Para una deformación de 0,002 se supera el límite de proporcionalidad.
Si el límite de proporcionalidad hubiera sido 150 MN/m² se hubiera producido los mismos resultados puesto que la deformación de 0,002 supera, igual que el problema anterior, el límite de proporcionalidad.

204. Una barra prismática de longitud L, sección transversal A y densidad ρ se suspende verticalmente de un extremo. Demostrar que su alargamiento total es $\delta = \rho g L^2/2AE$. Llamando M a su masa total, demostrar que también $\delta = MgL/2AE$

Resolución:

$\Sigma F_y = 0$
$\sigma_y(A) - \rho \,.\, g \,.\, A \,.\, y = 0$

$$\sigma_y = \frac{\rho.g.A.y}{A}$$

$$\sigma_y = \rho.g.y$$

$$\delta = \int_0^L \frac{\sigma_y}{E}.dy$$

$$\delta = \int_0^L \frac{\rho.g.y}{E}.dy$$

Corte M-M:

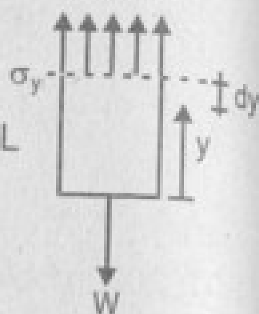
$W = \rho.g.V$

$V = A \times L$

$W = \rho.g.A.L$

$\delta = \dfrac{p.L}{E.A}$

pero: $\dfrac{p}{A} = \sigma$



$$\delta = \frac{\rho.g}{E}.\frac{y^2}{2}\Big|_0^L \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\rho.g.L^2}{2E}} \text{ l.q.q.d.}$$

Premultiplicando por A: $\delta = \dfrac{\rho.g.L^2}{2E} \times \left(\dfrac{A}{A}\right)$; pero $M = \rho.V \Rightarrow M = \rho.L.A$

Reemplazando: $\boxed{\delta = \dfrac{M.g.L}{2AE}}$ l.q.q.d.

205. Una varilla de acero que tiene una sección constante de 300 mm² y una longitud de 150 m se suspende verticalmente de uno de sus extremos y soporta una carga de 20 kN que pende de su extremo inferior. Si la densidad del acero es 7850 kg/m³ y E = 200 × 10³ MN/m², determinar el alargamiento de la varilla. *Indicación:* aplique el resultado del problema 204.

Resolución:

δ = carga axial + peso propio $\Rightarrow \delta = \dfrac{p.L}{E.A} + \dfrac{\rho.g.L^2}{2E}$

$$\delta = \frac{20\times10^3\times150}{300\times10^{-6}\times200\times10^9} + \frac{7850\times9{,}81\times150^2}{2\times200\times10^9} = 0{,}0543 \text{ m} \Rightarrow \boxed{\delta = 54{,}3 \text{ mm}}$$

206. Un alambre de acero de 10 m de longitud que cuelga verticalmente soporta una carga de 2000 N. Determinar el diámetro necesario, despreciando el peso del alambre, si el esfuerzo no debe exceder de 140 MPa y el alargamiento debe ser inferior a 5 mm. Supóngase E = 200 GPa.

Resolución:

$\delta = \dfrac{p.L}{E.A}$, donde: $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$

$$\delta = \frac{4pL}{\pi.E.d^2} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{p.L}{\pi.E.\delta}} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{2000\times10}{0{,}005\times\pi\times200\times10^9}} = 0{,}00505 \text{ m}$$

$\delta = 5{,}05$ mm

$$\sigma = \frac{p}{A} = \frac{4p}{\pi.d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{p}{\sigma.\pi}} = 2\sqrt{\frac{2000}{140\times10^6\times\pi}}$$

$d = 0{,}0043$ mm $\Rightarrow d = 4{,}3$ mm

De los 2 valores escogemos el mayor: $\boxed{d = 5{,}05 \text{ mm}}$

207. Una llanta de acero, de 10 mm de espesor, 80 mm de ancho y de 1500 mm de diámetro inferior, se calienta y luego se monta sobre una rueda de acero de 1500,5 mm de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática es 0,30, ¿qué par se requiere para girar la llanta con respecto a la rueda? Desprecie la deformación de la rueda y use E = 200 GPa.

Resolución:

Debido a la dilatación hay un incremento radial: $\lambda = 0{,}25$ mm ...(1)

Este incremento es causa del esfuerzo; σ, así:

$\lambda = \dfrac{\sigma.R}{E}$ ...(2): donde: R = 750 mm $\wedge$ E = 200 GPa

Pero el esfuerzo es provocado por la fuerza N sobre el área de acción:

$\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{N}{\pi(r_e^2 - r_i^2)}$; r_e: radio externo $\wedge$ r_i: radio interno

Así: $N = \sigma\pi\,(r_e + r_i)(r_e - r_i)$ ...(3)

Cabe recordar que $r_e - r_i = h = 80$ mm (ancho)

Mas, no existe rozamiento, la fuerza de acción es: $F_r = \mu.N$ ...(4); donde $\mu = 0{,}3$

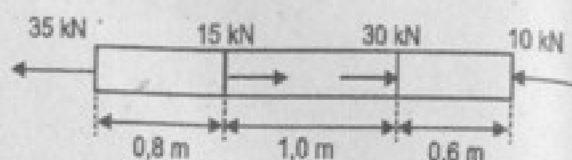
El par necesario es: $M = F_r \times e$ ...(5); donde e = 10 mm (espesor)

De (2); (3);(4) y (5): $M = \mu.\lambda\dfrac{(r_e + r_i)}{r}(E.\pi.h.e) = \mu.\lambda.2.E.\pi.r.h.e$

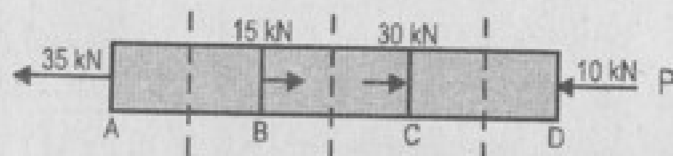
Reemplazando datos:

$M = (0{,}3)\,(0{,}25\times10^{-3}\text{ m})\,(2)\left(200.10^9\dfrac{N}{m^2}\right)(3{,}14)(80.10^{-3}\text{m})(0{,}01\text{ m}) \Rightarrow \boxed{M = 75{,}36 \text{ kN.m}}$

208. Una barra de aluminio de sección constante de 160 mm² soporta unas fuerzas axiales aplicadas en los puntos que indica la figura. Si E = 70 GPa, determinar el alargamiento o acortamiento total de la barra. (No hay pandeo de este elemento).



Resolución:



35 kN ← → P_{AB} 35 kN

15 kN

35 kN ← → $P_{BC} = 35 - 15 = 20$ kN

15 kN 30 kN

35 kN ← ← P_{CD} $= 35 - 15 - 30$

$= -10$ kN

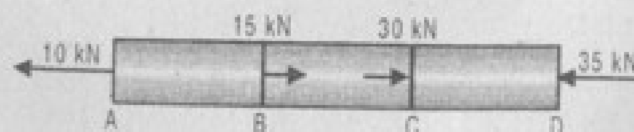
$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} - \delta_{CD}$$

$$\delta = [(35\times10^3)(0{,}8) + (20\times10^3)(1{,}0) + (-10\times10^3)(0{,}6)] \times \frac{1}{(70\times10^9)(160\times10^{-6})}$$

$\boxed{\delta = 3{,}39 \text{ mm}}$ (alargamiento)

209. Resolver el problema 208 intercambiando las fuerzas aplicadas en sus extremos, en el izquierdo la fuerza de 10 kN y en el derecho la de 35 kN.

Resolución:



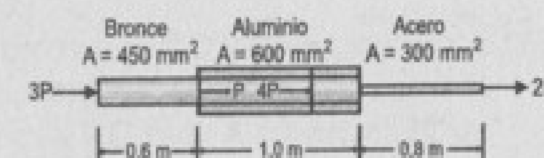
$P_{AB} = 10$ kN $P_{BC} = -5$ kN $P_{CD} = -35$ kN

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$$

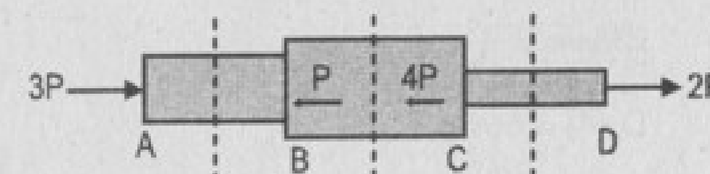
$$\delta = [(10\times10^3)(0{,}8) - (5\times10^3)(1) - (35\times10^3)(0{,}6)] \times \frac{1}{(70\times10^9)(160\times10^{-6})}$$

$\delta = -1{,}607\times10^{-3}$ m $\Rightarrow$ $\boxed{\delta = 1{,}61 \text{ mm}}$ (acortamiento)

210. Un tubo de aluminio está unido a una varilla de acero y a otra de bronce, tal como se indica en la figura, y soporta unas fuerzas axiales en las posiciones señaladas. Determinar el valor de P con las siguientes condiciones: la deformación total no ha de exceder de 2 mm, ni las tensiones han de sobrepasar 140 MN/m² en el acero, 80 MN/m² en el aluminio ni 120 MN/m² en el bronce. Se supone que el conjunto está convenientemente anclado para evitar el pandeo y que los módulos de elasticidad son 200 × 10³ MN/m² para el acero; 70 × 10³ MN/m² para el aluminio y 83 × 10³ MN/m² para el bronce.



Resolución:



3P → ← $P_{AB} = -3P$

3P → P ← $P_{BC} = -3P + P = -2P$

3P → P 4P → $P_{CD} = -3P + P + 4P = 2P$

A B C D

$$\delta_{total} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$$

$$0{,}002 = \frac{(-3P)(0{,}6)}{(83\times10^9)(450\times10^{-6})} + \frac{(-2P)(1{,}0)}{(70\times10^9)(600\times10^{-6})} + \frac{(2P)(0{,}8)}{(200\times10^9)(300\times10^{-6})}$$

$$0{,}002 = -4{,}819\times10^{-8}\,P - 4{,}762\times10^{-8}\,P + 2{,}667\times10^{-8}\,P$$

$P = 28{,}927$ kN

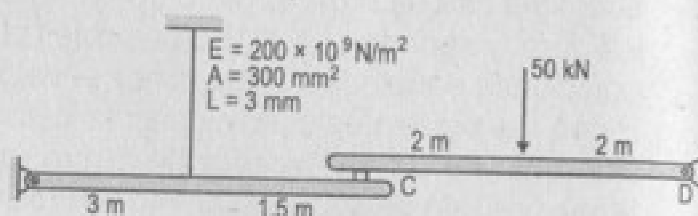
Del bronce: $\sigma = 120 \times 10^6 = \dfrac{3P}{450\times10^{-6}} \Rightarrow P_{bronce} = 18\ kN$

Del aluminio: $\sigma = 80 \times 10^6 = \dfrac{2P}{600\times10^{-6}} \Rightarrow P_{aluminio} = 24\ kN$

Del acero: $\sigma = 140 \times 10^6 = \dfrac{2P}{300\times10^{-6}} \Rightarrow P_{acero} = 18\ kN$

De los 4 valores obtenidos escogemos el menor, por lo tanto: $\boxed{P = 18\ kN}$

211. Dos barras AB y CD que se suponen absolutamente rígidas están articuladas en A y en D y separadas en C mediante un rodillo, como indica la figura. En B, una varilla de acero ayuda a soportar la carga de 50 kN. Determinar el desplazamiento vertical del rodillo situado en C.



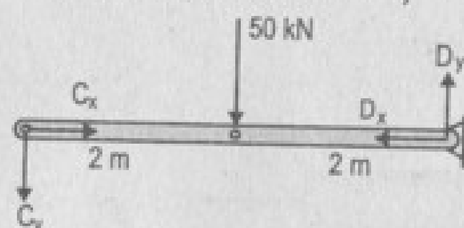
Resolución:

$\Sigma M_C = 0$

$D_y(4) = 50(2)$

$D_y = 25\ kN$

D.C.L. (lado derecho)

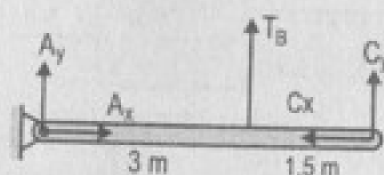


$\Sigma M_C = 0$

$A_y(4,5) + T_B(1,5) = 0$

$T_B = -3A_y$

D.C.L. (lado izquierdo)

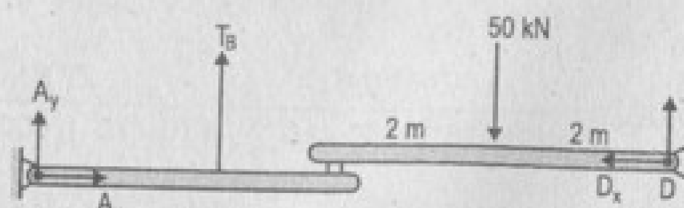


$\Sigma F_V = 0$

$A_y + D_y + T_B = 50$

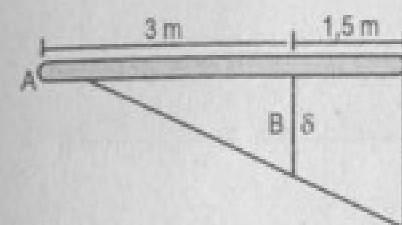
$A_y + 25 - 3(A_y) = 50$

D.C.L. (toda la estructura)



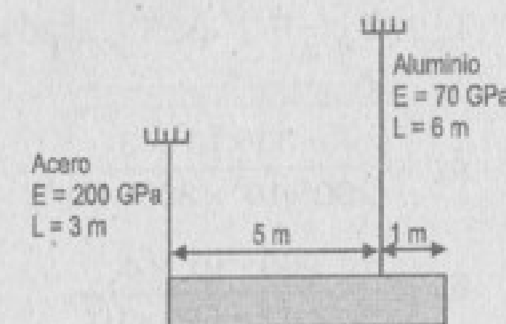
$A_y = -12,5\ kN \Rightarrow T_B = 37,5\ kN$

$\delta = \dfrac{P.L}{E.A} = \dfrac{37,5\times10^3\times3}{200\times10^9\times300\times10^{-6}} \Rightarrow \delta = 1,875\ mm$



$\dfrac{1,875\ mm}{3\ m} = \dfrac{y}{4,5\ m} \Rightarrow \boxed{y = 2,8125\ mm}$

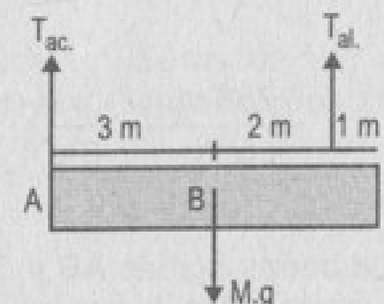
212. Un bloque prismático de concreto de masa M ha de ser suspendido de dos varillas cuyos extremos inferiores están al mismo nivel, tal como se indica en la figura. Determinar la relación de las secciones de las varillas, de manera que el bloque no se desnivele.



Resolución:

$\Sigma M_A = 0$

$T_{al.}(5) = M.g(3) \Rightarrow T_{al.} = \dfrac{3}{5}M.g$



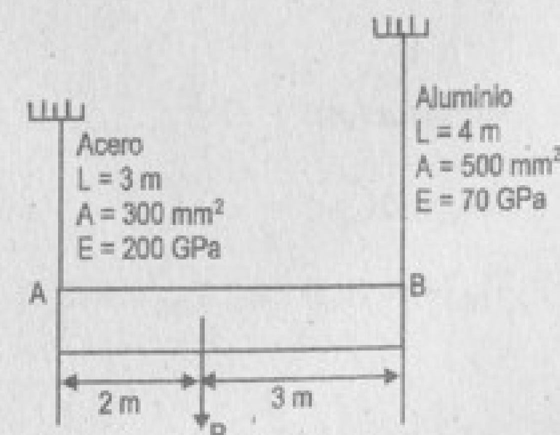
$\Sigma F_V = 0$

$T_{ac.} + T_{al.} = M.g \Rightarrow T_{ac.} = \dfrac{2}{5}M.g$

$\delta_{ac.} = \delta_{al.}$

$\dfrac{T_{ac.}.L_{ac.}}{E_{ac.}.A_{ac.}} = \dfrac{T_{al.}.L_{al.}}{E_{al.}.A_{al.}} \Rightarrow \dfrac{\frac{2}{5}M.g(3)}{200\times10^9.A_{ac.}} = \dfrac{\frac{3}{5}M.g(6)}{70\times10^9.A_{al.}} \therefore \boxed{\dfrac{A_{al.}}{A_{ac.}} = 8,571}$

213. La barra rígida AB, sujeta a dos varillas verticales como se muestra en la figura está en posición horizontal antes de aplicar la carga P. Si P = 50 kN, determine el movimiento vertical de la barra.



Resolución:

$\Sigma M_A = 0$

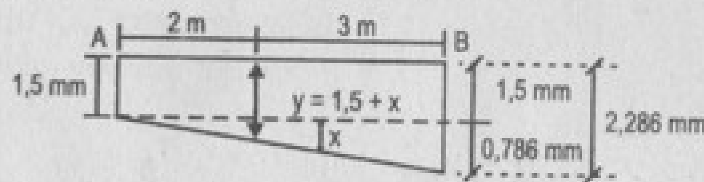
$T_{al.}(5) = P(2) \Rightarrow T_{al.} = 20 \text{ kN}$

$\Sigma F_V = 0$

$T_{ac.} + T_{al.} = P \Rightarrow T_{ac.} = 30 \text{ kN}$

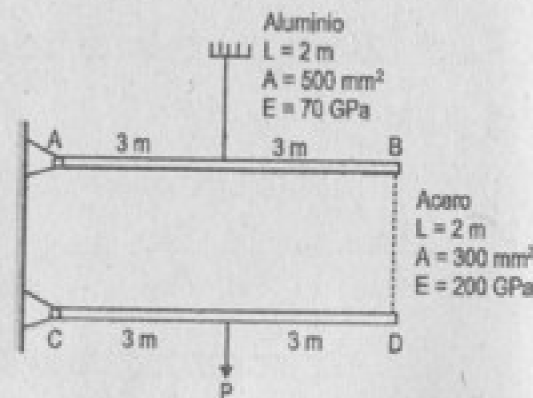
$$\delta_A = \frac{30\times10^3\times3}{200\times10^9\times300\times10^{-6}} \Rightarrow \delta_A = 1{,}5 \text{ mm}$$

$$\delta_B = \frac{200\times10^3\times4}{70\times10^9\times500\times10^{-6}} \Rightarrow \delta_B = 2{,}286 \text{ mm}$$



$$\frac{0{,}786 \text{ mm}}{5 \text{ m}} = \frac{x}{2\text{m}} \Rightarrow \boxed{x = 0{,}314 \text{ mm}} \quad \boxed{y = 1{,}814 \text{ mm}}$$

214. Las barras rígidas AB y CD mostradas en la figura están apoyadas mediante pernos en A y en C, y mediante las varillas mostradas. Determine la máxima fuerza P que pueda aplicarse como se muestra si el movimiento vertical de las barras está limitado a 5 mm. Desprecie los pesos de todos los miembros.

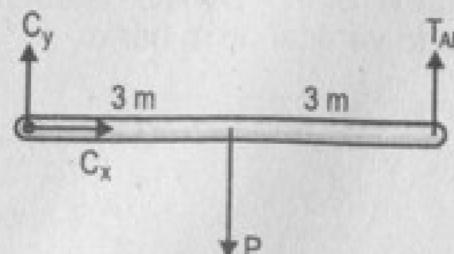


Resolución:

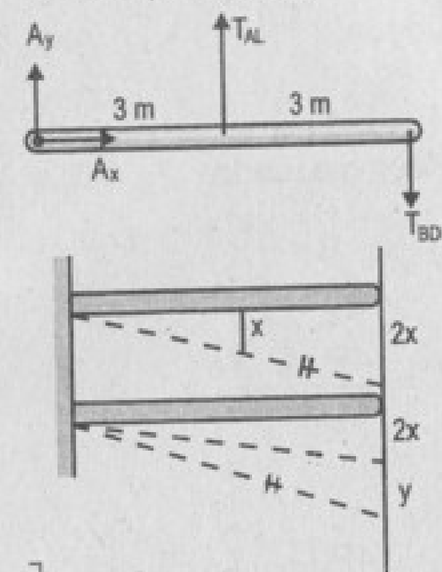
D.C.L. (barra CD)

$\Sigma M_C = 0$

$T_{DB}(6) = P(3) \Rightarrow T_{DB} = P/2$



D.C.L. (Barra AB)



$\Sigma M_A = 0$

$$T_{al.}(3) = T_{BD}(6) \Rightarrow T_{al.} = 2\left(\frac{P}{2}\right)$$

$$T_{al.} = P$$

$2x + y = 5 \text{ mm} \qquad \delta_{al.} = x \qquad \delta_{al.} = y$

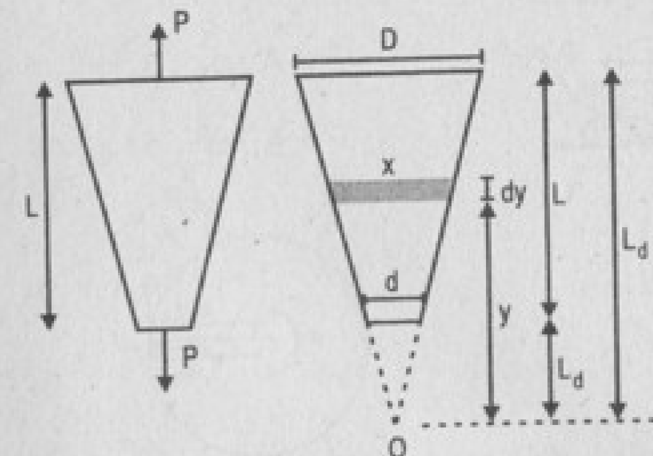
$2 \cdot \delta_{al.} + \delta_{ac.} = 0{,}005$

$$2\left[\frac{P(2)}{70\times10^9\times500\times10^{-6}}\right] + \left[\frac{P/2(2)}{200\times10^9\times300\times10^{-6}}\right] = 0{,}005$$

$$1{,}309\times10^{-1}\,P = 0{,}005 \Rightarrow \boxed{P = 38{,}182 \text{ kN}}$$

215. Una varilla de longitud L y sección circular tiene un diámetro que varía linealmente desde D en un extremo hasta d en el otro. Determinar el alargamiento que le producirá una fuerza P de tensión.

Resolución:



De la relación de triángulos:

$$\frac{x}{y} = \frac{D}{L_D} = \frac{d}{L_d} \Rightarrow x = \frac{D.y}{L_D} \quad \wedge \quad \frac{L_D}{L_d} = \frac{D}{d}$$

$$\delta = \int_{L_d}^{L_D} \frac{P}{E} \cdot \frac{dy}{A}$$

Donde: $A = \dfrac{\pi x^2}{4} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{4}.\dfrac{D^2.y^2}{L_D^2}$

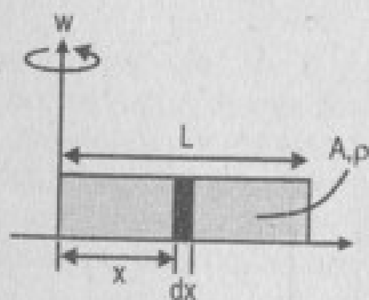
Reemplazando: $\delta = \dfrac{P}{E}\displaystyle\int_{L_d}^{L_D} \dfrac{dy}{\dfrac{\pi}{4}\dfrac{D^2.y^2}{L_D^2}}$

$$\delta = \frac{4P.L_D^2}{\pi.E.D^2}\int_{L_d}^{L_D} y^{-2}.dy \Rightarrow \delta = \frac{4P.L_D^2}{\pi.E.D^2}\left[\frac{-1}{y}\right]_{L_d}^{L_D}$$

$$\delta = \frac{4P.L_D^2}{\pi.E.D^2}\left[\frac{L_D - L_d}{L_D.L_d}\right] \Rightarrow \delta = \frac{4P.L_D}{\pi.E.D^2}.\frac{L}{L_d} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{4P.L}{\pi.E.D.d}}$$

216. Una varilla delgada de longitud L y sección recta constante A, situado en un plano horizontal, experimenta una rotación alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. Llamando r a la densidad y ω a la velocidad angular, demostrar que el alargamiento total de la varilla viene por $\rho\omega^2L^3/3E$.

Resolución:

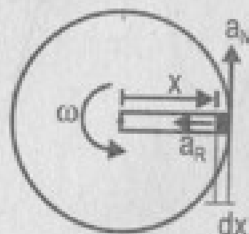


$$\Sigma F = m.a_R$$

$$F = A.dx.\rho.\omega^2.x$$

$$F = A.\omega^2.\rho.x.dx$$

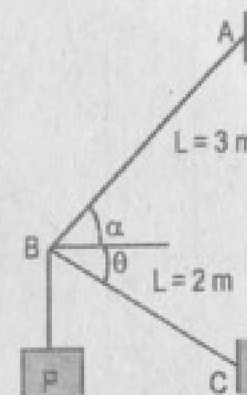
$$\delta = \int_0^L \frac{F.x}{E.A}.dx$$



$$\delta = \int_0^L \frac{(A.\omega^2.\rho.x.dx)}{E.A}x$$

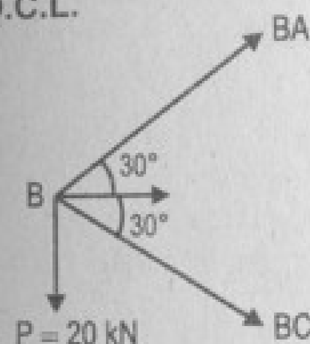
$$\delta = \frac{\omega^2.\rho}{E}\int_0^L x^2.dx = \frac{\omega^2.\rho}{E}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\rho.\omega^2 L^3}{3E}}$$ l.q.q.d.

217. Dos varillas de aluminio AB y BC articuladas en A y C a soportes rígidos, como indica la figura, están unidas en B mediante un pasador y soportan la carga P = 20 kN. Si las varillas tienen una sección de 400 mm² y $E = 70 \times 10^3$ MN/m², determinar las deformaciones totales de cada una y el desplazamiento horizontal y vertical del punto B. Considérese α = 30° y θ = 30°.



Resolución:

D.C.L.



$\mathbf{\Sigma F_H = 0}$

BAcos30° + BCcos30° = 0

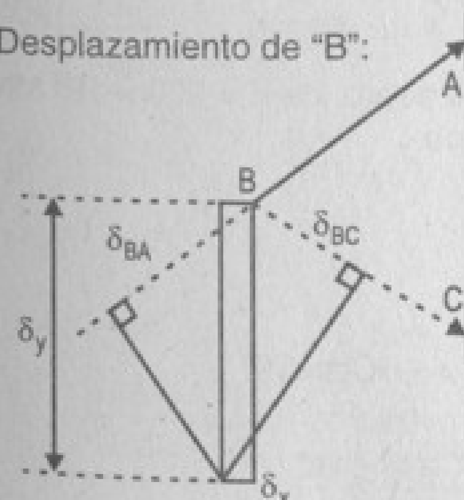
$\boxed{BC = -BA}$

$\mathbf{\Sigma F_V = 0}$

BAsen30° – BCsen30° = P

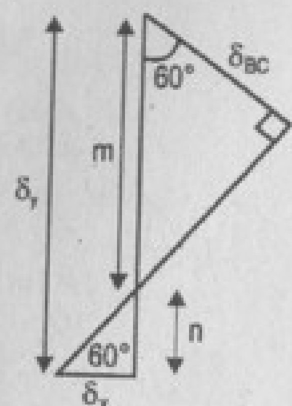
$$BA\left(\frac{1}{2}\right) - (-BA)\left(\frac{1}{2}\right) = P \quad \therefore \quad \boxed{BA = P} \wedge \boxed{BC = -P}$$

Desplazamiento de "B":



$$\delta_{BA} = \frac{20\times10^3\times3}{70\times10^9\times400\times10^{-6}}$$

$$\delta_{BA} = 2{,}143 \times 10^{-3}\ \text{m}$$



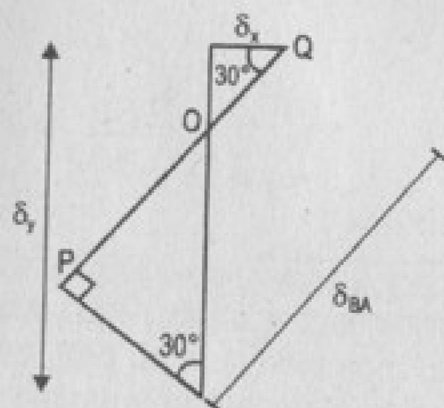
$$\delta_{BC} = \frac{20\times10^3\times2}{70\times10^9\times400\times10^{-6}}$$

$\delta_{BC} = 1{,}429 \times 10^{-3}$ m

$\delta_y = m + n$

$\delta_y = d_{BC}\sec60° + \delta_x \tan60°$

$\boxed{\delta_y = 2\delta_{BC} + \sqrt{3}\,\delta_x}$ ...(I)



$\delta_{BA} = QO + OP$ ...(II)

$QO = \delta_x \sec30°$

$QO = \frac{2}{\sqrt{3}}\delta_x$ ...(α)

$OP = \frac{\delta_y}{2} - \frac{\delta_x}{2\sqrt{3}}$ ...(β)

α y β en II:

$$\frac{\delta_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\delta_x = \delta_{BA} \Rightarrow \boxed{2\delta_{BA} = \delta_y + \sqrt{3}\,\delta_x} \quad ...(III)$$

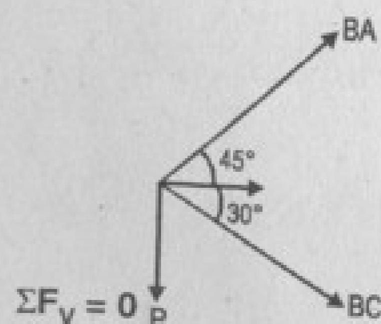
De III y I:

$\boxed{\delta_x = 0{,}412 \text{ mm}}$ $\boxed{\delta_y = 3{,}571 \text{ mm}}$

218. Resolver el problema 217 si la varilla AB es de acero, de $E = 200 \times 10^3$ MN/m², $\alpha = 45°$ y $\theta = 30°$, sin modificar los demás datos.

Resolución:

D.C.L.



$\Sigma F_H = 0$

$BA\cos45° = -BC\cos30°$

$BA = \sqrt{\frac{3}{2}}\,BC$

$BA\,\text{sen}45° - BC\,\text{sen}30° = P$

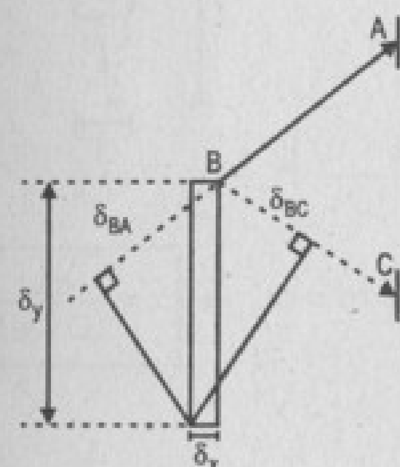
$$BA\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - BC\left(\frac{1}{2}\right) = P \Rightarrow \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}BC\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{BC}{2} = P \Rightarrow BC = -0{,}732P$$

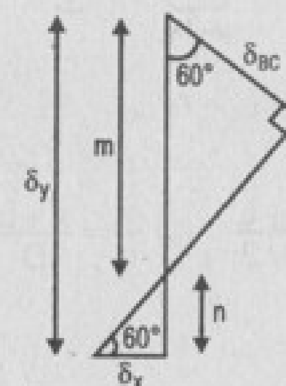
$BA = 0{,}897P$

$$\delta_{BA} = \frac{0{,}897(20\times10^3)(3)}{200\times10^9\times400\times10^{-6}} \Rightarrow \delta_{BA} = 0{,}673 \times 10^{-3}\text{ m} \quad \text{(alargamiento)}$$

$$\delta_{BC} = \frac{0{,}732(20\times10^3)(2)}{70\times10^9\times400\times10^{-6}} \Rightarrow \delta_{BC} = 1{,}046 \times 10^{-3}\text{ m} \quad \text{(acortamiento)}$$

Desplazamiento de "B":





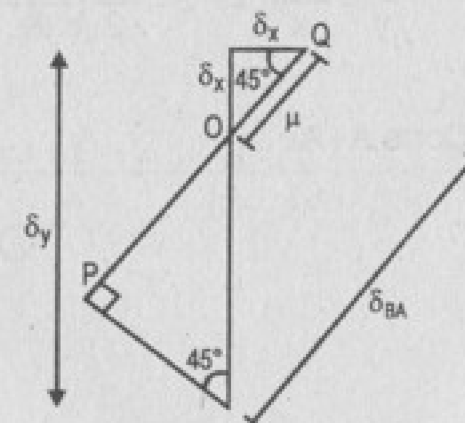
$\delta_y = m + n$

$\delta_y = 2\delta_{BC} + \sqrt{3}\,\delta_x$ ...(I)

$\frac{\delta_x}{\delta_y} = \frac{\mu}{\delta_{BA}}$; donde $\mu = \delta_x\sqrt{2}$

$\delta_y = \frac{\delta_{AB}}{\sqrt{2}}$ ...(II)

De (I) y (II):



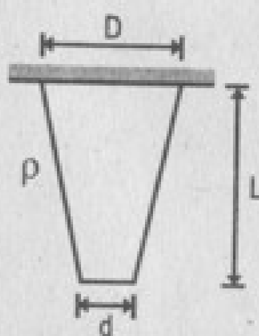
Tenemos:

$\delta_y = \frac{0{,}673}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\delta_y = 0{,}476 \text{ mm}}$ (alargamiento)

$\boxed{\delta_x = 0{,}933 \text{ mm}}$ (acortamiento)

219. Una barra de sección circular que varía linealmente desde un diámetro D en un extremo hasta otro menor d en el opuesto, se suspende verticalmente de su extremo más ancho. Si la densidad del material es ρ, determinar el alargamiento debido a su peso propio. Aplicar el resultado a la determinación del alargamiento de un sólido de forma cónica suspendido de su base.

Resolución:

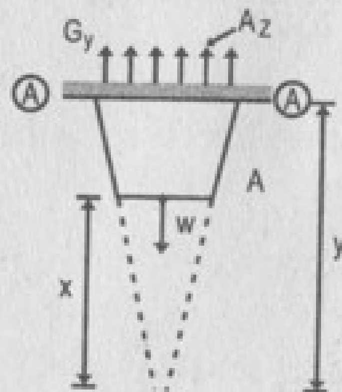


De la relación:

$$\frac{x}{d/2}=\frac{x+L}{D/2} \Rightarrow \frac{x}{d}=\frac{x+L}{D} \Rightarrow xD-xd=dL \Rightarrow \boxed{x=\frac{d.L}{(D-d)}}$$

$$\frac{z}{y}=\frac{d/2}{x} \Rightarrow z=\frac{d.y}{2}\left(\frac{D-d}{d.L}\right) \Rightarrow z=\frac{y(D-d)}{2L}$$

Corte A - A:



$\Sigma F_V = 0$

$$\sigma_y \cdot A_z = W \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_y \cdot A_z = \rho \cdot g \cdot V_z \qquad ...(\alpha)$$

Donde:

$$V_z = V_{cono\ y} - V_{cono\ x}$$

$$V_z = \frac{1}{3}A_z \cdot y - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d^2}{4}\right)x$$

$$V_z = \frac{1}{3}\pi\left[y^2\frac{(D-d)^2}{4L^2}\right]y - \frac{1}{3}\pi\frac{d^2}{4}\frac{d.L}{(D-d)}$$

$$V_z = \frac{1}{12}\pi\frac{(D-d)^2}{L^2}y^3 - \frac{1}{12}\pi\frac{d^3.L}{(D-d)} \qquad ...(\beta)$$

(β) en (α):

$$\sigma_y\,\pi\,y^2\frac{(D-d)^2}{4L^2} = \rho g\frac{1}{12}\pi\left[\frac{(D-d)^2y^3}{L^3}-\frac{d^3.L}{(D-d)}\right] \Rightarrow \sigma_y = \frac{\rho g}{3}\left[y-\frac{d^3L^3}{y^2(D-d)^3}\right]$$

Pero:

$$\delta = \frac{1}{E}\int_x^{x+L}\sigma_y.dy$$

$$\delta = \frac{\rho g}{3E}\int_x^{x+L}\left[y-\frac{d^3L^3}{(D-d)^3}y^{-2}\right]dy$$

$$\delta = \frac{\rho g}{3E}\left[\frac{y^2}{2}\Big|_x^{x+L}+\frac{d^3L^3}{(D-d)^3}\cdot\frac{1}{y}\Big|_x^{x+L}\right] \Rightarrow \delta = \frac{\rho g}{3E}\left[\frac{(x+L)^2-x^2}{2}+\frac{d^3L^3}{(D-d)^3}\left(\frac{1}{x+L}-\frac{1}{x}\right)\right]$$

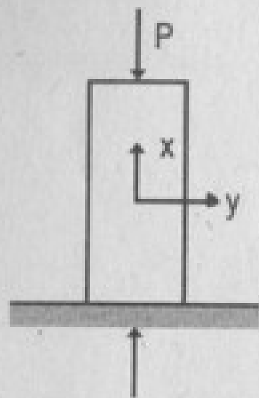
$$\delta = \frac{\rho g}{3E}\left[\frac{dL^2}{(D-d)}+\frac{L^2}{2}-\frac{d^2L^2}{(D-d)D}\right]$$

$$\boxed{\delta = \frac{\rho g L^2(D+d)}{6E(D-d)} - \frac{\rho g L^2 d^2}{3ED(D-d)}}$$

220; 221: problemas ilustrativos.

222. Un cilindro macizo de diámetro d soporta una carga axial P. Demostrar que la variación en su diámetro es 4 Pv/πEd.

Resolución:



$$\sigma_x = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma_x = \frac{4P}{\pi d^2} \text{ (compresión)}$$

$$\upsilon = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = -\upsilon\varepsilon_x$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

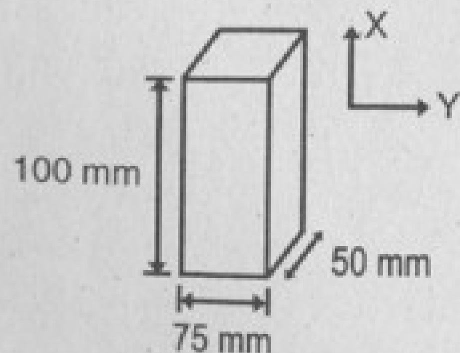
$$\Rightarrow \varepsilon_y = \frac{4P}{E\pi d^2}\cdot\upsilon$$

Pero:

$$\delta_y = \varepsilon_y \cdot d$$

$$\delta_y = \frac{4Pd}{\pi Ed^2}\cdot\upsilon \Rightarrow \boxed{\delta_y = \frac{4P\upsilon}{\pi Ed}}$$

223. Un bloque rectangular de aluminio tiene 100 mm de longitud según la dirección X, 75 mm de ancho según la dirección Y y 50 mm de grueso en la dirección Z. Está sometido a tres fuerzas según tres direcciones. Una fuerza de tensión uniformemente distribuida de 200 kN en la dirección X y fuerzas de compresión uniformemente distribuidas de 160 y 220 kN según las direcciones Y y Z, respectivamente. Si $\upsilon = \frac{1}{3}$ y E = 70 GPa, determinar qué carga total uniformemente distribuida en la dirección X produciría la misma deformación transversal en la dirección Z que las cargas dadas.



P_x = 200 kN (tensión)
P_y = 160 kN (compresión)
P_z = 220 kN (compresión)
$\upsilon = \frac{1}{3}$ (aluminio)
E = 70 × 10^9 Pa

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\sigma_x = \frac{200\times10^3\text{ N}}{(75\times50)\times10^{-6}\text{ m}^2} = 53{,}33\text{ MPa (+)}$$

$$\sigma_y = \frac{160\times10^3\text{ N}}{(50\times100)\times10^{-6}\text{ m}^2} = 32\text{ MPa (−)}$$

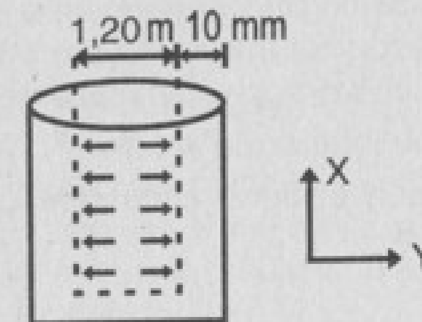
$$\sigma_z = \frac{220\times10^3\text{ N}}{(75\times100)\times10^{-6}\text{ m}^2} = 29{,}33\text{ MPa (−)} \Rightarrow \varepsilon_z = -5{,}200\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\upsilon\,\sigma_x) \Rightarrow -\frac{\varepsilon_z.E.A}{\upsilon} = P_x$$

$$P_x = -\frac{\varepsilon_z(70\times10^9)(75\times50)\times10^{-6}}{1/3} \Rightarrow \boxed{P_x = 409{,}973\text{ kN}}$$

224. Un tambor cilíndrico de acero construido de placa soldada de 10 mm, tiene un diámetro interior de 1,20 m. Calcular el aumento del diámetro bajo la acción de una presión interior de 1,5 MPa. Suponga que la relación de Poisson es 0,30 y E = 200 GPa.

Resolución:



$$F = P\cdot A$$

$$F = P\cdot\frac{\pi d^2}{4}$$

$$F = 1{,}5\times10^6\times\pi\frac{(1{,}2)^2}{4} \Rightarrow F = 1696{,}46\text{ kN}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\not{\sigma_x} - \upsilon\left(\sigma_y + \not{\sigma_z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_x = -\upsilon\cdot\frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{1}{3}\frac{(-1{,}5\times10^6)}{200\times10^9} \quad \therefore \varepsilon_x = 2{,}5\times10^{-6}$$

$$\delta = \varepsilon L$$

$$\delta_x = \varepsilon_x\cdot d \Rightarrow \delta_x = 2{,}5\times10^{-6}\times1200\text{ mm} = 3\times10^{-3}\text{ mm} \quad \therefore \boxed{\delta_x = 0{,}003\text{ mm}}$$

225. Un tubo de acero de 50 mm de diámetro y 2 mm de espesor encaja perfectamente y sin holgura en un orificio absolutamente rígido e indeformable. Determinar el esfuerzo circunferencial en el tubo cuando se le aplica una fuerza axial de compresión de 10 kN. El coeficiente $\upsilon = 0{,}30$ y $E = 200\times10^9$ N/m². Despreciar la posibilidad de pandeo en las paredes del tubo.

Resolución:

$$\sigma_L = \frac{P.D}{2\sigma}$$

$$\sigma_x = \frac{4(10\times10^3)}{\pi(0{,}05)^2} \Rightarrow \sigma_x = -5092{,}958 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = P$$

$$\varepsilon_y = -\upsilon\cdot\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_y = -\upsilon\,\sigma_x$$

$$\sigma_y = 0{,}30\ (5092{,}958\times10^3) \Rightarrow \sigma_y = 1527{,}887 \text{ kPa}$$

$$\sigma_c = \frac{1527{,}887\times10^3\times0{,}05}{2\times0{,}02} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 1909{,}859 \text{ kPa}}$$

226. Un tubo de bronce de 150 mm de longitud, cerrado en sus extremos, tiene 80 mm de diámetro y 3 mm de espesor. Se introduce sin holgura en un orificio de 80 mm de diámetro realizado en un bloque absolutamente rígido e indeformable y se somete a una presión interior de 4 MN/m². Con los valores $\upsilon = \frac{1}{3}$ y $E = 83\times10^3$ MN/m², determinar el esfuerzo circunferencial en el tubo.

Resolución:

$$\sigma_c = \frac{(\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y)}{1-\upsilon^2}E$$

$$F = \frac{\pi D^2}{4}P$$

$$F = \frac{\pi(0{,}08)^2}{4}\times 4\times10^6 \text{ N/m}^2 \Rightarrow F = 20{,}106 \text{ kN}$$

$$\delta_y = \frac{PL}{EA} = \frac{20{,}106\times10^3\times0{,}15}{83\times10^9\times\frac{\pi(0{,}08)^2}{4}} \Rightarrow \delta_y = 7{,}229\times10^{-6}$$

$$\delta = \varepsilon\cdot L \Rightarrow \varepsilon_y = 48{,}193\times10^{-6} \Rightarrow \sigma_y = 4\times10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\varepsilon_x = --\upsilon\frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{1}{3}\left(\frac{40\times10^6}{83\times10^9}\right) \Rightarrow \varepsilon_x = -16{,}064\times10^{-6}$$

$$\sigma_x = \left(\frac{\varepsilon_x\times\upsilon\varepsilon_y}{1-\upsilon^2}\right)E \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 24{,}093 \text{ Pa}}$$

227. Un tubo de aluminio de 200 mm de largo, cerrado en sus extremos, tiene 100 mm de diámetro y una pared de 2 mm de espesor. Si el tubo cabe justamente entre dos paredes rígidas con presión interna nula, determine los esfuerzos longitudinal y tangencial para una presión interna de 4,00 MN/m². Suponga $\upsilon = \frac{1}{3}$ y $E = 70\times10^9$ N/m².

Resolución:

Del problema anterior:

$$q = -\frac{2\upsilon P\,t}{2(1-\upsilon)t+d}$$

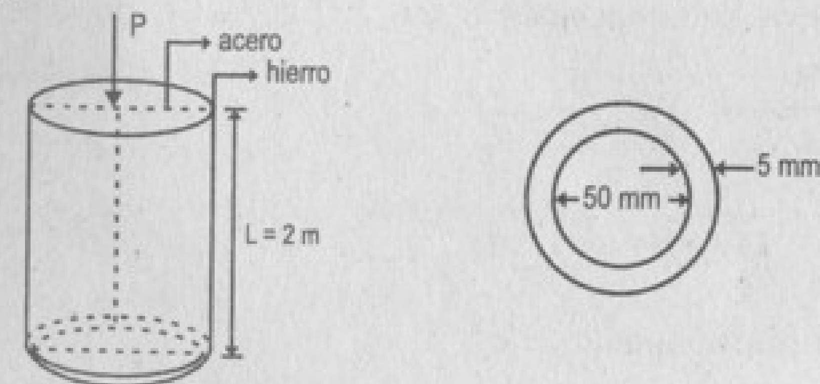
$$q = -\frac{2\times1/3\times4\times10^6\times0{,}002}{2(1-1/3)\times0{,}02+0{,}1} \Rightarrow q = -42\,105{,}28 \text{ N/m}^2 \therefore q = -0{,}042 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_t = \frac{-qd}{2t} \Rightarrow \sigma_t = \frac{0{,}042\times0{,}1}{2\times0{,}002} \therefore \boxed{\sigma_t = 1{,}05 \text{ MN/m}^2}$$

228; 229; 230; 231: problemas ilustrativos.

232. Una barra de acero de 50 mm de diámetro y 2 m de longitud se envuelve con un cascarón de hierro fundido de 5 mm de espesor. Calcular la fuerza de compresión que es preciso aplicar para producir un acortamiento de 1 mm en la longitud de 2 m de la barra compuesta. Para el acero, $E = 200\times10^9$ N/m², y para el hierro fundido, $E = 100\times10^9$ N/m².

Resolución:



La fuerza P de compresión, será la suma de las fuerzas que soporta el núcleo de acero y el tubo de hierro:

$$P = P_a + P_h$$

P_a: fuerza que soporta el núcleo de acero
P_h: fuerza que soporta el tubo de hierro
Como ambos tienen una compresión de 1 mm, así: $\delta_a = \delta_h = 1\text{ mm} = 0{,}001\text{ m}$
Por lo tanto:

$$\delta_a = \frac{P_a.L}{E_a.A_a} = \frac{P_a\,(2m)}{(200\times10^9 N/m^2)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}05)^2} = 0{,}001\text{ m}$$

$$\Rightarrow P_a = 196{,}35\text{ kN} \qquad ...(1)$$

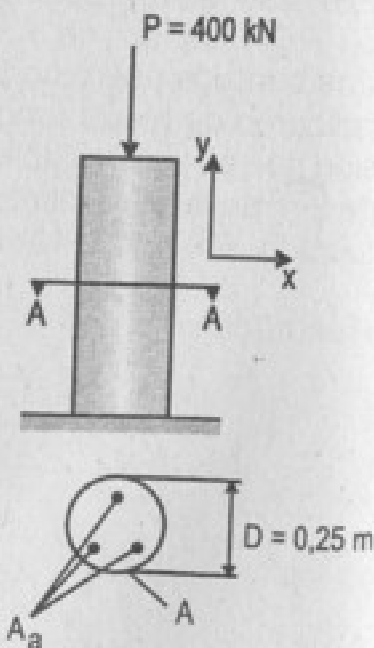
$$\delta_h = \frac{P_h.L}{E_h.A_h} = \frac{P_h\,(2m)}{(100\times10^9\ N/m^2)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}06^2 - 0{,}05^2)} = 0{,}001\text{ m}$$

$$\Rightarrow P_h = 43{,}19\text{ kN} \ ...(2)$$

Así: $P = (196{,}35 + 43{,}19)\text{ kN} = 239{,}54\text{ kN} \quad \therefore \quad \boxed{P = 240\text{ kN}}$

233. Una columna de concreto armado de 250 mm de diámetro se diseña para soportar una fuerza axial de compresión de 400 kN. Si el esfuerzo admisible en el concreto es de 6 MPa y en el acero de 120 MPa, determinar la sección de refuerzo de acero que se necesitará. E_c = 14 GPa y E_a = 200 GPa.

Resolución:



Equilibrio en el eje y:

$$P_a + P_c = P \qquad \text{o} \qquad A_a\sigma_a + A_c\sigma_c = P$$

o:

$$A_a\sigma_a + (A - A_a)\sigma_c = P \qquad ...(1)$$

Compatibilidad de deformaciones: $\delta_a = \delta_c$

$$\frac{P_a\,L}{A_a\,E_a} = \frac{P_c\,L}{A_c\,E_c} \Rightarrow \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

$$\frac{\sigma_a}{200\times10^9} = \frac{\sigma_c}{14\times10^9} \Rightarrow \sigma_c = 0{,}07\sigma_a \quad ...(2)$$

De la ecuación (2); cuando $\sigma_a = \sigma_a^{adm.}$:

$$\sigma_c = 0{,}07\ \sigma_a^{adm.} = 0{,}07 \times 120 \times 10^6\text{ Pa}$$

$$\Rightarrow \sigma_c = 8{,}4 \times 10^6\text{ Pa} > \sigma_c^{adm.}$$

Esto quiere decir que el primero que llega a su esfuerzo admisible es el concreto. Por lo que:

$$\sigma_c = \sigma_c^{adm.} = 6\times10^6\text{ Pa} \Rightarrow \sigma_a = \frac{\sigma_c}{0{,}07} = \frac{\sigma_c^{adm.}}{0{,}07} = 85{,}7\times10^6\text{ Pa}$$

En la ecuación (1):

$$A_a \times 85{,}7 \times 10^6 + (A - A_a) \times 6 \times 10^6 = 400 \times 10^3$$

donde:

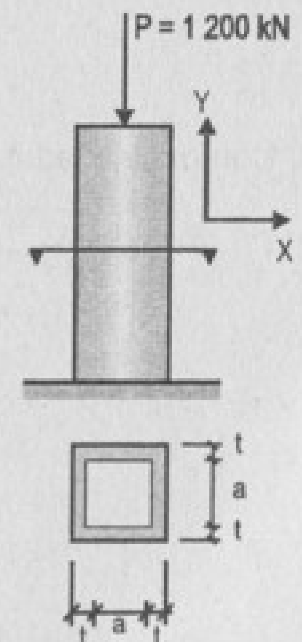
$$A = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{4}\times0{,}25^2 = 0{,}0491\text{ m}^2$$

$$A_a \times 85{,}7 \times 10^3 + (0{,}0491 - A_a) \times 6 \times 10^3 = 400$$

$$A_a = 1{,}322 \times 10^{-3}\text{ m}^2 \quad \therefore \quad \boxed{A_a = 1322\text{ mm}^2}$$

234. Una columna de madera de sección 250 × 250 mm se refuerza mediante placas de acero de 250 mm de ancho y espesor t, en sus cuatro caras laterales. Determinar el espesor de las placas de manera que el conjunto pueda soportar una carga axial de 120 kN sin que se excedan los esfuerzos admisibles de 8 MN/m² en la madera y de 140 MN/m² en el acero. Los módulos elásticos son $E_m = 10 \times 10^3\text{ MN/m}^2$ y $E_a = 200 \times 10^3\text{ MN/m}^2$.

Resolución:



Equilibrio en el eje Y: $P_m + P_a = P$

ó: $A_m\,\sigma_m + A_a\,\sigma_a = P \qquad ...(1)$

Compatibilidad de deformaciones: $\delta_a = \delta_m$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_a}{E_a} \Rightarrow \frac{\sigma_m}{10\times10^9} = \frac{\sigma_a}{200\times10^9}$$

$$\Rightarrow \sigma_a = 20\sigma_m \qquad ...(2)$$

Si: $\sigma_a = \sigma_a^{adm.} = 140\times10^6\text{ Pa}$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma_a}{20} \Rightarrow \sigma_m = 7\times10^6\text{Pa} < \sigma_m^{adm.}$$

$$\therefore \quad \sigma_a = \sigma_a^{adm.} = 140\times10^6\text{ Pa}$$

$$\sigma_m = 7 \times 10^6\text{ Pa}$$

En (1); con: $A_m = 250^2 \times 10^{-6}\ m^2 = a^2$

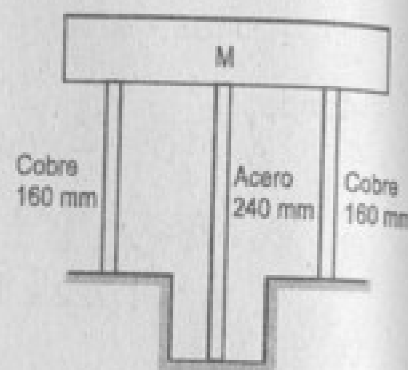
$(250^2 \times 10^{-6}) \times 7 \times 10^6 + A_a \times 140 \times 10^6 = 1200 \times 10^3 \ \therefore\ A_a = 5446{,}4 \times 10^{-6}\ m^2$

$\Rightarrow\ A_{total} = A_m + A_a = 67\,946{,}4\ mm^2$

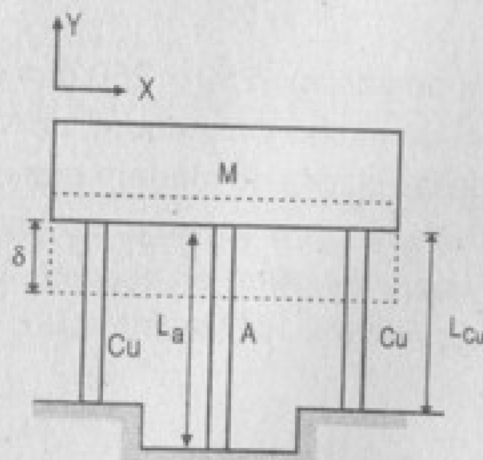
$A_{total} = (250 + 2t)^2$

$\Rightarrow\ (250 + 2t)^2 = 67\,946{,}4\ mm^2 \quad \therefore \quad \boxed{t = 5{,}33\ mm}$

235. Un bloque completamente rígido de masa M se apoya en tres varillas situadas en un mismo plano, como indica la figura. Las varillas de cobre tienen una sección de 900 mm², E = 120 GPa, y esfuerzo admisible de 70 MPa. La varilla de acero tiene una sección de 1200 mm², E = 200 GPa, y el esfuerzo admisible es 140 MPa. Calcular el máximo valor de M.



Resolución:



Compatibilidad de deformación:

$$\delta = \delta_a = \delta_{Cu} \ \Rightarrow\ \frac{\sigma_a L_a}{E_a} = \frac{\sigma_{Cu} L_{Cu}}{E_{Cu}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sigma_a \times 0{,}24\ m}{200 \times 10^9 Pa} = \frac{\sigma_{Cu} \times 0{,}16\ m}{120 \times 10^9 Pa}$$

$$\therefore\ \sigma_{Cu} = 0{,}9\sigma_a \qquad \text{...(1)}$$

Si: $\sigma_a = \sigma_a^{adm.} = 140 \times 10^9$ Pa , en (1):

$$\sigma_{Cu} = 0{,}9 \times 140 \times 10^9\ Pa = 126 \times 10^9\ Pa > \sigma_{Cu}^{adm.}$$

$$\therefore\ \sigma_{Cu} = \sigma_{cu}^{adm.} = 70 \times 10^6\ Pa \Rightarrow \sigma_a = \frac{\sigma_{Cu}}{0{,}9} = 77{,}8 \times 10^6\ Pa$$

Equilibrio en el eje Y:

$$2P_{Cu} + P_a = M$$

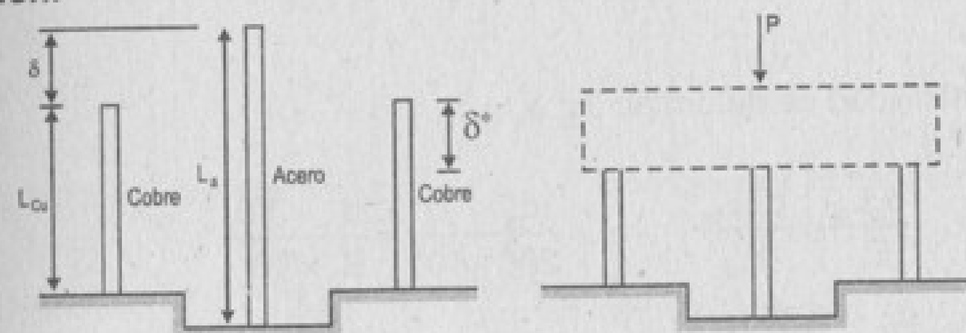
$$2\,A_{Cu}\sigma_{Cu} + A_a\sigma_a = M$$

$$2 \times (900 \times 10^{-6}\ m^2) \times (70 \times 10^6) + (1200 \times 10^{-6}\ m^2) \times (140 \times 10^6) = M$$

$$\therefore\ \boxed{M = 22 \times 10^3\ kg}$$

236. En el problema 235, ¿qué variación ha de tener la longitud de la varilla de acero para que las tres varillas trabajen a su máximo esfuerzo admisible?

Resolución:



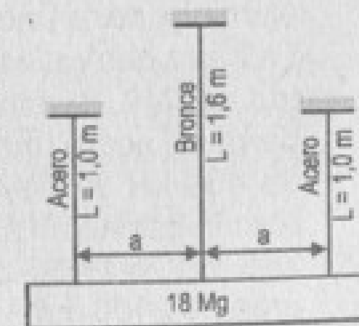
Compatibilidad de deformación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Acero: } \delta_a = \delta + \delta^* \\ \text{Cobre: } \delta_{Cu} = \delta^* \end{array}\right\} \delta = \delta_a - \delta_{Cu}$$

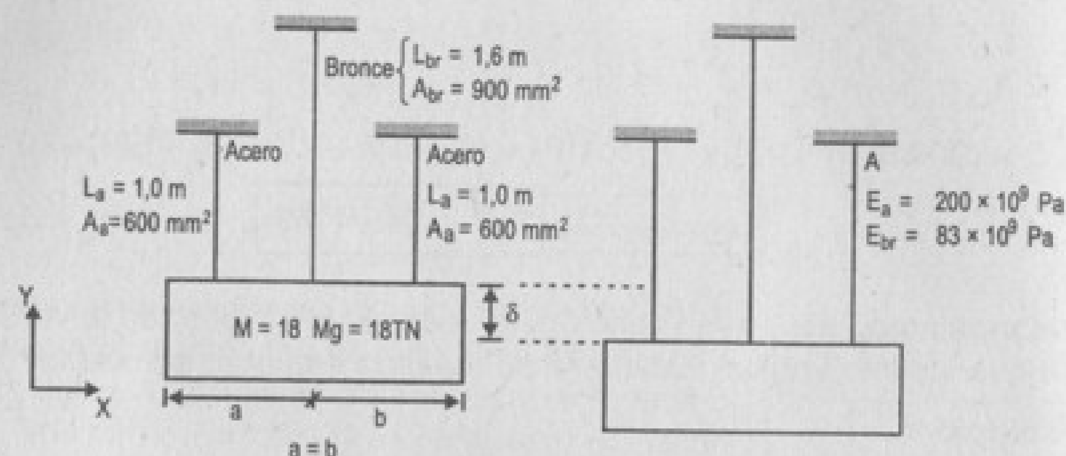
$$\Rightarrow\ \delta = \left(\frac{\sigma_a^{adm.} L_a}{E_a}\right) - \left(\frac{\sigma_{Cu}^{adm.} L_{Cu}}{E_{Cu}}\right);\ L_a = 0{,}24\ m$$

$$\delta = \left(\frac{140 \times 10^6 \times 0{,}24}{200 \times 10^9}\right) - \left(\frac{70 \times 10^6 \times 0{,}16}{120 \times 10^9}\right) \quad \therefore \quad \boxed{\delta = 75\ mm}$$

237. Los extremos inferiores de las barras de la figura están en el mismo nivel antes de colgar de ellas un bloque rígido de masa 18 Mg. Las barras de acero tienen una sección de 600 mm² y E = 200 GN/m². La barra de bronce tiene una sección de 900 mm² y E = 83 GN/m². Determinar el esfuerzo en las tres barras.



Resolución:



Compatibilidad de deformación: $\delta_a = \delta_{br} = \delta$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_a L_a}{E_a} = \frac{\sigma_{br} L_{br}}{E_{br}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_a \times 1{,}0}{200 \times 10^9} = \frac{\sigma_{br} \times 1{,}6}{B_3 \times 10^9}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{br} = 0{,}26\sigma_a \qquad \text{...(1)}$$

Equilibrio en el eje Y: $2P_a + P_{br} = M$

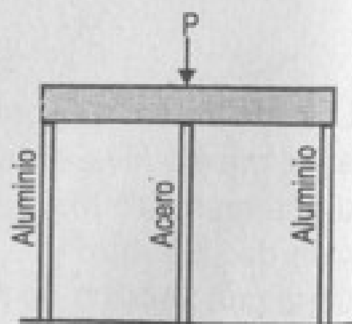
$$2 \times \sigma_a A_a + \sigma_{br} A_{br} = M \quad \Rightarrow \quad 2\sigma_a A_a + 0{,}26\,\sigma_a A_{br} = M$$

$$\sigma_a[(2 \times 600 \times 10^{-6}\,m^2) + (0{,}26 \times 900 \times 10^{-6}\,m^2)] = 18 \times 10^3\ kg \times 9{,}81$$

$$\therefore \quad \boxed{\sigma_a = 123{,}1\ MPa}$$

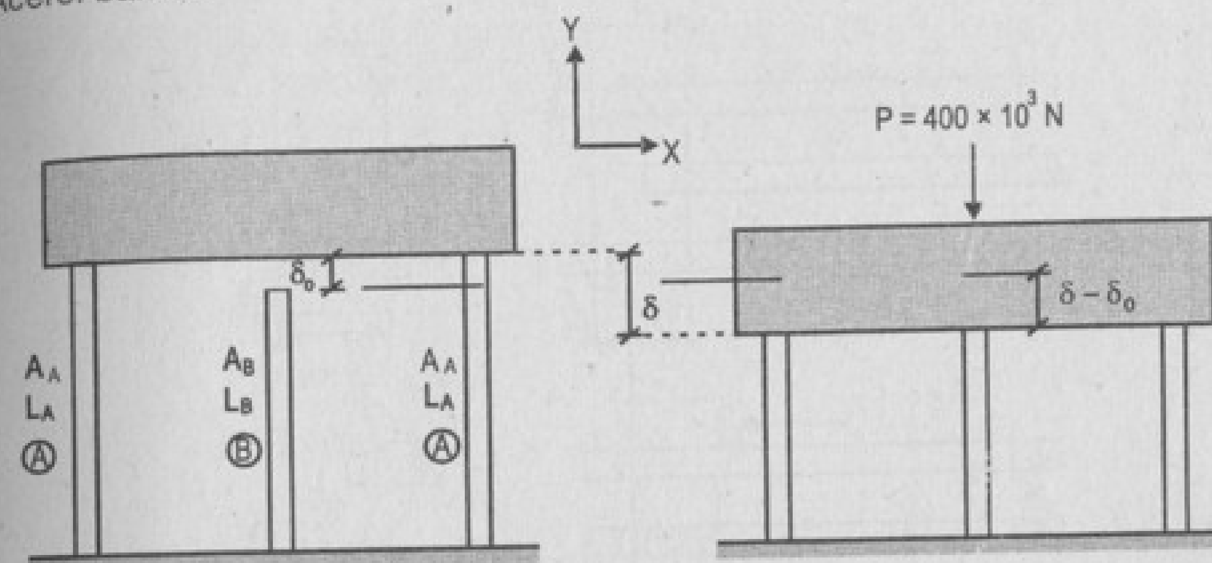
En (1) : $\boxed{\sigma_{br} = 32{,}0\ MPa}$

238. La plataforma rígida de la figura tiene una masa despreciable y descansa sobre dos barras de aluminio, cada una de 250,00 mm de longitud. La barra central es de acero y tiene una longitud de 249,90 mm. Calcule el esfuerzo en la barra de acero una vez que la carga central P de 400 kN se haya aplicado. Cada barra de aluminio tiene un área de 120 mm² y un módulo E de 70 GPa. La barra de acero tiene un área de 2400 mm² y un módulo E de 200 GPa.



Resolución:

Aluminio: barra A
Acero: barra B



Equilibrio en el eje Y: $2P_A + P_B = P$

$$2\,A_A\,\sigma_A + A_B\sigma_B = P \quad \Rightarrow \quad 2 \times (120 \times 10^{-6})\sigma_A + (2400 \times 10^{-6})\sigma_B = 400 \times 10^3 \quad \text{...(1)}$$

Compatibilidad de deformaciones:

Barra (A): $\delta = \frac{\sigma_A L_A}{E_A}$; barra (B): $\delta - \delta_0 = \frac{\sigma_B L_B}{E_B}$

$$\Rightarrow \quad \delta - \frac{\sigma_B L_B}{E_B} = \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_A L_A}{E_A} - \frac{\sigma_B L_B}{E_B} = \delta_0 \ ; \ L_A = L_B = L$$

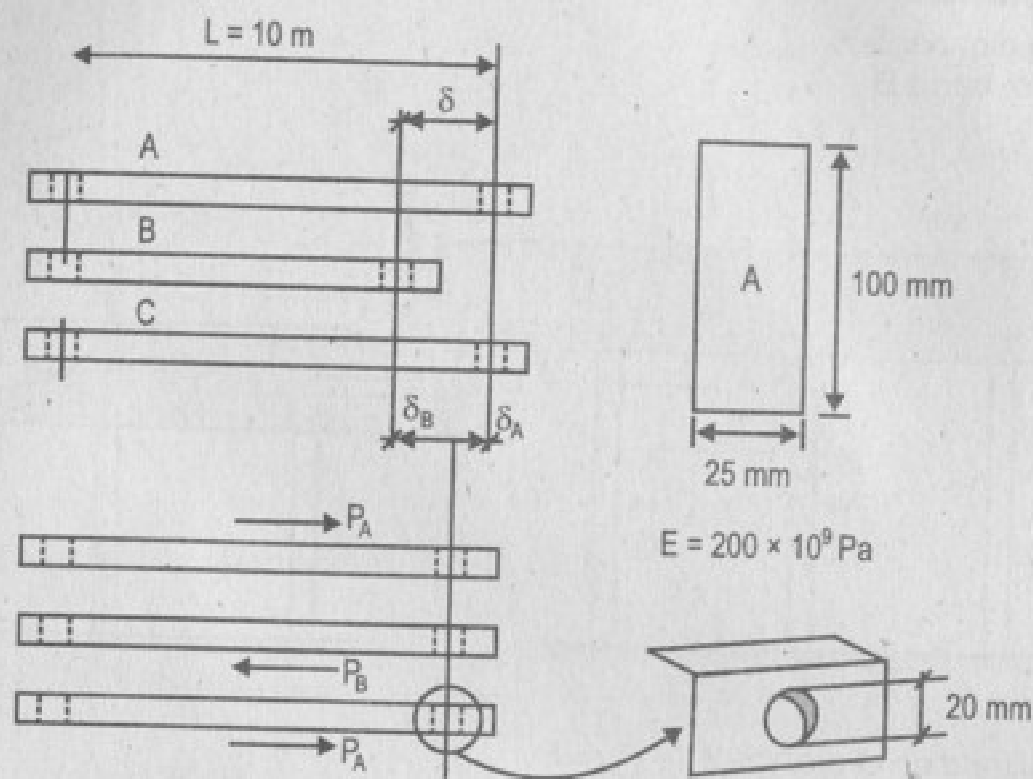
$$\frac{\sigma_A}{70 \times 10^6} - \frac{\sigma_B}{200 \times 10^6} = \frac{0{,}1}{250} \qquad \text{...(2)}$$

De (1) y (2):

$$\boxed{\sigma_A = 56{,}39 \times 10^6\ Pa} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_B = 161{,}03 \times 10^6\ Pa}$$

239. Tres barras de acero, de secciones iguales de 100 × 25 mm, han de unirse mediante pasadores rígidos de 20 mm de diámetro que las atravesarán por unos orificios realizados en los extremos de las barras. La distancia entre centros de orificios es de 10 m en las dos barras laterales o exteriores, pero es 1,25 mm más corta en la barra central. Determinar el esfuerzo cortante en los pasadores despreciando la deformación local en los orificios.

Resolución:



Equilibrio en el eje Y: $2P_A = P_B \Rightarrow 2\frac{P_A}{A} = \frac{P_B}{A} \Rightarrow 2\sigma_A = \sigma_B$ ...(1)

Compatibilidad de deformaciones:

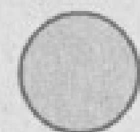
Del gráfico: $\delta_A + \delta_B = \delta \Rightarrow \sigma_A\frac{L}{E} + \sigma_B\frac{L}{E} = \delta$ ...(2)

De (1) y (2):

$$\sigma_A = \frac{E\delta}{3L} = 8{,}33 \times 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \sigma_B = \frac{2E\delta}{3L} = 16{,}67 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$A = 25 \times 100 = 2500 \text{ mm}^2 \Rightarrow P_A = \sigma_A A \Rightarrow P_A = 20{,}83 \text{ kN}$$

Área del orificio:



$$A_O = \frac{\pi}{4}D^2$$

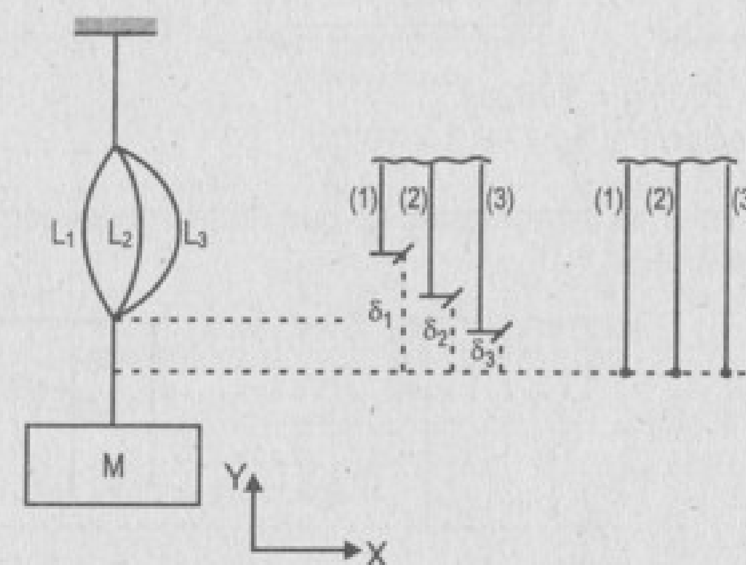


$$A_O = 314{,}16 \text{ mm}^2$$

$$\therefore \tau = \frac{P_A}{A_O} = \frac{20{,}83\times10^3 \text{ N}}{314{,}16\times10^{-6}\text{m}^2} \quad \therefore \boxed{\tau = 66{,}2 \text{ MPa}}$$

240. Como indica la figura, tres alambres de acero de 30 mm² de sección cada uno soportan una carga de masa M. Las longitudes iniciales de los alambres son 19,994 m, 19,997 m y 20,000 m. (a) ¿Cuál es el esfuerzo en el alambre más largo, si M = 600 kg? (b) Si M = 200 kg, determinar el esfuerzo en el alambre más corto. Emplee E = 200 GN/m².

Resolución:



Equilibrio en el eje Y : $P_1 + P_2 + P_3 = M$

Como: $\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = M\left(\frac{L}{EA}\right)$ ...(1)

Compatibilidad de deformaciones:

$\delta_1 = \delta_3 + (L_3 - L_1)$ ...(2)

$\delta_2 = \delta_3 + (L_3 - L_2)$ ...(3)

De (1), (2) y (3): $\delta_3 = \dfrac{\frac{ML}{EA} - [(L_3 - L_1) + (L_2 - L_1)]}{3}$ ...(*)

i. Para: M = 600 kg = 600 × 9,81 N = 5886 N

$$\delta_3 = \frac{\frac{5{,}886\times10^3\text{N}\times20 \text{ m}}{(200\times10^9 \text{ N/m}^2)\times30\times10^{-6}\text{m}^2} - (6\times10^{-3} + 3\times10^{-3})}{3}$$

$\therefore \delta_3 = 9{,}54 \times 10^{-3} \text{ m} = 9{,}54 \text{ mm}$

Reemplazando en las ecuaciones (2) y (3):
$\delta_1 = 6,54$ mm
$\delta_2 = 3,54$ mm > 0

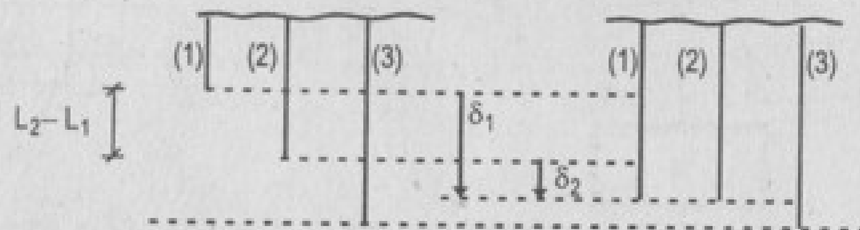
Como: $\sigma = \delta \dfrac{E}{L}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_1 = 95,4 \text{ MPa}}$

$\boxed{\sigma_2 = 65,4 \text{ MPa}}$

$\boxed{\sigma_3 = 35,4 \text{ MPa}}$

ii. Para: M = 200 kg = 1962 N
En la ecuación (*): $\delta_3 = -8,2 \times 10^{-4}$ m

Pero este valor es incoherente. Lo que realmente sucede es que el cable (3) no se deforma: $\delta_3 = 0$



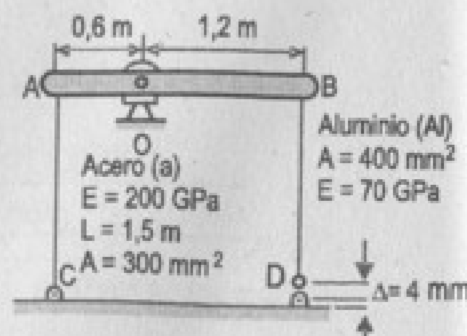
Del gráfico: $d_1 = (L_2 - L_1) + d_2$ ...(1)
Por equilibrio: $P_1 + P_2 = M$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M}{A} \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = \frac{ML}{EA} \quad ...(2)$$

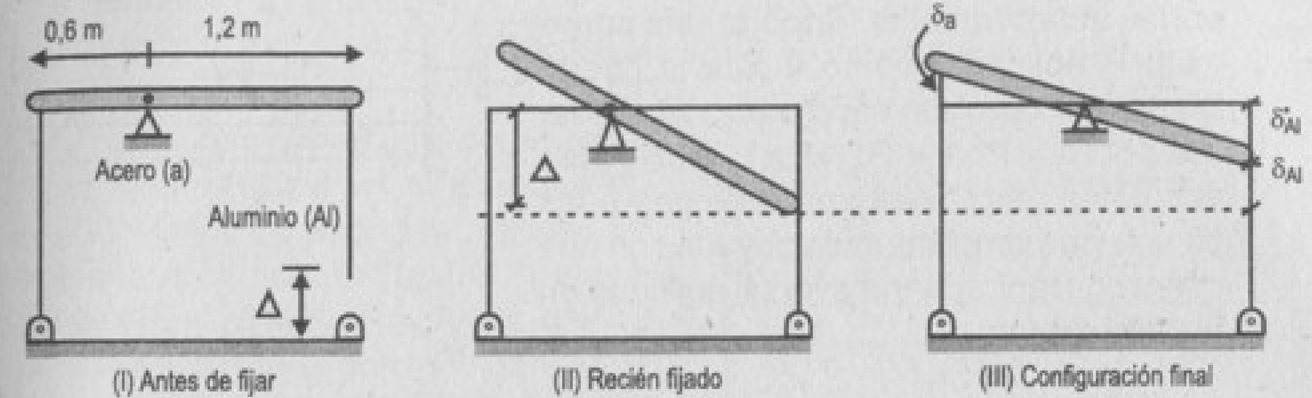
Con: $(L_2 - L_1) = 3 \times 10^{-3}$m ; M = 1962 N

Se resuelven (1) y (2):
$\delta_1 = 4,77$ mm $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_1 = \delta_1 \text{ (E/L)} = 47,7 \times 10^6 \text{ Pa}}$
$\delta_2 = 1,77$ mm $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_2 = \delta_2 \text{ (E/L)} = 17,7 \times 10^6 \text{ Pa}}$

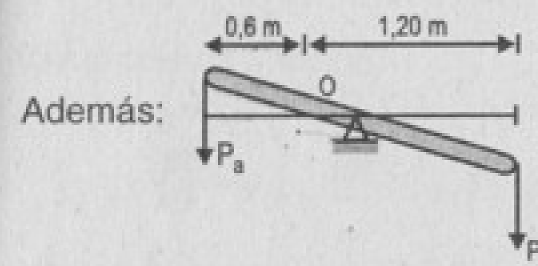
241. El conjunto de la figura consiste de una barra rígida AB, de masa despreciable, articulada en O mediante un perro y fija a las varillas de aluminio y de acero. En la configuración mostrada, la barra AE está en posición horizontal y hay un claro Δ = 4 mm entre la punta inferior de la varilla de aluminio y su articulación en D. Calcule el esfuerzo en la varilla de acero cuando la punta inferior de la varilla de aluminio se articula en el apoyo D.



Resolución:



De (III):



$$\frac{\delta_a}{0,6} = \frac{\delta^*_{Al}}{1,2} \Rightarrow \delta^*_{Al} = 2\delta_a \quad ...(1)$$

Pero: $\delta^*_{Al} + \delta_{Al} = \Delta \Rightarrow \delta^*_{Al} = \Delta - \delta_{Al}$ ...(2)

(2) en (1): $2\delta_a + \delta_{Al} = \Delta$; $\delta = \dfrac{\sigma L}{E} \Rightarrow \dfrac{\sigma_a}{E_a} + \dfrac{\sigma_{Al}}{2E_{Al}} = \dfrac{\Delta}{2L}$ ...(*)

Además:

0,6 m 1,20 m O P_a P_{Al}

$$\Sigma M_O = 0 \; \oplus \Rightarrow 1,20 \times P_{Al} - 0,6\, P_a = 0$$

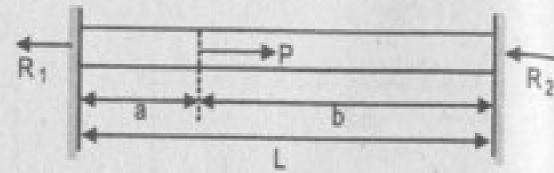
$$\Rightarrow 2P_{Al} = P_a \Rightarrow \frac{2P_{Al}}{A_aA_{Al}} = \frac{P_a}{A_aA_{Al}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sigma_{Al}}{A_a} = \frac{\sigma_a}{A_{Al}} \Rightarrow \frac{\sigma_a}{A_{Al}} - \frac{2\sigma_{Al}}{A_a} = 0 \quad ...(**)$$

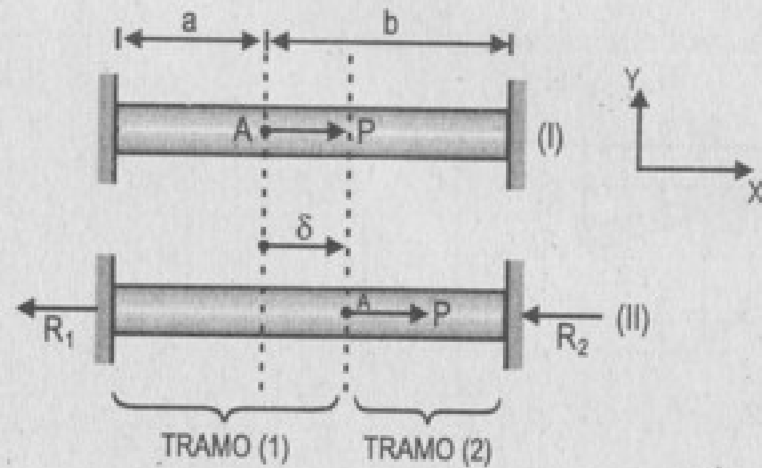
Con: $\Delta = 4 \times 10^{-3}$ m
$A_a = 300 \times 10^{-6}$ m² ; $E_a = 200 \times 10^9$ Pa
$A_{Al} = 400 \times 10^{-6}$ m² ; $E_{Al} = 70 \times 10^9$ Pa

Se resuelven: (*) y (**): σ_a = 173,6 MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{Al} = 65,1 \text{ MPa}}$

242. Una varilla homogénea de sección constante se empotra en sus extremos en soportes indeformables. Soporta una carga axial P aplicada, como indica la figura. Demostrar que las reacciones vienen dadas por $R_1 = Pb/L$ y $R_2 = Pa/L$. Obsérvese que estas reacciones son análogas a las de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada transversal aplicada en el mismo punto.



Resolución:



De (II):

TRAMO (1): $\Rightarrow \begin{cases} \delta = \dfrac{PL}{EA} \\ \delta = \dfrac{R_1 a}{EA} \end{cases}$ ...(1)

TRAMO (2): $\Rightarrow \delta = \dfrac{R_2 b}{EA}$ ...(2)

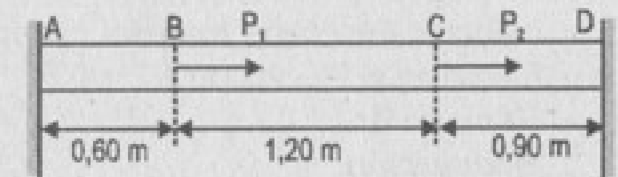
$(1) = (2) \Rightarrow \dfrac{R_1}{b} = \dfrac{R_2}{a}$ ...(*)

Equilibrio es el eje $X : R_1 + R_2 = P$ ...(**)

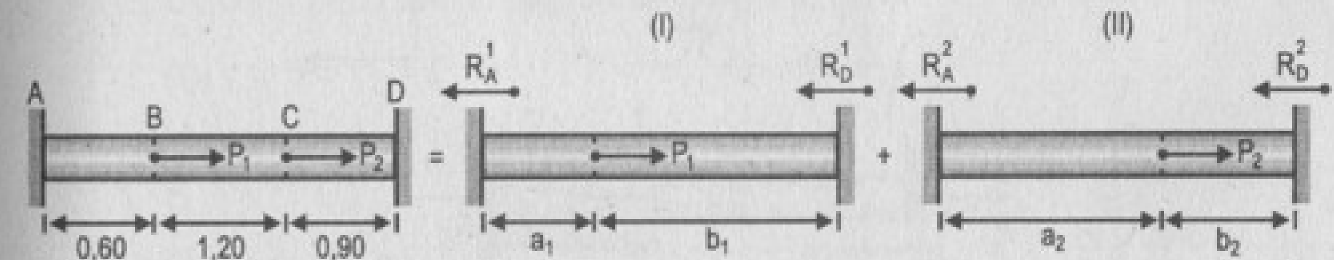
De (*) y (**):

$R_1 = Pb / L$ $\boxed{R_2 = Pa / L}$

243. Una barra homogénea de sección constante igual a 500 mm² se empotra en sus extremos en soportes rígidos. Se somete a la acción de las fuerzas axiales $P_1 = 25$ kN y $P_2 = 50$ kN, aplicadas como indica la figura. Determinar el esfuerzo en el segmento BC. *Indicación:* aprovechar el resultado del problema anterior y emplear el método de superposición.



Resolución:



Del problema anterior:

(I): $R_A^1 = P_1 b_1\ 1/L$; $R_D^1 = P_1 a_1/L$

(II): $R_A^2 = P_2 b_2/L$; $R_D^2 = P_2 a_2/L$

Por lo que:

$$R_A = R_A^1 + R_A^2 \Rightarrow R_A = \frac{1}{L}(P_1 b_1 + P_2 b_2) \quad ; \quad R_D = R_D^1 + R_D^2 \Rightarrow R_D = \frac{1}{L}(P_1 a_1 + P_2 a_2)$$

Reemplazando valores:

A, B 25 kN, P_{BC}, R_A

$R_A = 36,11$ kN

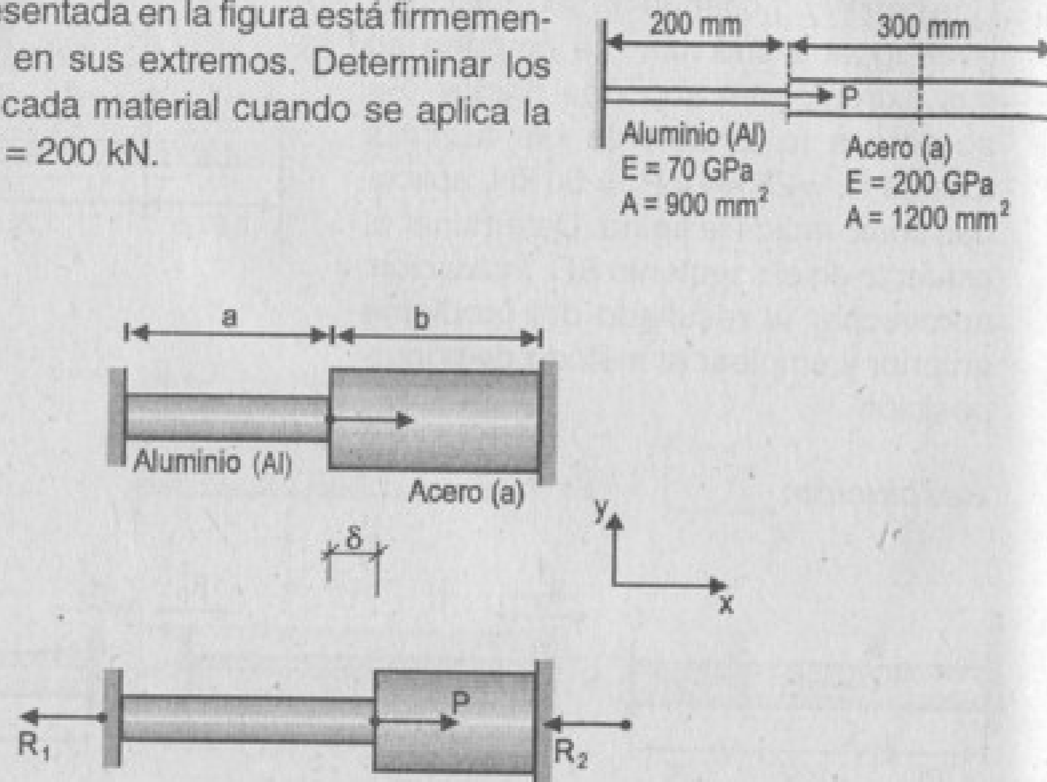
$R_D = 38,89$ kN

$P_{BC} + 25\ \text{kN} = R_A \ \Rightarrow\ P_{BC} = 11{,}11\ \text{kN}$

$A = 500\ \text{mm}^2 \ \Rightarrow\ \sigma_{BC} = \dfrac{P_{BC}}{A} \ \therefore\ \boxed{\sigma_{BC} = 22{,}22\ \text{MPa}}$

244. La barra representada en la figura está firmemente empotrada en sus extremos. Determinar los esfuerzos en cada material cuando se aplica la fuerza axial P = 200 kN.

Resolución:



Compatibilidad de deformación: $d = d_{Al} = d_a$

$$\frac{R_1 a}{E_{Al}A_{Al}} = \frac{R_2 b}{E_a A_a} \ \Rightarrow\ \frac{R_1\times 0{,}20\text{m}}{(70\times10^9\text{Pa})(900)} = \frac{R_2\times 0{,}30\text{m}}{(200\times10^9\text{Pa})(1200)}$$

$\therefore\ R_1 = 0{,}394\ R_2$ ...(1)

Equilibrio en el eje x: $R_1 + R_2 = P$ ...(2)

De (1) y (2):

$R_1 = 56{,}50\ \text{kN} \ \wedge\ R_2 = 143{,}50\ \text{kN}$

$\sigma_{Al} = R_1/A_{Al} \ \Rightarrow\ \boxed{\sigma_{Al} = 62{,}78\ \text{MPa}}$

$\sigma_a = R_2/A_a \ \Rightarrow\ \boxed{\sigma_a = 119{,}58\ \text{MPa}}$

245. En el problema anterior, ¿qué fuerza máxima P puede aplicarse sin que se sobrepasen los esfuerzos admisibles de 70 MPa en el aluminio y de 120 MPa en el acero? ¿Se puede aplicar una fuerza mayor si se modifica la longitud de la varilla de aluminio permaneciendo constante la de acero? En caso afirmativo, determinar la nueva longitud de aquella.

Resolución:

i. Fuerza máxima P:

Las deformaciones se mantienen iguales: $\delta_{Al} = \delta_a$

$$\Rightarrow\ \frac{\sigma_{Al}a}{E_{Al}} = \frac{\sigma_a b}{E_a} \ \Rightarrow\ \sigma_{Al} = 0{,}525\sigma_a \quad ...(1)$$

En (1): cuando: $\sigma_{Al} = \sigma_{Al}^{adm.} = 70\ \text{MPa}$

$$\sigma_a = \sigma_{Al}^{adm.} / 0{,}525 = 133{,}3\ \text{MPa} > \sigma_a^{adm.}$$

Esto quiere decir que el primero que alcanzará el $\sigma^{adm.}$ será "el acero":

$\therefore\ \sigma_{Al} = 0{,}525\ \sigma_a = 0{,}525\ \sigma_a^{adm.} \Rightarrow \sigma_{Al} = 63\ \text{MPa}$

$\sigma_a = 120\ \text{MPa}$

Además: $R_1 + R_2 = P \Rightarrow \dfrac{R_1}{A_aA_{Al}} + \dfrac{R_2}{A_aA_{Al}} = \dfrac{P}{A_aA_{Al}} \ \Rightarrow\ \dfrac{\sigma_{Al}}{A_a} + \dfrac{\sigma_a}{A_{Al}} = \dfrac{P}{A_aA_{Al}}$

Reemplazando valores: $\boxed{P = 200{,}7\ \text{kN}}$

ii. Fuerza mayor, variando "a":

$$\delta_{Al} = \delta_a \ \Rightarrow\ \frac{\sigma_{Al}a}{E_{Al}} = \frac{\sigma_a b}{E_a} \ \Rightarrow\ a = \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{Al}}\right)\left(\frac{E_{Al}}{E_a}\right)b \quad ...(1)$$

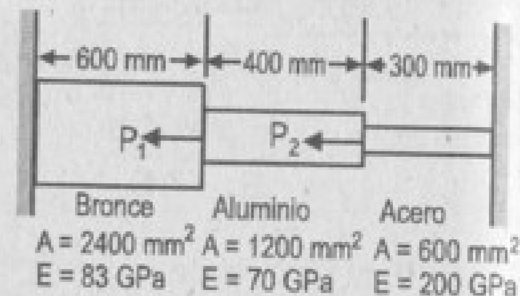
$$\text{Además: } \frac{P}{A_aA_{Al}} = \frac{\sigma_{Al}}{A_a} + \frac{\sigma_a}{A_{Al}} \quad ...(2)$$

"P" será máximo cuando: $\begin{cases}\sigma_{Al} = \sigma_{Al}^{adm.} = 70\ \text{MPa}\\ \sigma_a = \sigma_a^{adm.} = 120\ \text{MPa}\end{cases}$

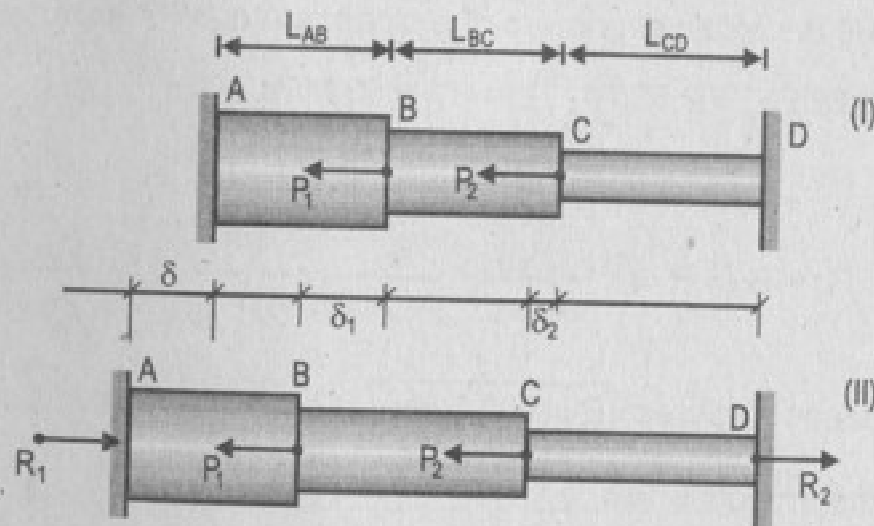
Reemplazando en (2): $\boxed{P = 207{,}0 \text{ kN}}$

Esto ocurre cuando: $a = \left(\dfrac{120 \text{ MPa}}{70 \text{ MPa}}\right)\left(\dfrac{70\times10^9}{200\times10^9}\right)\times 0{,}30 \quad \therefore \quad \boxed{a = 0{,}18 \text{ m}}$

246. Una varilla está formada de tres partes distintas, como indica la figura, y soporta unas fuerzas axiales $P_1 = 120$ kN y $P_2 = 50$ kN. Determinar los esfuerzos en cada material si los extremos están firmemente empotrados en unos muros rígidos e indeformables.



Resolución:



De (II) se observa:

$\delta_{AB} = \delta - \delta_1$

$\delta_{BC} = \delta_1 - \delta_2$

$\delta_{CD} = \delta_2$

$\therefore \quad \delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$ ...(1)

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{AB}L_{AB}}{E_{AB}} + \frac{\sigma_{BC}L_{BC}}{E_{BC}} + \frac{\sigma_{CD}L_{CD}}{E_{CD}} = \delta \quad ...(2)$$

Pero:

P_{AB}, P_1, P_2, R_2 $\Rightarrow$ $P_{AB} = R_2 - (P_1 + P_2)$

P_{BC}, P_2, R_2 $\Rightarrow$ $P_{BC} = R_2 - P_2$

P_{CD}, R_2 $\Rightarrow$ $P_{CD} = R_2$

Reemplazando en (2): $\dfrac{[R_2 - (P_1 + P_2)]L_{AB}}{E_{AB}A_{AB}} + \dfrac{(R_2 - P_2)L_{BC}}{E_{BC}A_{BC}} + \dfrac{R_2 L_{CD}}{E_{CD}A_{CD}} = \delta$

Ordenando:

$$R_2\left(\frac{L_{AB}}{E_{AB}A_{AB}} + \frac{L_{BC}}{E_{BC}A_{BC}} + \frac{L_{CD}}{E_{CD}A_{CD}}\right) = \left(\delta + \frac{(P_1 + P_2)L_{AB}}{E_{AB}A_{AB}} + \frac{P_2 L_{BC}}{E_{BC}A_{BC}}\right) \quad ...(*)$$

Para este problema: $\delta = 0$

Al reemplazar valores, se tiene: $R_2 = 73{,}01$ kN

Además: $R_1 + R_2 = P_1 + P_2 \Rightarrow R = 96{,}99$ kN

$\Rightarrow \quad P_{AB} = R_2 - (P_1 + P_2) = -96{,}99$ kN (Compresión)

$P_{BC} = R_2 - P_2 = +23{,}01$ kN (Tracción)

$P_{CD} = R_2 = +73{,}01$ kN (Tracción)

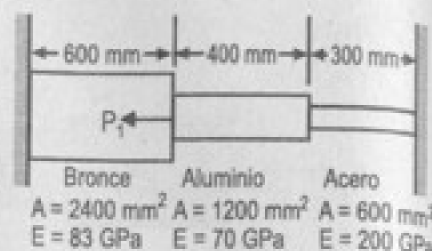
Dividiendo a cada fuerza por su respectiva área:

$\boxed{\sigma_{AB} = 40{,}41 \text{ MPa}}$ (Compresión)

$\boxed{\sigma_{BC} = 19{,}18 \text{ MPa}}$ (Tracción)

$\boxed{\sigma_{CD} = 121{,}70 \text{ MPa}}$ (Tracción)

247. Resolver el problema anterior si los muros ceden, separándose 0,60 mm, al aplicar las fuerzas dadas.



Resolución:

Reemplazando en la ecuación (*) del problema anterior: $R_2 = 131{,}41$ kN

Como: $R_1 + R_2 = P_1 + P_2 \Rightarrow R_1 = 38{,}59$ kN (compresión)

También:

$P_{AB} = R_2 - (P_1 + P_2) = -38{,}59$ kN (Compresión)

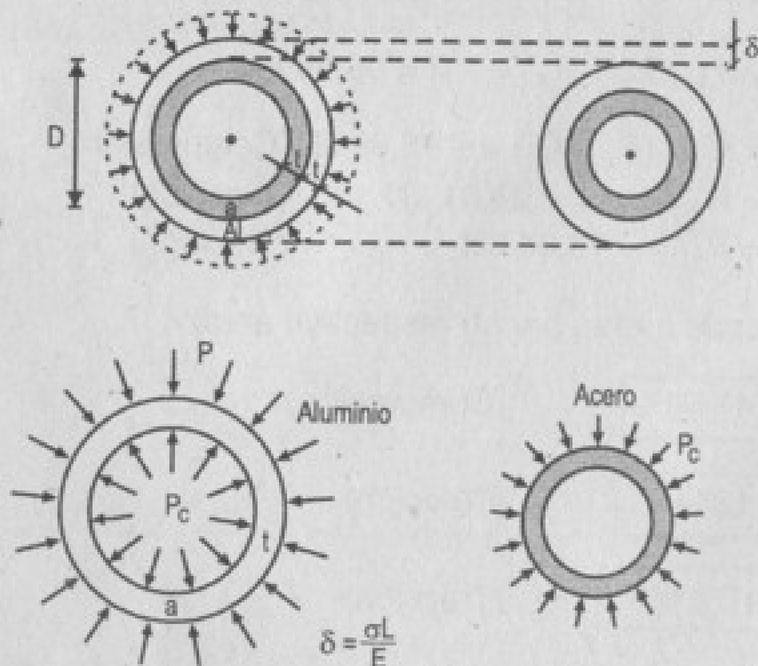
$P_{BC} = R_2 - P_2 = 81{,}41$ kN (Tracción)

$P_{CD} = R_2 = 131{,}41$ kN (Tracción)

$\boxed{\sigma_{AB} = -16{,}08 \text{ MPa}}$ $\boxed{\sigma_{BC} = +67{,}84 \text{ MPa}}$ $\boxed{\sigma_{CD} = 219{,}02 \text{ MPa}}$

248. Un tubo de acero de 2,5 mm de espesor ajusta exactamente dentro de otro de aluminio del mismo espesor. Si el diámetro de contacto es de 100 mm, determinar la presión de contacto y los esfuerzos circunferenciales si se somete el tubo de aluminio a una presión exterior de P = 4 MN/m². $E_a = 200 \times 10^9$ N/m², y $E_{Al} = 70 \times 10^9$ N/m².

Resolución:

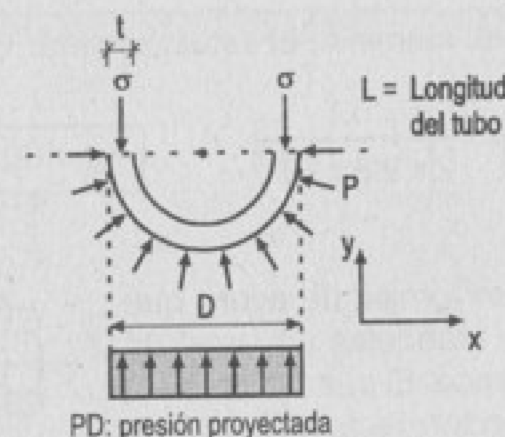


$$\delta = \frac{(P - P_c)}{E_{Al}} D \quad ... (1) \quad ; \quad \delta = \frac{P_c}{E_a} D \quad ... (2)$$

$$(1) = (2) : (P - P_c)\frac{D}{E_{Al}} = \frac{P_c}{E_a} D$$

$$P_c = \left(\frac{E_a}{E_a + E_{Al}}\right) P = \left(\frac{200}{200 + 70}\right) \times 4 \text{ MPa} \quad \therefore \quad \boxed{P_c = 2{,}96 \text{ MPa}}$$

Además:



Por equilibrio de fuerzas en el eje y:

$$P.D.L = 2\sigma \times t \times L \Rightarrow \sigma = \frac{PD}{2t}$$

i. Aluminio: $\sigma_{Al} = (P - P_c) \times \frac{D}{2t} = \frac{(4 - 2{,}96) \times 10^6 \times 0{,}1}{2 \times 2{,}5 \times 10^{-3}} \quad \therefore \quad \boxed{\sigma_{Al} = 20{,}8 \text{ MPa}}$

ii. Acero: $\sigma_a = P_c \frac{D}{2t} = \frac{2{,}96 \times 10^6 \times 0{,}1}{2 \times 2{,}5 \times 10^{-3}} \quad \therefore \quad \boxed{\sigma_a = 59{,}2 \text{ MPa}}$

249. En el problema anterior determinar la presión de contacto y los esfuerzos circunferenciales en el caso que inicialmente exista una holgura radial de una centésima de milímetro entre ambos tubos, antes de aplicar la presión de 4 MN/m² en el tubo de aluminio.

Resolución:

$$\delta_{Al} = \delta_a + 2\Delta$$

$$(P - P_c)\frac{D}{E_{Al}} = \frac{P_c D}{E_a} + 2\Delta \Rightarrow P_c = \frac{\left(\frac{PD}{E_{Al}}\right) - 2\Delta}{D\left(\frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_{Al}}\right)}$$

Reemplazando valores: $P = 4 \times 10^6$ Pa
$D = 0{,}1$ m ; $\Delta = 10^{-5}$ m
$E_a = 200 \times 10^9$ Pa
$E_{Al} = 70 \times 10^9$ Pa

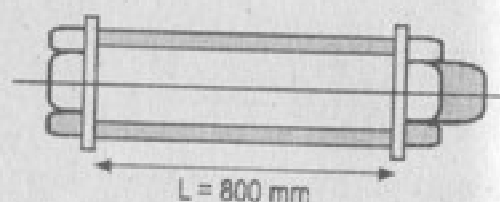
$P_c = -0{,}22 \times 10^6$ Pa

Esto no es lógico: $\therefore\ P_c = 0$
Y no se generan esfuerzos en el tubo de acero.

En cambio en el tubo de aluminio, el esfuerzo será:

$$\sigma_{Al} = \frac{PD}{2t} = 4\ \text{MPa} \times \frac{0{,}1}{2 \times 2{,}5 \times 10^{-3}} \quad \therefore \boxed{\sigma_{Al} = 80\ \text{MPa}}$$

250. La figura representa un tornillo de acero que sujeta, mediante unas arandelas y tuerca, un tubo o manguito de bronce. El paso del tornillo es de 0,80 mm, la sección recta del tubo de bronce es de 900 mm² y la del tornillo de acero es de 450 mm². Se aprieta la tuerca hasta conseguir en el manguito de bronce un esfuerzo de compresión de 30 MN/m². Determinar el esfuerzo si a continuación se le da a la tuerca una vuelta más. ¿Cuántas vueltas habrá que dar ahora en sentido contrario para reducir tal esfuerzo a cero?



Resolución:

Sabemos que: $\delta = \dfrac{FL}{E} \Rightarrow \delta = \dfrac{30\ \frac{MN}{m^2} \times 800\ mm}{83\ GPa} = 0{,}29$ mm

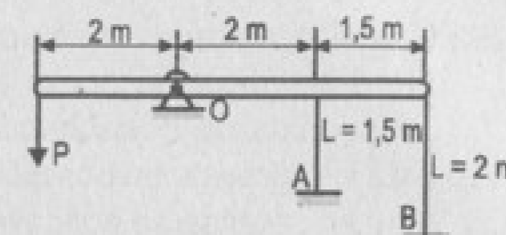
Si le damos una vuelta:

$$\delta = 0{,}29 + 0{,}8 = 1{,}09\ mm$$

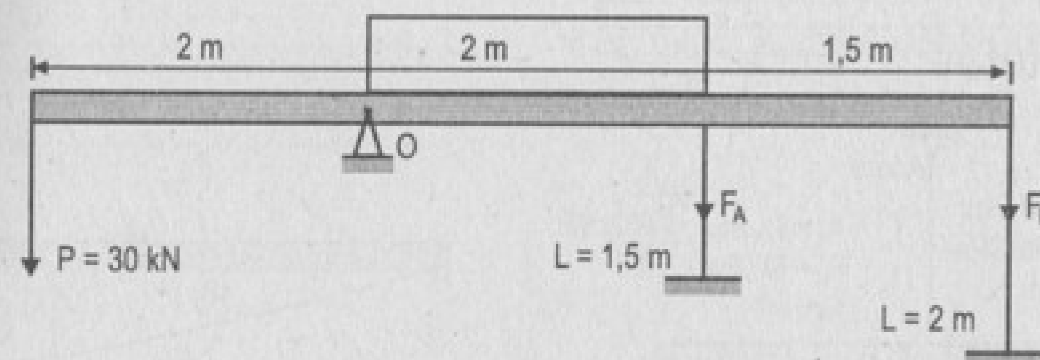
$$\sigma = \frac{\delta E}{L} \Rightarrow \sigma = \frac{1{,}09 \times 83\ GPa}{0{,}8\ mm} \Rightarrow \boxed{\sigma = 113{,}1\ MPa}$$

El número de vueltas necesario para que $\sigma = 0$ es: $\dfrac{1{,}09}{0{,}8} = \boxed{1{,}37\ \text{vueltas}}$

251. Según se muestra en la figura, una viga rígida de masa despreciable está articulada en O y sujeta mediante dos varillas de diferentes longitudes; pero por lo demás, idénticas. Determine la carga en cada varilla si P = 30 kN.

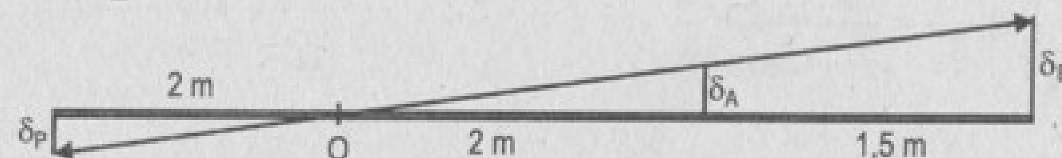


Resolución:



$$\Sigma M_0 = 0$$

$$2F_A + \frac{7}{2}F_B = 60 \quad ...(\alpha)$$



De la semejanza de Δs:

$$\delta_P = \delta_A \ \wedge\ \frac{\delta_P}{\delta_B} = \frac{4}{7}$$

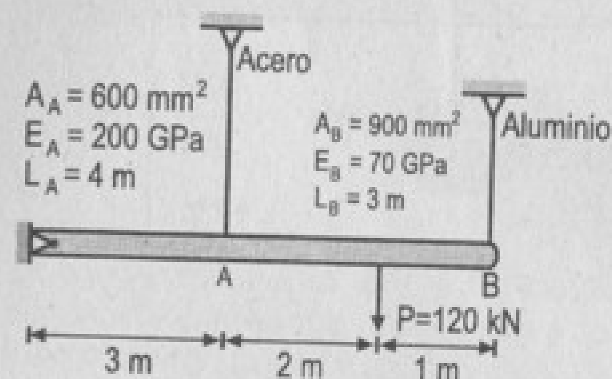
$$\left.\begin{aligned} \delta_A &= \frac{F_A \times 1{,}5}{E_A} \\ \delta_B &= \frac{F_B \times 2}{E_A} \end{aligned}\right\} \frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{F_A}{F_B} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{16}{21}$$

En (α):

$$F_A + \frac{7}{4}F_B = 30 \Rightarrow \frac{16}{21}F_B + \frac{7}{4}F_B = 30 \quad \therefore \boxed{F_B = 11{,}94\ kN} \quad \boxed{F_A = 9{,}10\ kN}$$

252. Una viga rígida de masa despreciable está articulada en un extremo y suspendida de dos varillas. La viga está inicialmente en posición horizontal y en seguida se aplica la carga P. Calcule el movimiento vertical de la carga si P = 120 kN.

Resolución:



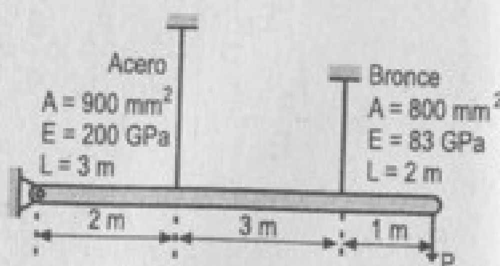
$$\delta_P = \frac{\delta_A + 2\delta_B}{3}$$

$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{2}{3}\ ;\ \frac{E_A}{E_B} = \frac{20}{7}\ ;\ \frac{L_A}{L_B} = \frac{4}{3}$$

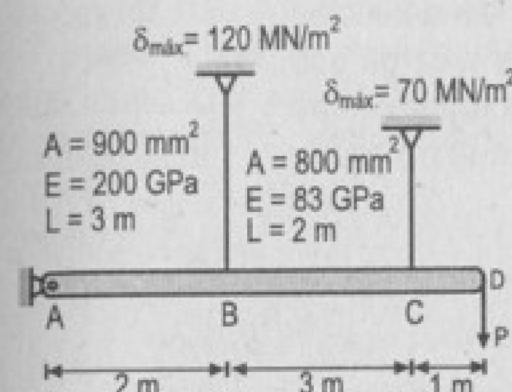
$$\delta_P = \left(\frac{7PL_B}{30\ E_BA_B} + \frac{40PL_B}{30\ E_BA_B}\right)\frac{1}{3} \Rightarrow \delta_P = \frac{47PL_B}{90\ E_BA_B} = \frac{47\times 120\ kN\times 3\ m}{90\times 70\ GPa\times 900\ mm^2}$$

$$\delta_P = 2{,}984\times 10^{-3}\frac{kN.m^3}{GN.mm^2} \Rightarrow \boxed{\delta_P = 2{,}984\ mm}$$

253. Una barra rígida, de masa despreciable, está articulada en un extremo y suspendida de una varilla de acero y una de bronce, según se muestra en la figura. ¿Cuánto vale la carga máxima P que puede aplicarse sin exceder un esfuerzo en el acero de 120 MN/m² ni uno en el bronce de 70 MN/m²?



Resolución:



$\sigma = \frac{P}{A}\ ;\ \delta = \frac{PL}{AE}$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 2F_B + 5F_C = 6P \qquad ...(1)$$

$$\delta_B = \frac{F_B\times 3\ m}{(900\ mm^2).(200\ GPa)}$$

$$\delta_C = \frac{F_C\times 2\ m}{(800\ mm^2).(83\ GPa)}$$

$$\sigma_{máx\ B} = 120\ MN/m^2 = 120\ MPa = \frac{F_{B\ máx.}}{A}$$

$$F_{B\ máx.} = 120\times\frac{10^6\ N}{10^6\ mm^2}\times 900\ mm^2 \Rightarrow F_{B\ máx.} = 108\ kN$$

$$\sigma_{máx\ C} = 70\ MPa = \frac{F_{C\ máx.}}{A}$$

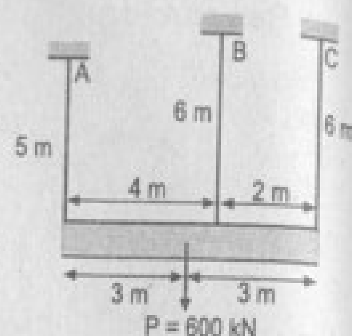
$$F_{C\ máx.} = 70\times\frac{10^6\ N}{10^6 mm^2}\times 800\ mm^2 \Rightarrow F_{C\ máx.} = 56\ kN$$

$$\frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{F_B\times 3\times 800\times 83}{300\times 200\times F_C\times 2} \Rightarrow \frac{F_B}{F_C} = \frac{120}{163}$$

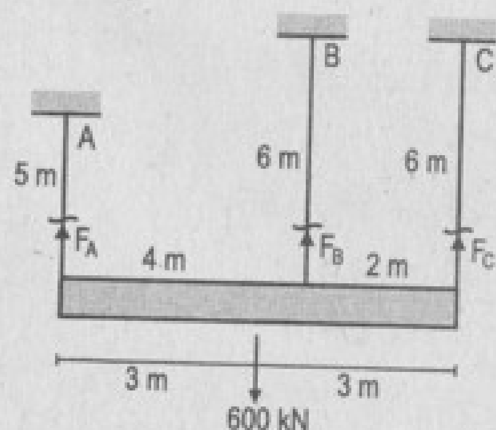
$$F_B = \frac{120}{163}\times 56 = 41{,}22$$

En (1): $6P = 2\times 41{,}22 + 5\times 56 \Rightarrow \boxed{P_{máx.} = 60{,}4\ kN}$

254. La figura representa la sección esquemática de un balcón. La carga total, uniformemente repartida es de 600 kN y está soportada por tres varillas de la misma sección y el mismo material. Determinar la parte de la carga que soporta cada varilla. Se supone al suelo colgante como perfectamente rígido, y téngase en cuenta que no queda necesariamente horizontal.

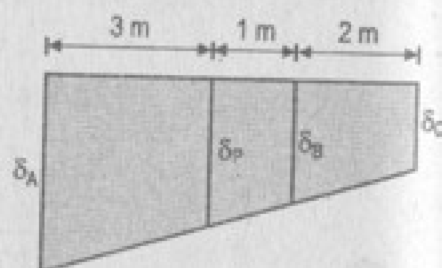


Resolución:



$F_A + F_B + F_C = 600$ kN ...(1)

$3F_A = F_B + 3F_C$



$\delta_P = \dfrac{\delta_A + \delta_C}{2} \Rightarrow \delta_B = \dfrac{\delta_A + 2\delta_C}{3}$

$3(6F_B) = 5F_A + 2 \times (6F_C)$

$18F_B = 5F_A + 12F_C$ ...(α)

$12F_A = 4F_B + 12F_C$ ...(β)

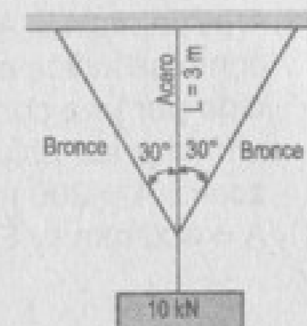
(α) − (β): $22F_B = 17F_A$

En (1):

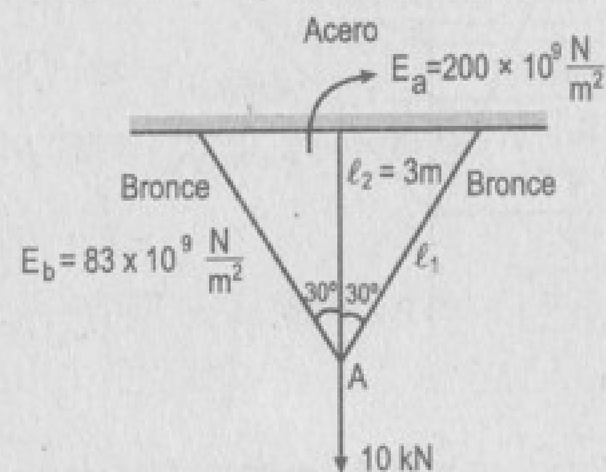
$$\frac{22}{17}F_B + F_B + \frac{22}{17}F_B - \frac{F_B}{3} = 600 \Rightarrow \left(\frac{44}{17} + \frac{2}{3}\right).F_B = 600$$

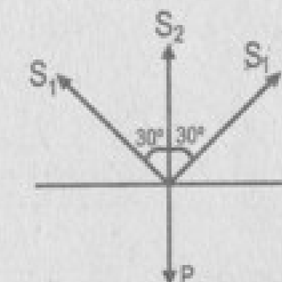
$\boxed{F_B = 184{,}3 \text{ kN}}$; $\boxed{F_A = 238{,}5 \text{ kN}}$ y $\boxed{F_C = 177{,}06 \text{ kN}}$

255. Tres varillas, situadas en un mismo plano, soportan conjuntamente una fuerza de 10 kN como se indica en la figura. Suponiendo que antes de aplicar la carga ninguna de las tres estaba ni floja ni tensa, determinar las tensiones que aparecen en cada una. Para el acero, $E_a = 200 \times 10^9$ N/m², y para el bronce, $E_b = 83 \times 10^9$ N/m².



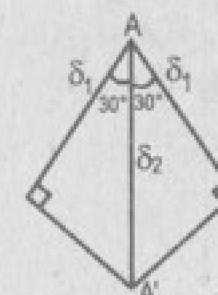
Resolución:





$P = S_2 + 2S_1.\cos 30°$

$P = S_2 + \sqrt{3}\,S_1$



$\cos 30° = \dfrac{\delta_1}{\delta_A} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{S_1.\ell_1}{E_1.A_1} \times \dfrac{E_2.A_2}{S_2.\ell_2}$

$\delta_A = \dfrac{S_2.\ell_2}{E_2.A_2}$

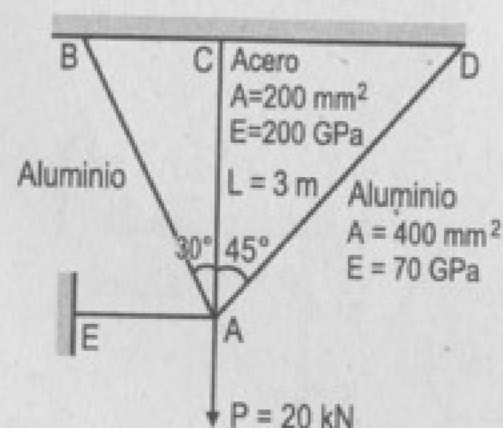
$\delta_1 = \dfrac{S_1.\ell_1}{E_1.A_1}$; $\ell_2 = \ell_1.\cos 30°$

$\Rightarrow S_2 = \dfrac{E_2}{E_1}.\,S_1.\sec^2 30°$

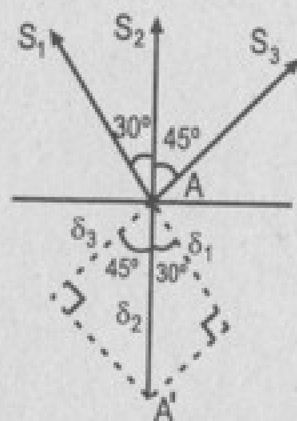
$P = S_1.\dfrac{E_2}{E_1}.\sec^2 30° + \sqrt{3}\,S_1 \Rightarrow S_1 = P\left[\sqrt{3} + \dfrac{E_2}{E_1}.\dfrac{4}{3}\right]^{-1}$

$S_1 = 10 \text{ kN}\left(\sqrt{3} + \dfrac{200}{83} \times \dfrac{4}{3}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{S_1 = 2{,}02 \text{ kN}} \wedge \boxed{S_2 = 6{,}497 \text{ kN}}$

256. Tres barras AB, AC y AD se articulan en A para soportar juntas una carga P = 20 kN, como se indica en la figura. El desplazamiento horizontal del punto A está impedido por una corta varilla horizontal AE que se supone infinitamente rígida. Determinar los esfuerzos en cada barra y la fuerza total en AE. Para la barra de acero, A = 200 mm² y E = 200 GPa, y para cada una de las barras de aluminio, A = 400 mm² y E = 70 GPa.



Resolución:



$$\delta_3 = \delta_2 \text{sen}45°$$

$$\delta_2 = \sqrt{2}\delta_3$$

$$\delta_1 = \delta_2\, \text{sen}60°$$

$$\delta_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\delta_1$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{S_1\ell_1}{E_1.A_1} = \frac{S_1.\ell_2 \sec 30°}{E_1.A_1} \\ \delta_2 &= \frac{S_2\ell_2}{E_2.A_2} = \frac{S_2.\ell_2}{E_2.A_2} \\ \delta_3 &= \frac{S_3\ell_3}{E_3.A_3} = \frac{S_3.\sqrt{2}\ell_2}{E_1.A_1} \end{aligned}\right\} \quad \frac{S_1}{S_3} = \frac{3}{2};\ \frac{S_1}{S_2} = \frac{21}{20}$$

Por equilibrio:

$$\mathbf{\Sigma F_V = 0} \quad \Rightarrow \quad 20 = S_2 + S_1.\cos 30° + S_3.\cos 45°$$

Sabemos que: $S_1 = A_1 . \sigma_1$

$$20 = \frac{20}{21}S_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_1 + \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}S_1$$

$$S_1 = 8{,}73 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = 2182 \text{ N/cm}^2}$$

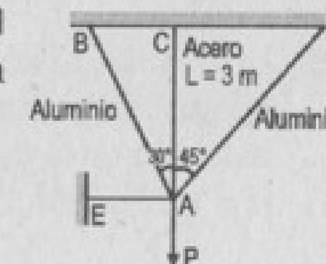
$$S_2 = 9{,}17 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_2 = 4585 \text{ N/cm}^2}$$

$$S_3 = 13{,}095 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_3 = 3275 \text{ N/cm}^2}$$

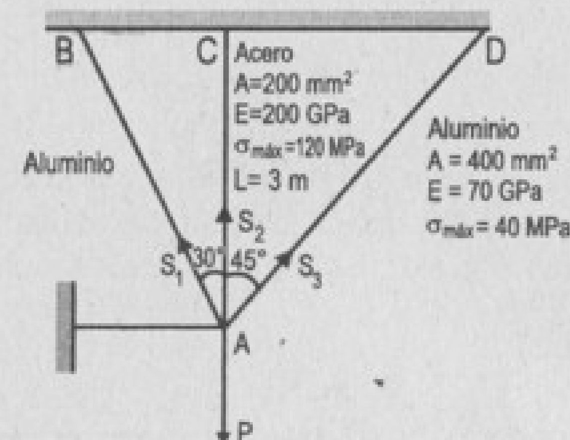
$$\mathbf{\Sigma F_H = 0}$$

$$S_{AE} + S_1.\text{sen}30° = S_3.\text{sen}45° \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{AE} = 4{,}89 \text{ kN}}$$

257. Con los mismos datos del problema anterior, calcular el máximo valor P si los esfuerzos admisibles son de 40 MPa en el aluminio y de 120 MPa en el acero.



Resolución:



$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{3}{2};\ \frac{S_1}{S_2} = \frac{21}{20}$$

$$\mathbf{\Sigma F_V = 0}$$

$$P = S_1.\cos 30° + S_2 + S_3.\cos 45°$$

$$\left.\begin{aligned} S_3 &= \frac{2}{3}.S_1 \\ S_2 &= \frac{20}{21}.S_1 \end{aligned}\right\} \quad P = S_1\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{20}{21}S_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}S_1 \qquad \Rightarrow \quad P = 2{,}29\,S_1$$

$$P = \frac{21}{20}.\frac{\sqrt{3}}{2}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{7}{10}S_2 + S_2 \quad \Rightarrow \quad P = 2{,}404S_2$$

$S_1 = \sigma_1.A_1 = 40\ \text{MPa} \times 400\ \text{mm}^2$

$= 40\ \text{Pa} \times 400\ \text{m}^2$

$S_1 = 16\ 000\ \text{N} = 16\ \text{kN}$

$S_2 = \sigma_2\ .\ A_2 = 120\ \text{MPa} \times 200\ \text{mm}^2$

$= 120 \times 200\ \text{Pa} \times \text{m}^2$

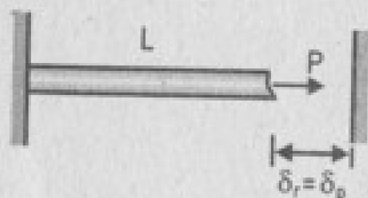
$S_2 = 24\ \text{kN}$

$P = 2{,}29 \times 16\ \text{kN} \Rightarrow \boxed{P = 36{,}64\ \text{kN}}$

258; 259; 260: problemas ilustrativos.

261. Una varilla de acero de 150 mm² de sección, está sujeta en sus extremos a dos puntos fijos, estando estirada con una fuerza total de 5000 N a 20°C. Calcular el esfuerzo en la varilla a –20°C. ¿A qué temperatura se anulará el esfuerzo? $\alpha = 11{,}7\ \mu\text{m}/(\text{m}\ .°\text{C})$ y $E = 200 \times 10^9\ \text{N/m}^2$.

Resolución:



$A = 150\ \text{mm}^2$
$P = 5000\ \text{N}$
$T = 20\ °\text{C}$

$\sigma\ 20\ °\text{C} = ?\ ;\quad \frac{P_f.L}{AE} = \frac{P_o.L}{AE} + \alpha L\Delta T$

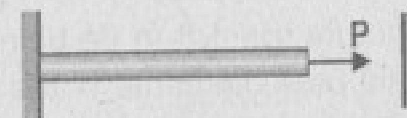
$$\sigma_f = \sigma_o + \alpha\Delta T.E \quad \Rightarrow \quad \sigma_f = \frac{5000\ \text{N}}{150\ \text{mm}^2} + 93{,}6\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_f = 127\ \text{MN/m}^2}$$

$$127\frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = 11{,}7\frac{\mu\text{m}}{\text{m}.°\text{C}} \times \Delta T \times 200 \times 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 54{,}2\ °\text{C}$$

$$T_f - (-20\ °\text{C}) = 54{,}2\ °\text{C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_f = 34{,}2\ °\text{C}}$$

262. Una varilla de acero anclada entre dos muros rígidos, queda sometida a una tensión de 5000 N a 20 °C. Si el esfuerzo admisible es de 130 MN/m², hallar el diámetro mínimo de la varilla para que no se sobrepase aquél al descender la temperatura hasta –20 °C. Suponga $\alpha = 11{,}7\ \mu\text{m}/(\text{m}\ .°\text{C})$ y E = 200 GPa.

Resolución:



$P = 5000\ \text{N};\quad A = \frac{\pi d^2}{4}$

$T_o = 20\ °\text{C}$
$\sigma_{adm} = 130\ \text{MN/m}^2$
$T_f = -20\ °\text{C}$
$\alpha = 11{,}7\ \mu\text{m/m°C}$
$E = 200\ \text{GPa}$

$$\frac{P_f L}{AE} = \frac{P_o L}{AE} + \alpha L\Delta T \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{adm.}}{E} = \frac{5000\ \text{N}}{AE} + 11{,}7\frac{\mu\text{m}}{\text{m°C}} \times 40\ °\text{C}$$

$$130\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = \frac{5000\ \text{N}}{A} + 93{,}6\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{5000}{36{,}4}\ \text{mm}^2 = \frac{\pi}{4}d^2$$

$\therefore\quad \boxed{d = 13{,}22\ \text{mm}}$

263. Los rieles de una vía férrea, de 10 m de longitud, se colocan a una temperatura de 15 °C con una holgura de 3 mm. ¿A qué temperatura quedarán a tope? Calcular el esfuerzo que adquirirían a esta temperatura si no existiera la holgura señalada. $\alpha = 11{,}7\ \mu\text{m}/(\text{m}\ .°\text{C})$ y E = 200 GPa.

Resolución:

L = 10 m ; T=15 °C ; Holgura = 3 mm

$\Delta L = \alpha\ L\Delta T$

$3 \times 10^{-3} = 11{,}7 \times 10^{-6} \times 10 \times \Delta T$

$\Delta T = \frac{300}{11{,}7}°\text{C} = 25{,}64\ °\text{C}$

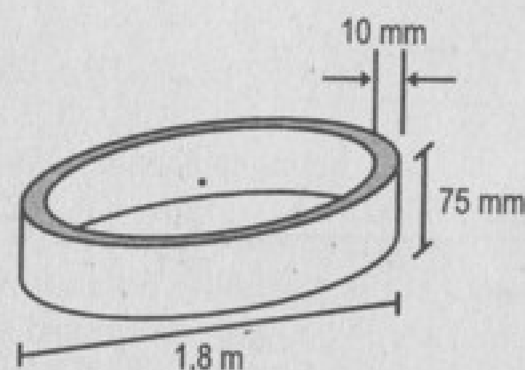
$\Delta T = T_f - T_o = 25{,}64\ °\text{C} \Rightarrow T_f = 40{,}64\ °\text{C}$

$$\delta_P = \delta_T \Rightarrow \frac{P_L}{AE} = \alpha L \Delta T \Rightarrow \frac{\sigma}{E} = \alpha \Delta T$$

$$\sigma = 11{,}7\ \frac{\mu m}{m°C} \times 25{,}64\ °C \times 200\ GPa \Rightarrow \boxed{\sigma = 60\ MPa}$$

264. Una llanta de acero de 10 mm de espesor y 75 mm de ancho se coloca sobre una rueda motriz de locomotora, de 1,8 m de diámetro, calentándola a 90 °C, temperatura a la cual encaja perfectamente sobre la rueda, que está a 20 °C. Determinar la presión de contacto entre ambas ruedas al descender la temperatura común a 20 °C. Despreciar la deformación de la rueda producida por la presión de contacto. $\alpha = 11{,}7\ \mu m/(m.°C)$ y $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$.

Resolución:



$$\alpha = 11{,}7\ \frac{\mu m}{m°C}$$

$$E = 200\ GPa$$

$$\Delta L = \alpha L.\Delta T \qquad ...(1)$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} \qquad ...(2)$$

(1) = (2):

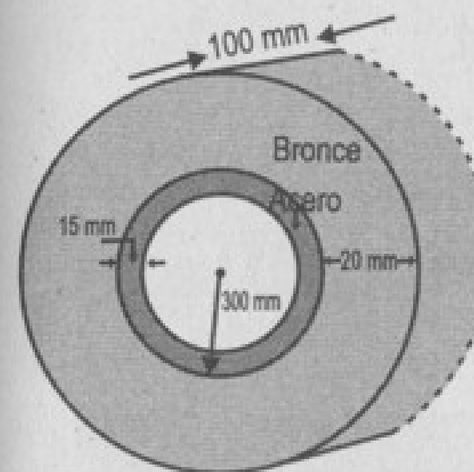
$$\frac{\sigma L}{E} = \alpha L \Delta T \Rightarrow \sigma = \alpha E \Delta T \Rightarrow \sigma = 163{,}8\ MPa$$

Entonces: $163{,}8\ MPa = \frac{P.r}{t}$

$$P = 163{,}8\ MPa \times \frac{1}{90} \Rightarrow \boxed{P = 1{,}82\ MPa}$$

265. Un aro de bronce de 20 mm de espesor cuyo diámetro interior es de 600 mm se coloca perfectamente ajustado sobre otro de acero de 15 mm de espesor, a una temperatura común de 130 °C. El ancho, igual para los dos, es de 100 mm. Determinar la presión de contacto entre ambos aros cuando la temperatura descienda hasta 20 °C. Despreciar el hecho que el aro interior pueda abollarse por pandeo. E_a = 200 GPa y α = 11,7 μm/(m .°C). E_b = 83 GPa y α = 19 μm/(m .°C).

Resolución:
Del gráfico:



Datos:
Disco de bronce:
r_b = 310 mm (radio medio)
h_b = 20 mm (espesor)
$\alpha_b = 19\times10^{-6}$ 1/°C
E_b = 83 GPa

Disco de acero:
r_a = 307,5 mm (radio medio)
h_a = 15 mm (espesor)
$\alpha_a = 11{,}7\times10^{-6}$ 1/°C
E_a = 200 GPa
Δt = 130°C – 20°C = 110°C

Al haber un decremento de temperatura, los aros se contraen, obviamente el disco de bronce reduce sus medidas mucho más que el disco de acero; por lo tanto, se produce una presión "P"que contrae el disco interior y a su vez dilata el exterior.

Primero hallamos la diferencia de longitudes al contraerse, para ello suponemos que se encuentran separados:
El decremento de longitud de la circunferencia del aro de bronce es:
$2\pi\, r_b \alpha_b \Delta t = 2\pi(310)(19\times10^{-6})(110)$ mm = $(2\pi)(0{,}6479)$ mm.

El decremento de longitud de la circunferencia del aro de acero es:
$2\pi\, r_a \alpha_a \Delta t = 2\pi(307{,}5)(11{,}7\times10^{-6})(110)$ mm = $(2\pi)(0{,}3957525)$ mm

Entonces la "interferencia" de longitudes es:
$(2\pi)(0{,}6479) - (2\pi)(0{,}3957525) = (2\pi)(0{,}2517475)$ mm

Y la "interferencia" de radios es:

$$\frac{(2\pi)(0{,}2517475)\ mm}{2\pi} = 0{,}251745\ mm$$

Asimismo, las longitudes que la presión "P" contrayendo el disco interior y dilatando el disco exterior debe coincidir con la "interferencia" de los radios hallados. En el interior de un cilindro delgado, el incremento (o decremento) de la longitud radial por efecto de una presión interna "P" viene dado por:

$$\Delta r = \frac{Pr^2}{Eh}$$ donde: P : presión; r : radio; h: espesor

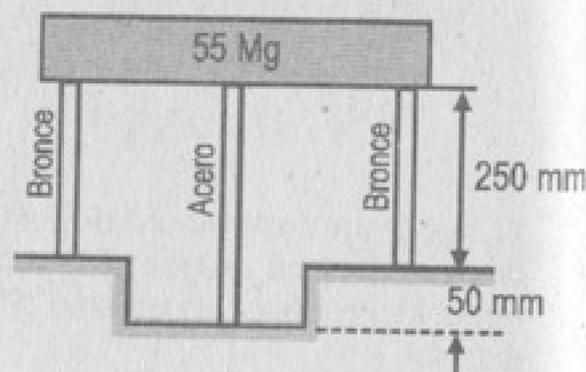
Luego tenemos que la suma de las variaciones radiales es:

$$\frac{Pr_b^2}{E_b h_b} + \frac{Pr_a^2}{E_a h_a} = 0{,}2517475 \text{ mm}$$

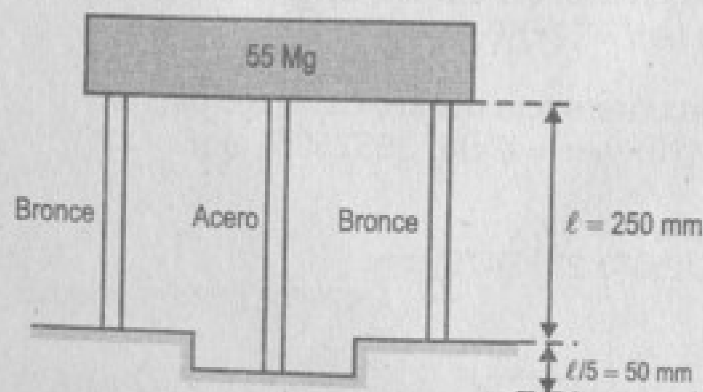
Colocando los valores:

$$P\left(\frac{310^2}{(83)(20)} + \frac{(307{,}5)^2}{(200)(15)}\right) = 0{,}2517475 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{P = 2{,}8156 \text{ MN/m}^2}$$

266. A una temperatura de 20 °C se coloca una plancha rígida que tiene una masa de 55 Mg sobre dos varillas de bronce y una de acero, como se indica en la figura. ¿A qué temperatura quedará descargada la varilla de acero? Datos: acero: $A = 6000\ mm^2$, $E = 200\times10^9\ N/m^2$ y $\alpha = 11{,}7\ \mu m/(m.°C)$. Bronce (cada una): $A = 6000\ mm^2$, $E = 83 \times 10^9\ N/m^2$ y $\alpha = 19{,}0\ \mu m/(m.°C)$.



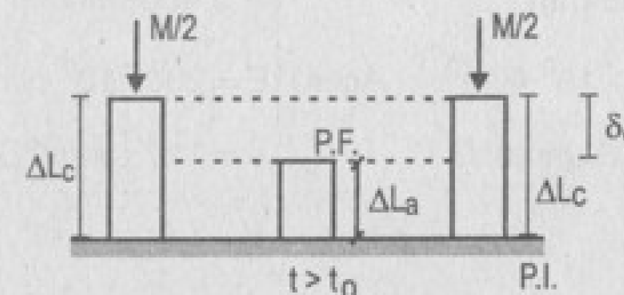
Resolución:



Acero $\begin{cases} A = 6000\ mm^2 \\ E = 200\times10^9\ N/m^2 \\ \alpha = 11{,}7\ \mu m/m°C \end{cases}$

Bronce $\begin{cases} A = 6000\ mm^2 \\ E = 83\times10^9\ N/m^2 \\ \alpha = 19{,}0\ \mu m/m°C \end{cases}$

$\alpha_{bronce} > \alpha_{acero}$



$$\Delta L_{bronce} - \delta_{bronce} = \Delta L_{acero} \quad ...(1)$$

$$\Delta L_{bronce} = 19\ \frac{\mu m}{m°C} \times 250\ mm \times \Delta T = 4750\ \frac{\mu mm}{°C} \times \Delta T$$

$$\Delta L_{acero} = 11{,}7\frac{\mu m}{m°C} \times 300\ mm \times \Delta T = 3510\ \frac{\mu mm}{°C} \times \Delta T$$

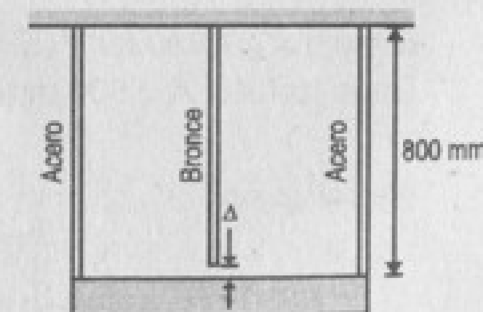
$$\delta_{bronce} = \frac{\left(\frac{M}{2}\right)\times 250\ mm}{6000\ mm^2 \times 83\times10^9\ N/m^2} = 0{,}135\ mm$$

Reemplazando en (1):

$$(4750 - 3510)\,.\,\frac{\mu mm}{°C}\Delta T = 0{,}135\ mm$$

$$\Delta T = 108{,}87°C \Rightarrow T = 108{,}87\ °C + 20\ °C \therefore \boxed{T = 129\ °C}$$

267. A una temperatura de 20 °C hay un claro $\Delta = 0{,}2$ mm entre el extremo inferior de la barra de bronce y la losa rígida suspendida de las dos barras de acero, según se muestra en la figura. Despreciando la masa de la losa, determine el esfuerzo en cada barra cuando la temperatura del conjunto se eleva a 100 °C. Para la barra de bronce, $A = 600\ mm^2$, $E = 83 \times 10^9\ N/m^2$ y $\alpha = 18{,}9\ \mu m/(m.°C)$. Para cada barra de acero, $A = 400\ mm^2$, $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$ y $\alpha = 11{,}7\ \mu m/(m.°C)$.



Resolución:

$$\text{Bronce}\begin{cases}A=600\ \text{mm}^2\\ E=83\times10^9\ \text{N/m}^2\\ \alpha=18{,}9\ \mu\text{m/m°C}\end{cases}\qquad \text{Acero}\begin{cases}A=400\ \text{mm}^2\\ E=200\times10^9\ \text{N/m}^2\\ \alpha=11{,}7\ \mu\text{m/m°C}\end{cases}$$

Acero

$$\Delta L=\alpha.L.\Delta T$$

$$\Delta L=11{,}7\frac{\mu m}{m\ °C}\times 800\ \text{mm}\times 80\ °C \Rightarrow \Delta L=0{,}75\ \text{mm}=\delta_T$$

$$\delta_P=\delta_T$$

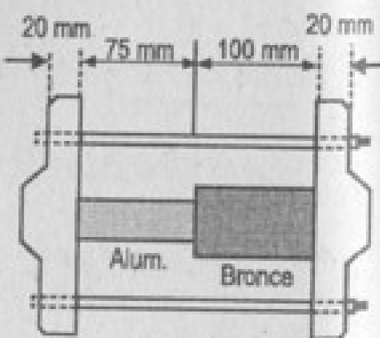
$$\frac{PL}{AE}=\delta_T \quad\Rightarrow\quad \frac{\sigma.800}{200\times10^9}=0{,}75 \quad \therefore \quad \boxed{\sigma=187{,}5\ \text{MPa}}$$

Bronce

$$\Delta L=18{,}9\times\frac{\mu}{°C}\times 800\ \text{mm}\times 80\ °C \Rightarrow \Delta L=1209{,}6\times10^{-3}\ \text{mm}=1{,}209\ \text{mm}$$

$$\frac{\sigma.800\ \text{mm}}{83\times10^9\ \text{N/m}^2}=1{,}209\ \text{mm}-0{,}2\ \text{mm} \quad\therefore\quad \boxed{\sigma=104{,}68\ \text{MPa}}$$

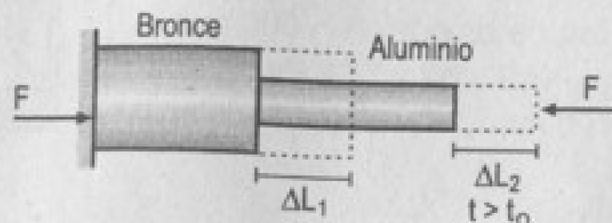
268. Un cilindro de aluminio y otro de bronce, perfectamente centrados, se aseguran entre dos placas rígidas que se pueden apretar mediante dos tornillos de acero, como se observa en la figura. A 10 °C no existen fuerzas axiales en conjunto del dispositivo. Determinar las tensiones en cada material a 90 °C, con los siguientes datos:



Aluminio, A = 1200 mm², E = 70 ×10⁹ N/m², y α = 23 μm/(m.°C).

Bronce A = 1800 mm², E = 83 ×10⁹ N/m², y α = 19,0 μm/(m·°C).
Cada tornillo, A = 500 mm², E = 200 × 10⁹ N/m², y α = 11,7 μm/(m·°C)

Resolución:



$\Delta t=t-t_0$, pero: $\Delta L_1=\alpha_1 . L_1 . \Delta t$ y $\Delta L_2=\alpha_2 . L_2 . \Delta t$

$$\Delta L_T=\Delta t(\alpha_1.L_1+\alpha_2.L_2) \qquad ...(1)$$

$$\delta_{bronce}=\frac{F\left(L_1+\cancel{\Delta L_1}^{\,0}\right)}{A_1.E_1} \qquad \delta_{aluminio}=\frac{F\left(L_2+\cancel{\Delta L_2}^{\,0}\right)}{A_2.E_2}$$

$$\delta_T=\frac{F.L_1}{A_1.E_1}+\frac{F.L_2}{A_2.E_2} \qquad ...(2)$$

(1) = (2)

$$\Delta t(\alpha_1\cdot L_1+\alpha_2\cdot L_2)=\frac{F.L_1}{A_1.E_1}+\frac{F.L_2}{A_2.E_2}$$

$$F=(\alpha_1\cdot L_1+\alpha_2\cdot L_2)\left[\frac{L_2}{A_2E_2}+\frac{L_1}{A_1E_1}\right]^{-1}\Delta t \Rightarrow F=\frac{3625\times10^6\times80}{1{,}562}=185{,}6\ \text{kN}$$

$$\sigma_{aluminio}=\frac{185{,}6\ \text{kN}}{1200\ \text{mm}^2} \quad\therefore\quad \boxed{\sigma_{aluminio}=154{,}7\ \frac{MN}{m^2}}$$

$$\sigma_{bronce}=\frac{185{,}6\ \text{kN}}{1800\ \text{mm}^2} \quad\therefore\quad \boxed{\sigma_{bronce}=103{,}13\ \frac{MN}{m^2}}$$

Para los tornillos:

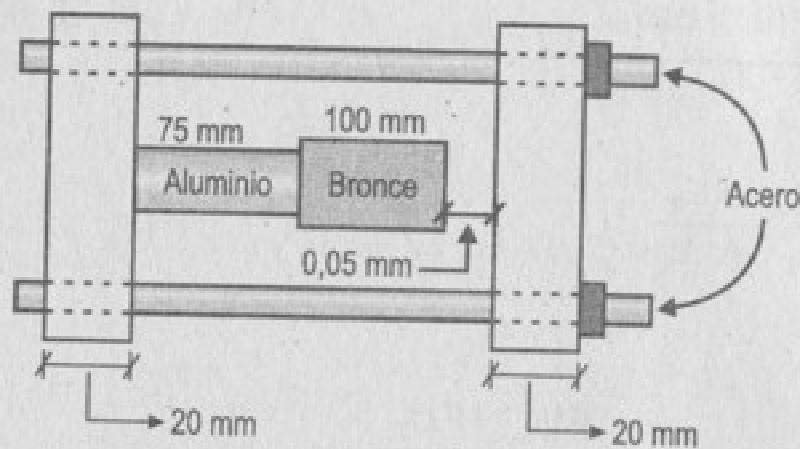
$$\frac{F'\cancel{L_3}}{A_3E_3}=\alpha_3.\cancel{L_3}.\Delta T$$

$$F'=11{,}7\frac{\mu m}{m\ °C}\times500\ \text{mm}^2\times200\times10^9\ \frac{N}{m^2}\times80\ °C \Rightarrow F'=93{,}6\ \text{kN}$$

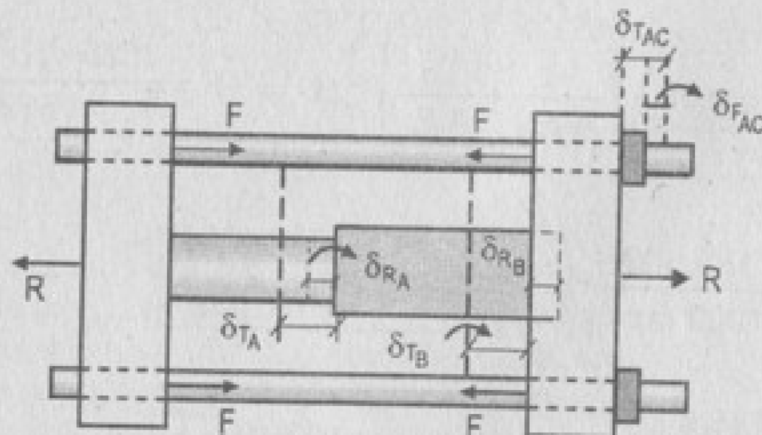
$$\sigma_{tornillo}=\frac{93{,}6\ \text{kN}}{500\ \text{mm}^2} \quad\therefore\quad \boxed{\sigma_{tornillo}=187\ \frac{MN}{m^2}}$$

269. Resuelva el problema anterior, suponiendo que hay un claro de 0,05 mm entre el extremo derecho del cilindro de bronce y la placa rígida a 10 °C.

Resolución:



Luego, de $\Delta T = 80\ °C$:



$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow R = 2F$ ...(I)

Luego del gráfico: $\delta_A = \delta_{T_A} - \delta_{R_A}$

$\delta_B = \delta_{T_B} - \delta_{R_B}$

$\delta_{AC} = \delta_{T_{AC}} - \delta_{F_{AC}}$

$\Rightarrow \delta_A + \delta_B + 0{,}05\ mm = \delta_{AC}$

$$(\alpha_A L_A + \alpha_B L_B)\,\Delta T - \left(\frac{R.L_A}{E_A A_A} + \frac{R.L_B}{E_B A_B}\right) + 0{,}05 = \alpha_{AC} L_{AC} \Delta T - \frac{F L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}} \quad ...(II)$$

Reemplazando valores:

	α	L	E	A
A	$23\times10^{-6}/°C$	$75\times10^{-3}\,m$	$70\times10^{9}\,N/m^2$	$1200\times10^{-6}\,m^2$
B	$19\times10^{-6}/°C$	$100\times10^{-3}\,m$	$83\times10^{9}\,N/m^2$	$1800\times10^{-6}\,m^2$
AC	$11{,}7\times10^{-6}/°C$	$215\times10^{-3}\,m$	$200\times10^{9}\,N/m^2$	$500\times10^{-6}\,m^2$

Resolviendo (I) y (II): R = 284,82 kN y F = 142,41 kN

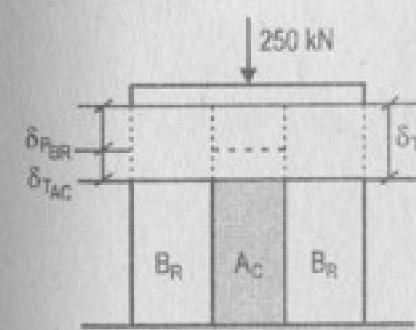
$\therefore$ $\sigma_A = 0{,}24\ MN/m^2$; $\sigma_B = 158\ MN/m^2$; $\sigma_{AC} = 284\ MN/m^2$

270. Un cilindro de acero está dentro de un manguito de bronce, ambos de la misma longitud, y los dos juntos soportan una fuerza vertical de compresión de 250 kN que se aplica por intermedio de una placa de apoyo horizontal. Determinar: (a) la variación de temperatura con la que el acero queda totalmente descargado, y (b) la que descarga por completo al bronce.

Datos: acero: A = 7200 mm², E = 200 GPa, y α = 11,7 μm/(m.°C).

bronce: A = 12 × 10³ mm², E = 836 Pa, y E = 83 GPa, α = 19,0 μm/(m°C).

Resolución:



a)Del gráfico:

$\delta_{T_{BR}} = \delta_{P_{BR}} + \delta_{T_{AC}}$

$$\Rightarrow \alpha_{BR}.L_{BR}.\Delta T = \frac{250.10^3 L_{BR}}{E_{BR} A_{BR}} + \alpha_{AC}.L_{AC}.\Delta T$$

Como $L_{BR} = L_{AC}$:

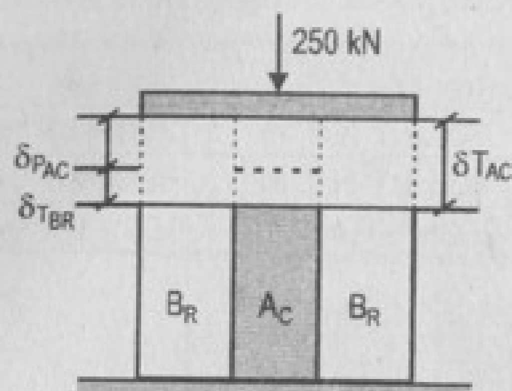
$$\Delta T.L(\alpha_{BR} - \alpha_{AC}) = \frac{250\times10^3 L}{E_{BR} A_{BR}} \Rightarrow \Delta T \frac{250\times10^3}{E_{BR} A_{BR} (\alpha_{BR} - \alpha_{AC})}$$

Reemplazando valores:

	α	E
A_C	$11{,}7\times10^{-6}/°C$	200×10^{9} Pa
B_R	$19\times10^{-6}/°C$	83×10^{9} Pa

$\therefore$ $\Delta T = 34{,}4\ °C$

b)



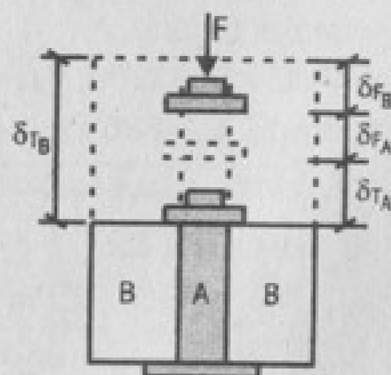
$$\alpha_{AC}.L.\Delta T - \alpha_{BR}.L.\Delta T = \frac{250\times10^{+3}L}{E_{AC}.A_{AC}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{250.10^3}{E_{AC}.A_{AC}(\alpha_{AC}-\alpha_{BR})}$$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta T = -23{,}9\ °C}$$

271. Un manguito de bronce se monta sobre un tornillo de acero y se sujeta mediante una tuerca. Calcule el cambio de temperatura que causará que el esfuerzo en el bronce sea de 20 MPa. Para el tornillo de acero, A=450 mm², E = 200 GPa y α = 11,7 µm/(m.°C). Para el manguito de bronce, A = 900 mm², E = 83 GPa y α = 19,0 µm/(m.°C).

Resolución:



Luego: $\delta_{T_B} = \delta_{F_A} + \delta_{T_A} + \delta_{F_B}$

$$\alpha_B L\Delta T = \frac{FL}{E_A A_A} + \alpha_A L\Delta T + \frac{FL}{E_B A_B}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T(\alpha_B - \alpha_A) = F\left(\frac{1}{E_A A_A} + \frac{1}{E_B A_B}\right)$$

Por condición:

$$\sigma_B = 20\times10^6\,\frac{N}{m^2} = \frac{F}{A_{BR}}$$

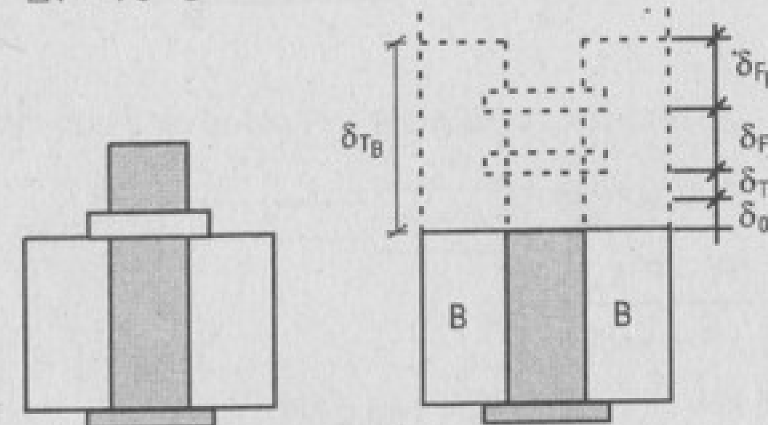
$$\Rightarrow \quad F = 20\times10^6 \times 900\times10^{-6}\ m^2 \quad \Rightarrow \quad F = 18\ kN$$

Reemplazando: $\Delta T = 18\times10^3\left(\frac{1}{E_A A_A} + \frac{1}{E_B A_B}\right)\frac{1}{(\alpha_B - \alpha_A)} \quad \therefore \quad \boxed{\Delta T = 60{,}4\ °C}$

272. En el caso del problema anterior suponga que la tuerca se aprieta para producir un esfuerzo inicial de 15 × 10⁶ N/m² en el manguito. Halle el esfuerzo en este último después de un aumento de temperatura de 70 °C.

Resolución:

$\Delta T = 70\ °C$



$$\frac{F_B}{A_B} = 15\times10^6\,\frac{N}{m^2} \quad \Rightarrow \quad F_B = 13{,}5\ kN$$

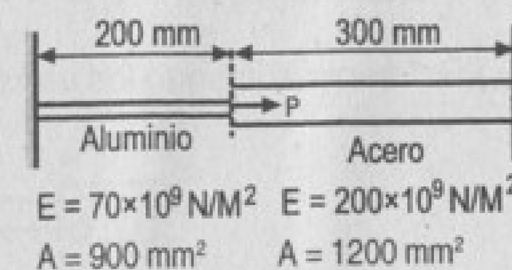
$$\delta_{0F_B} = \frac{13{,}5\times10^3\times L}{E_B.A_B}$$

$$\delta_{T_B} = \delta_{F_B} + \delta_{F_A} + \delta_{T_A} + \delta_0$$

$$\alpha_B \cancel{L}\Delta T = \frac{F\cancel{L}}{E_A A_A} + \alpha_A \cancel{L}\Delta T + \frac{F\cancel{L}}{E_B A_B} + \frac{13{,}5\times10^3\cancel{L}}{E_B A_B}$$

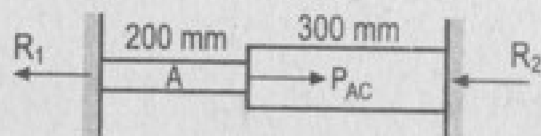
$$\Rightarrow \quad F = 13{,}5\ kN \Rightarrow F_T = 27\ kN \quad \therefore \quad \boxed{\sigma_B = 3\ MPa}$$

273. La barra compuesta de la figura, está firmemente sujeta a soportes indeformables. Se aplica una fuerza axial P = 200 kN a una temperatura de 20 °C. Calcular los esfuerzos en cada material a la temperatura de 60 °C, α = 11,7 µm/(m .°C) para el acero y 23,0 µm/(m.°C) para el aluminio.



Resolución:

i. Considerando que solo actúa P = 200 kN



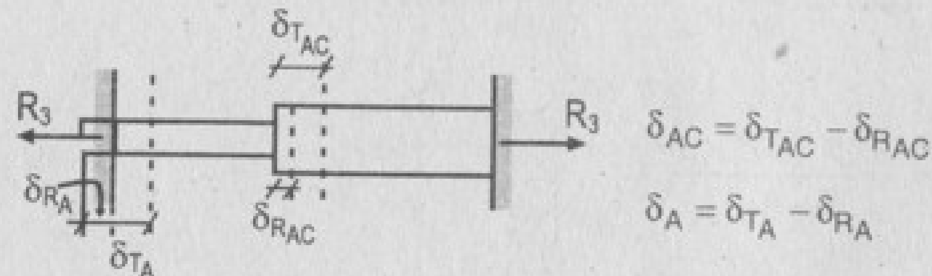
$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow P - R_1 - R_2 = 0$ ...(I)

$\delta_T = 0 \Rightarrow \delta_A + \delta_{AC} = 0$

$$+\frac{R_1 L_A}{E_A A_A} + \frac{(R_1 - P)L_{AC}}{E_{AC} L_{AC}} = 0 \quad \text{...(II)}$$

$R_1 = 56{,}5$ kN $\wedge$ $R_2 = 143{,}5$ kN

ii. Considerando que solo actúa $\Delta T = 60$ °C



$\delta_{AC} = \delta_{T_{AC}} - \delta_{R_{AC}}$

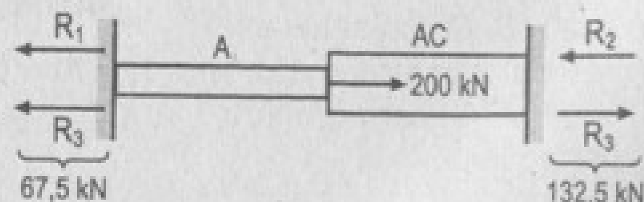
$\delta_A = \delta_{T_A} - \delta_{R_A}$

$$\Rightarrow \left(\delta_{T_A} - \delta_{R_A}\right) + \left(\delta_{T_{AC}} - \delta_{R_{AC}}\right) = 0$$

$$(\alpha_A L_A + \alpha_{AC} L_{AC})\Delta T - \left(\frac{R_3 L_A}{E_A A_A} + \frac{R_3 L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}}\right) = 0 \quad \text{...(III)}$$

Resolviendo (III): $R_3 = 11$ kN

Finalmente sumando los efectos:

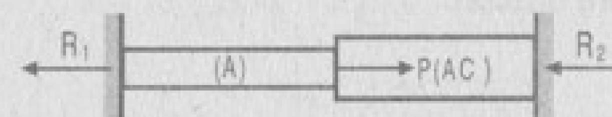


Luego: $\sigma_A = \dfrac{67{,}5 \times 10^3}{900 \times 10^{-6}} \dfrac{N}{m^2} = \boxed{75\ \text{MPa}}$ $\wedge$ $\sigma_{AC} = \dfrac{132{,}5 \times 10^3}{1200 \times 10^{-6}} \dfrac{N}{m^2} = \boxed{110{,}4\ \text{MPa}}$

274. En el problema anterior, ¿a qué temperatura alcanzará el esfuerzo en el aluminio y el acero, el mismo valor numérico?

Resolución:

i. Considerando que solo actúa P = 200 kN



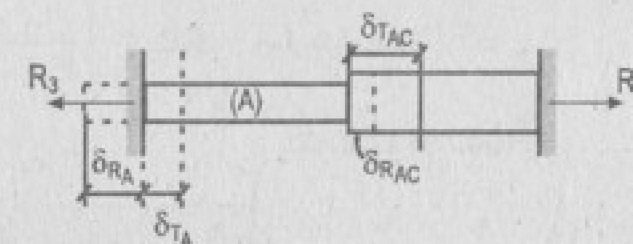
$\Sigma F = 0$:

$R_2 + R_1 - P = 0$ ...(I)

$$\frac{R_1 L_A}{E_A A_A} + \frac{(R_1 - P)L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}} = 0 \quad \text{...(II)}$$

Entonces, de (I) y (II); $R_1 = 56{,}5$ kN $\wedge$ $R_2 = 143$ kN

ii. Considerando que solo actúa "ΔT":



Del gráfico: $\delta_T = 0$.

$$\left(\delta_{T_A} - \delta_{R_A}\right) + \left(\delta_{T_{AC}} - \delta_{R_{AC}}\right) = 0$$

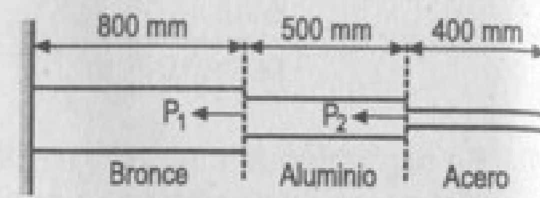
$$\left(\alpha_A L_A \Delta T - \frac{R_3 L_A}{E_A A_A}\right) + \left(\alpha_{AC} L_{AC} \Delta T - \frac{R_3 L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}}\right) = 0 \quad \text{...(III)}$$

Por condición: $\dfrac{R_1 + R_3}{A_A} = \dfrac{R_2 - R_3}{A_{AC}}$

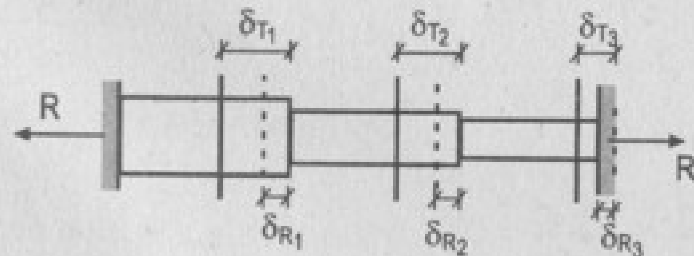
$$\frac{56{,}5\ \text{kN} + R_3}{900 \times 10^{-6} m^2} = \frac{143{,}5\ \text{kN} - R_3}{1200 \times 10^{-6} m^2} \Rightarrow R_3 = 29{,}2\ \text{kN}$$

Reemplazando en (III): $\boxed{\Delta T = 15{,}9\ °C}$

275. Una varilla está formada por los tres segmentos que indica la figura. Si las fuerzas axiales P_1 y P_2 son nulas, determinar los esfuerzos en cada material al descender la temperatura 30 °C en los casos siguientes: (a) los soportes no se mueven en absoluto, y (b) los soportes ceden 0,300 mm. $\alpha = 18{,}9\ \mu m/(m\ .°C)$ para el bronce, $23{,}0\ \mu m/(m\ .°C)$ para el aluminio y $11{,}7\ \mu m/(m\ .°C)$ para el acero.



Resolución:



a) $\delta_T = 0$

$$\left(\delta_{T_1} + \delta_{T_2} + \delta_{T_3}\right) - \left(\delta_{R_1} + \delta_{R_2} + \delta_{R_3}\right) = 0$$

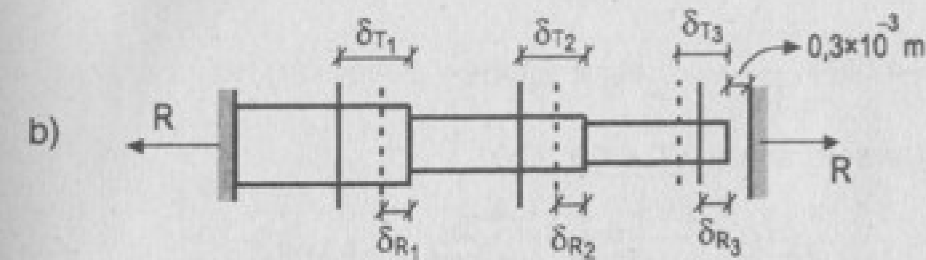
$$\Delta T\left(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3\right) - \left(\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_3}{E_3 A_3}\right) R = 0$$

Reemplazando:

	α	L	E	A
1	$18{,}9\times10^{-6}$	0,8	83×10^{9}	2400×10^{-6}
2	23×10^{-6}	0,5	70×10^{9}	1200×10^{-6}
3	$11{,}7\times10^{-6}$	0,4	200×10^{9}	600×10^{-6}

Se tiene: R = 70,6 kN $\quad\therefore\quad$ $\sigma_1 = 29{,}4$ MPa; $\sigma_2 = 58{,}8$ MPa; $\sigma_3 = 117{,}6$ MPa

b)



$\delta_T = 0$

$$(\alpha_1.L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3)\,\Delta T - \left(\frac{RL_1}{E_1 A_1} + \frac{RL_2}{E_2 A_2} + \frac{RL_3}{E_3 A_3} + 0{,}3\times10^{-3}\right) = 0$$

Se tiene: R = 48 kN $\quad\therefore\quad$ $\sigma_1 = 20$ MPa; $\sigma_2 = 40$ MPa; $\sigma_3 = 80$ MPa

276. Resolver el problema anterior si P_1 y P_2 son de 50 kN y los apoyos ceden 0,30 mm al descender la temperatura 50 °C.

A = 2400 mm²	A = 1200 mm²	A = 600 mm²
E = 83× 10⁹ N/m²	E = 70 × 10⁹ N/m²	E = 200 × 10⁹ N/m²

Resolución:

i. Considerando que solo actúa P:



$\Sigma F = 0$: $\quad R_1 + R_2 = 100$ kN ...(1)

$\Sigma\delta_T = 0$:

$$\frac{R_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{(R_1 - 50)L_2}{E_2 A_2} + \frac{(R_1 - 100)L_3}{E_3 A_3} = 0 \quad ...(2)$$

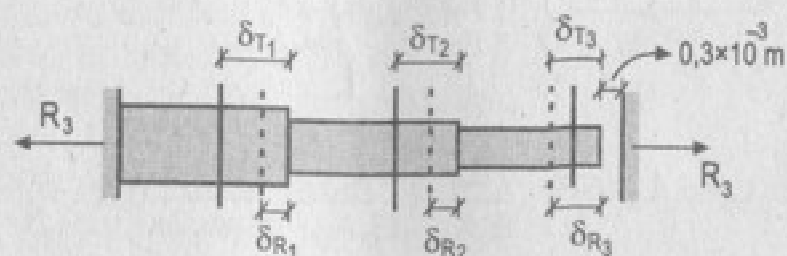
Reemplazando:

	$\alpha(1/°C)$	L(m)	E(N/m²)	A(m²)
1	$18{,}9\times10^{-6}$	0,8	83×10^{9}	2400×10^{-6}
2	23×10^{-6}	0,5	70×10^{9}	1200×10^{-6}
3	$11{,}7\times10^{-6}$	0,4	200×10^{9}	600×10^{-6}

De (1) y (2):

$$R_1 = 47 \text{ kN} \quad \wedge \quad R_2 = 53 \text{ kN}$$

ii. Considerando que solo actúa $\Delta T = 50$ °C:

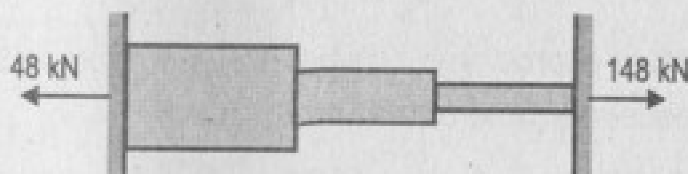


$\Delta_T = 0$:

$$(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3)\,\Delta T - \left(\frac{R_3 L_1}{E_1 A_1} + \frac{R_3 L_2}{E_2 A_2} + \frac{R_3 L_3}{E_3 A_3} + 0{,}3\times10^{-3}\right) = 0$$

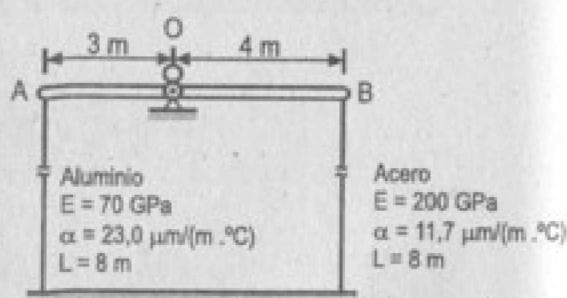
$\Rightarrow R_3 = 95$ kN

Sumando los 2 estados:

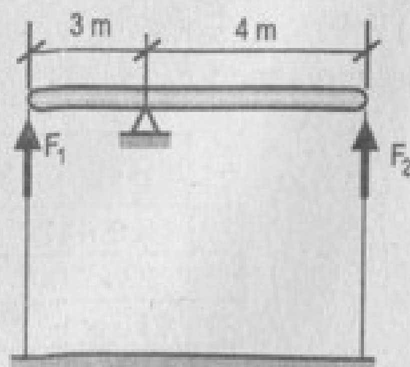


$\boxed{\sigma_1 = 20 \text{ MPa} \,;\ \sigma_2 = 82 \text{ MPa};\ \sigma_3 = 23 \text{ MPa}}$

277. La barra rígida AB está articulada mediante un perno en O y conectada a dos varillas según se muestra en la figura. Si la barra AB se mantiene en posición horizontal a determinada temperatura, calcule la relación de áreas de las varillas para que la barra AB se mantenga horizontal a cualquier temperatura. Desprecie la masa de la barra AB.



Resolución:

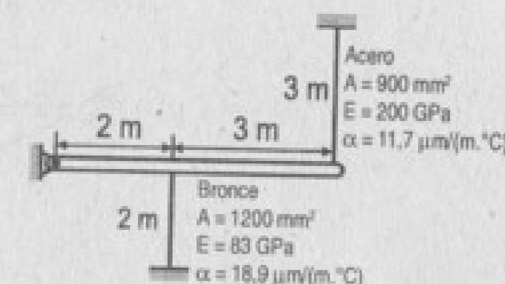


$$F_1 = \alpha_1\,\Delta T\,E_1\,A_1$$
$$F_2 = \alpha_2\,\Delta T\,E_2\,A_2$$

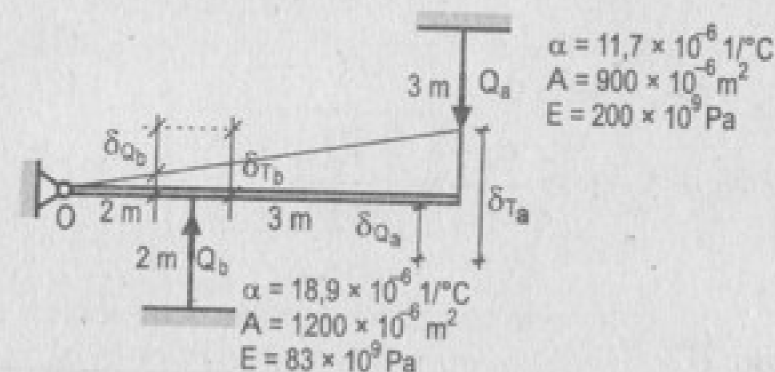
Condición del problema: $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha_1 \Delta T E_1 A_1}{\alpha_2 \Delta T E_2 A_2} = \dfrac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha_2 E_2}{\alpha_1 E_1}\right) \quad \therefore \quad \boxed{A_1/A_2 = 1{,}93}$$

278. Una barra rígida horizontal de masa despreciable está conectada a dos varillas según se muestra en la figura. Si el sistema está originalmente libre de esfuerzos, determine el cambio de temperatura que causará un esfuerzo de tensión de 60 MPa en la varilla de acero.



Resolución:



Si: $\dfrac{Q_a}{A_a} = 60 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} Q_a = 54 \text{ kN} \\ Q_b = ? \end{array}$

Del gráfico: $\quad \delta_a = \delta_{T_a} - \delta_{Q_a}$

$\qquad \delta_b = \delta_{T_b} - \delta_{Q_b}$

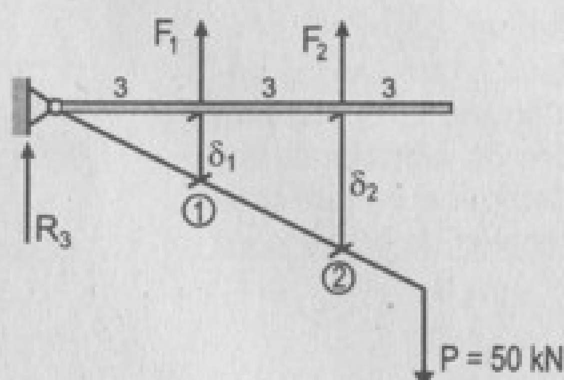
También: $\dfrac{\delta_a}{\delta_b} = \dfrac{3}{5} \quad \wedge \quad \Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_a(5) = Q_b(2) \quad \Rightarrow \quad Q_b = 135 \text{ kN}$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_a L_a \Delta T - \dfrac{Q_a L_a}{E_a A_a}}{\alpha_b L_b \Delta T - \dfrac{Q_b L_b}{E_b A_b}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = -58{,}5 \text{ °C}}$$

279. Para el conjunto mostrado en la figura, determine el esfuerzo en cada una de las dos varillas verticales si la temperatura se eleva 40 °C después que se aplica la carga P = 50 kN. Desprecie la deformación y la masa de la barra horizontal AB.

Resolución:

a) Considerando solo la acción de la fuerza P:



$\Sigma F_V = F_1 + F_2 + R_3 - P = 0$ ...(1)

$\Sigma M_o = 3F_1 + 6F_2 - 9P = 0$ ...(2)

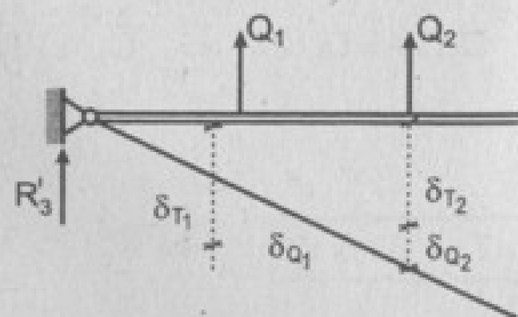
Del gráfico: $2\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow 2\left(\dfrac{F_1L_1}{E_1A_1}\right) = \left(\dfrac{F_2L_2}{E_2A_2}\right)$ ...(3)

Resolviendo:

	$\alpha(1/°C)$	$E(N/m^2)$	$A(m^2)$	$L(m)$
1	23×10^{-6}	70×10^{9}	900×10^{-6}	3
2	$11{,}7\times10^{-6}$	200×10^{9}	600×10^{-6}	41

$F_1 = 22{,}4$ kN; $F_2 = 63{,}8$ kN $\wedge$ $R_3 = -36{,}2$ kN

b) Considerando que solo actúa $\Delta T = 40$ °C



Del gráfico:
$\delta_1 = \delta_{T1} - \delta_{Q1}$
$\delta_2 = \delta_{T2} - \delta_{Q2}$

$\Sigma F_V = Q_1 + Q_2 + R_3^2 = 0$ ...(1)

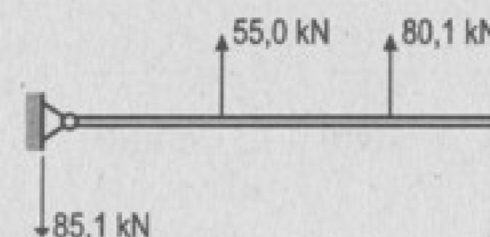
$3Q_1 - 6Q_2 = 0$ ...(2)

Luego: $\dfrac{\alpha_1L_1\Delta T - Q_1L_1/E_1A_1}{\alpha_2L_2\Delta T + Q_2L_2/E_2A_2} = \dfrac{3}{6}$

Resolviendo:

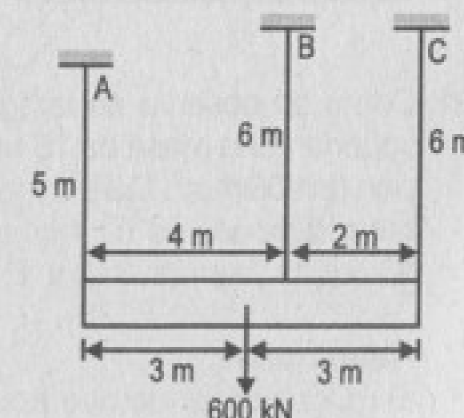
$Q_1 = 32{,}6$ kN $\qquad Q_2 = 16{,}3$ kN $\qquad R'_3 = -48{,}9$ kN

Finalmente sumando los estados de carga:



$\sigma_1 = 61$ MPa
$\sigma_2 = 133$ MPa

280. Los extremos inferiores de las tres varillas de acero de la figura, están al mismo nivel antes de aplicar la fuerza de 600 kN. Las tres varillas tienen la misma sección, $A = 2000\ mm^2$, $\alpha = 11{,}7\ \mu m/(m.°C)$, y $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$. Determinar la relación entre la fuerza en la varilla C y el cambio de temperatura ΔT medido en grados Celsius, despreciando la masa de la placa rígida.



Resolución:

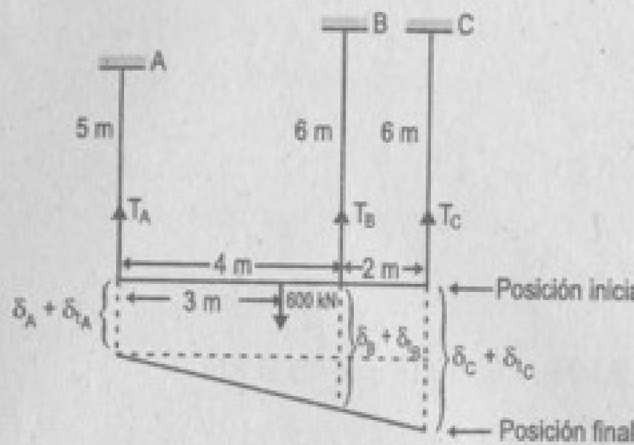
Por efecto de la carga de 600 kN, se producen fuerzas distintas en las varillas A, By C. A su vez el cambio de temperatura causa dilatación (o contracción) en cada varilla.

Sean las fuerzas: T_A, T_B, T_C

Los elongaciones: $\delta_A, \delta_B, \delta_C$

Los incrementos por la temperatura: $\delta_{tA}, \delta_{tB}, \delta_{tC}$

Del gráfico:



Por las leyes de la estática:

$$\Sigma F_V = 0 : T_A + T_B + T_C = 600 \text{ kN} \quad ...(1)$$

$$\Sigma M_A = 0 : 4T_B + 6T_C = 3(600 \text{ kN}) \quad ...(2)$$

De la relación de elongaciones:

$$\frac{(\delta_C + \delta_{tC}) - (\delta_A + \delta_{tA})}{(\delta_B + \delta_{tB}) - (\delta_A + \delta_{tA})} = \frac{6}{4} \quad ...(3)$$

Además: $\delta_A = \frac{T_A(5)}{EA}$; $\delta_B = \frac{T_B(6)}{EA}$; $\delta_C = \frac{T_C(6)}{EA}$ ...(4)

$\delta_{t_A} = \alpha\Delta t(5)$; $\delta_{t_B} = \alpha\Delta t(6)$; $\delta_{t_C} = \alpha\Delta t(6)$

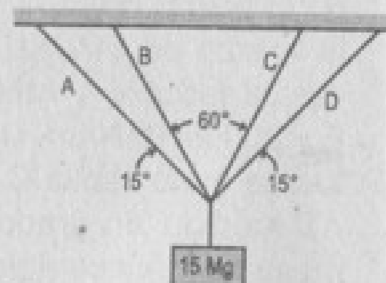
Resolviendo:

$$T_C = \frac{14\,700 + 2\alpha EA\Delta t}{83} = \frac{(14\,700 + 2(11{,}7\times10^{-6})(200\times10^{6})(2000\times10^{-6})\Delta t)}{83}$$

$$\boxed{T_C = \frac{14\,700 + (9{,}36)\Delta t}{83}}$$

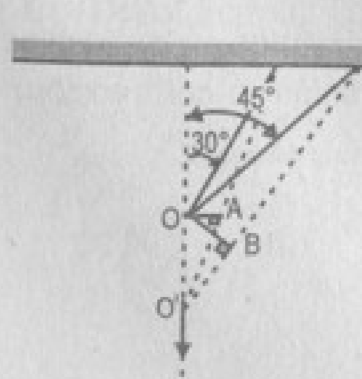
∴ Relación de fuerza en C y el cambio de temperatura. [T_C: está en kN]

281. Como se observa en la figura, cuatro barras de acero soportan una masa de 15 Mg. Cada barra tiene una sección de 600 mm². Determinar la fuerza de tensión en cada barra después de un incremento de temperatura de 50 °C. α = 11,7 μm/(m .°C) y E = 200 × 10⁹ N/m².



Resolución:

a) Considerando que solo actúa 15 ton:



$$\Sigma F_V = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{F_1}{2}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2\right) = 15 \text{ ton}$$

También: $\sqrt{2}\delta_2 = \frac{\delta_1}{\sqrt{3}}.2$

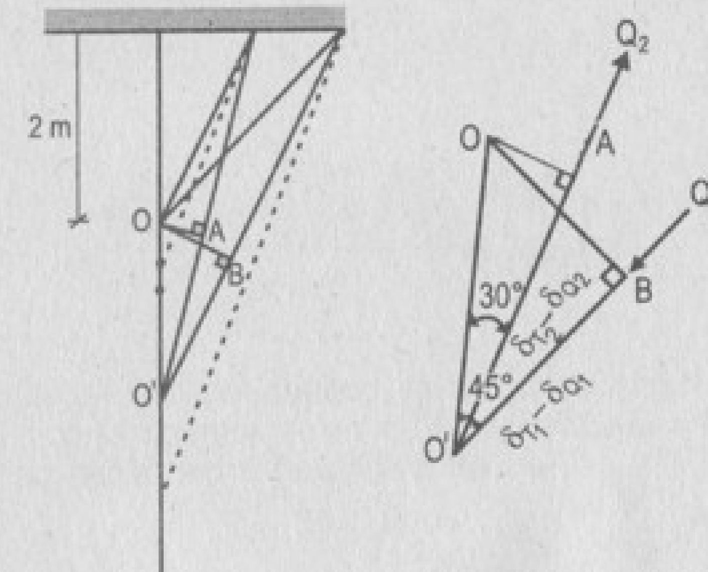
$$\sqrt{6}\frac{F_2L_2}{EA} = 2\frac{F_1L_1}{EA} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{6}F_2(H\sqrt{2}) = 2F_1\left(\frac{H}{\sqrt{3}}\right)$$

$$6F_2 = 2F_1$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} F_1 &= 6{,}8 \text{ ton} = 66{,}7 \text{ kN} \\ F_2 &= 2{,}3 \text{ ton} = 22{,}6 \text{ kN} \end{aligned}}$$

282. Resolver el problema anterior si A y D son de acero, y B y C, de aluminio. Para este metal α = 23,0 μm/(m.°C) y E = 70 × 10⁹ N/m².

Resolución:



$$\sqrt{2}(\delta_{T_1} - \delta_{Q_1}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\delta_{T_2} - \delta_{Q_2})$$

$$\sqrt{6}\left(\alpha_1L_1\Delta T - \frac{Q_1L_1}{EA}\right) = 2\left(\alpha_2L_2\Delta T - \frac{Q_2L_2}{EA}\right)$$

También: $\frac{2}{\sqrt{3}}Q_2 = \sqrt{2}Q_1 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}Q_1$

Resolviendo: $\boxed{Q_1 = 127{,}5 \text{ kN}} \wedge \boxed{Q_2 = 156{,}2 \text{ kN}}$

CAPÍTULO 3

TORSIÓN

301; 302; 303: problemas ilustrativos.

304. Calcular el mínimo diámetro de un árbol de acero que, sometido a un momento torsionante de 14 kN.m, no debe experimentar una deformación angular superior a 3° en una longitud de 6 m. ¿Cuál es, entonces, el esfuerzo cortante máximo que aparecerá en él? Use G = 83 GN/m².

Resolución:

Sabemos que: $J = \frac{\pi}{32}d^4 \wedge \theta = \frac{TL}{JG}$

$d = \sqrt[4]{\frac{32\,TL}{\pi\,\theta G}}$ $\quad d = \sqrt[4]{\frac{32(14\times10^3)(6)}{\pi(\pi/60)83\times10^9}} = 0{,}118\text{ m} \;\therefore\; \boxed{d = 118\text{ mm}}$

Además:

$\tau_{máx.} = \frac{Tc}{J} = \frac{Td}{2J} = \frac{14\times10^3\times118}{2\times\frac{\pi}{32}(118)^4} = 43{,}4 \;\therefore\; \boxed{\tau_{máx} = 43{,}4\text{ MN/m}^2}$

305. En un árbol macizo de 5 m de longitud, en el que el ángulo total de torsión es de 4°, el esfuerzo cortante máximo es de 60 MPa. Si G = 83 GPa, calcular su diámetro. ¿Qué potencia podrá trasmitir a 20 r/s?

Resolución:

Sabemos que:

$\theta = \frac{TL}{JG} \wedge \tau_{máx.} = \frac{T}{J}(d/2) \Rightarrow \theta = \frac{2\tau_{máx.}}{d}\frac{L}{G} \Rightarrow d = \frac{2\tau_{máx.}}{\theta}\frac{L}{G}$

Reemplazando:

$d = \frac{2(60\times10^6)5}{(\pi/45)(83\times10^9)} = 0{,}1035\text{ m} \;\therefore\; \boxed{d = 104\text{ mm}}$

Además: $\mathcal{P} = 2\pi f T \wedge T = \frac{\tau\pi d^3}{16}$

$\Rightarrow \mathcal{P} = 2\pi\, f\, \tau\pi d^3/16 = 2\pi^2(20)(60\times10^6)(0{,}104)^3/16 \;\therefore\; \boxed{\mathcal{P} = 1{,}67\text{ MW}}$

306. Hallar la longitud de una varilla de bronce de 2 mm de diámetro para que pueda torcerse dos vueltas completas sin sobrepasar el esfuerzo cortante admisible de 70 MPa. Use G = 35 GPa.

Resolución:

$$L=\frac{\delta\theta G}{2\tau_{máx}} \Rightarrow L=\frac{(2\times10^{-3})(4\pi)(35\times10^{9})}{2\times(70\times10^{6})} \Rightarrow \boxed{L=6{,}28\text{ m}}$$

307. Un gran árbol de transmisión para la hélice de un barco tiene que transmitir 4,5 MW a 3 r/s sin que el esfuerzo cortante exceda de 50 MN/m² y sin que el ángulo de torsión sea superior a un grado en una longitud de 25 diámetros. Determinar el diámetro más apropiado si G = 83 GN/m².

Resolución:

Aplicando la ecuación $T=\frac{\mathcal{P}}{2\pi f}$, tenemos:

T = 4,5 / (2π × 3) = 0,75/π (0,238) MN.m

Luego: $\tau=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{16(0{,}75/\pi)}{\pi d^3}\le 50 \Rightarrow d\ge 0{,}289\text{ m}$

Además: $\theta=\frac{32TL}{\pi d^4 G}=\frac{32(0{,}75/\pi)\times10^6(0{,}25)}{\pi d^4 83\times10^9}\le\frac{\pi}{180} \Rightarrow d\ge 0{,}143\text{ m}$

$\therefore \boxed{d=289\text{ mm}}$

308. Demostrar que un árbol hueco de sección circular, cuyo diámetro interior sea la mitad del exterior, tiene una resistencia a la torsión que es igual a $\frac{15}{16}$ de la que tiene un árbol macizo del mismo diámetro exterior.

Resolución:

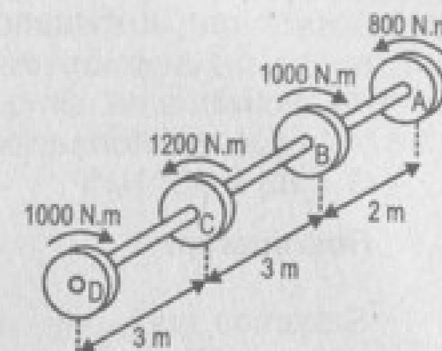
Para el árbol hueco: (I) $\tau_H=\frac{16TD}{\pi(D^4-d^4)}=\frac{16TD}{\pi\left(\frac{15}{16}D^4\right)}$

Para el árbol macizo: (II) $\tau_M=\frac{16T}{\pi D^3}$

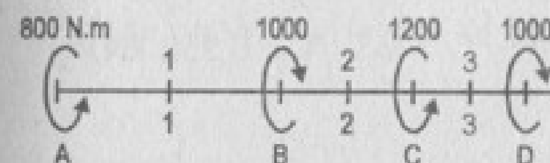
Para un mismo material, tenemos:

De (I) y (II): $\frac{\tau_H}{\tau_M}=\frac{\dfrac{16T}{\pi\left(\frac{15}{16}D^3\right)}}{\dfrac{16T}{\pi D^3}}=\boxed{\frac{16}{15}}$ ∴ es incorrecto.

309. Un árbol de acero de diámetro constante e igual a 60 mm está cargado mediante pares aplicados a engranes montados sobre él, según se muestra en la figura. Usando un módulo G = 83 GN/m², calcule el ángulo de torsión del engrane D con respecto al A.



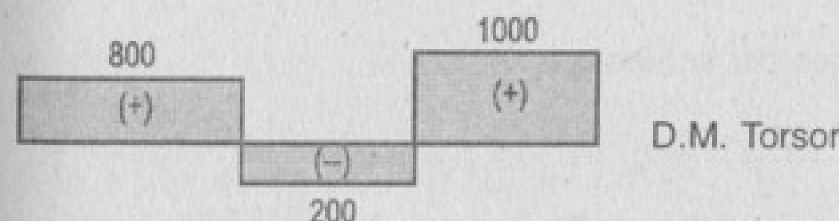
Resolución:



$800-T=0 \Rightarrow T_2=800$

$800-1000-T_2=0 \Rightarrow T_2=-200$

$800-1000-1200-T_3=0 \Rightarrow T_3=1000$



$$\theta_{D/A}=\theta_{B/A}+\theta_{C/B}+\theta_{D/C} \Rightarrow \theta_{D/A}=\frac{T_{B/A}L_{B/A}}{JG}+\frac{T_{C/B}L_{C/B}}{JG}+\frac{T_{A/C}L_{A/C}}{JG}$$

$$\theta_{D/A}=\frac{1}{JG}\Sigma(TL)$$

$$\theta_{D/A}=\frac{1}{\frac{\pi}{32}(60\times10^{-3})^4(83\times10^9)}[800(3)+(-200)(3)+1000(2)]$$

$$\boxed{\theta_{D/A}=0{,}0359\text{ rad}}$$

310. Determinar el máximo momento torsionante que puede soportar un árbol hueco de sección de 100 mm y 70 mm de diámetro exterior e interior, respectivamente, sin que se sobrepase un esfuerzo cortante de 60 × 10⁶ N/m² y sin que la deformación sea superior a medio grado por metro de longitud. Use G = 83 × 10⁹ N/m².

Resolución:

Sabemos que: $J = \frac{\pi}{32}\left(0{,}1^4 - 0{,}07^4\right) = \frac{\pi \times 7{,}599 \times 10^{-5}}{32}$

1. $T = \tau_{máx}\frac{J}{C} = \frac{60 \times 10^6\left(\frac{\pi}{32}7{,}599 \times 10^{-5}\right)}{0{,}05} \Rightarrow T = 8{,}952\ \text{kN.m}$

2. $T = JG\phi = \left(\frac{\pi}{32}7{,}599 \times 10^{-5}\right)(83 \times 10^9)\left(\frac{\pi}{200}\right) \Rightarrow T = 9{,}726\ \text{kN.m}$

$\therefore \boxed{T_{máx} \geq 8{,}952\ \text{kN.m}}$

311. Un árbol de transmisión de acero consta de una parte hueca de 2 m de longitud y diámetros de 100 mm y 70 mm, y otra parte maciza de 70 mm de diámetro y 1,5 m de longitud. Determinar el máximo momento torsionante que puede soportar sin que el esfuerzo sobrepase el valor de 70 MN/m², ni el ángulo total de torsión supere el valor de 2,5° en la longitud total de 3,5 m. Use G = 83 GN/m².

Resolución:

Aplicando las ecuaciones del esfuerzo tenemos:

$\tau_H = \frac{16TD}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{16T(0{,}1)}{\pi(0{,}1^4 - 0{,}07^4)} \leq 70 \Rightarrow T \leq 9{,}4\ \text{kN.m}$

$\tau_M = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16T}{\pi(0{,}07)^3} \leq 70 \Rightarrow T \leq 4{,}71\ \text{kN.m}$

Además:

$\theta = \Sigma\theta_i = \Sigma\frac{T_iL_i}{J_iG_i} = \frac{T}{G}\left(\frac{L_H}{J_H} + \frac{L_M}{J_M}\right)$

$\theta = \frac{T}{83 \times 10^9}\left[\frac{2}{\frac{\pi}{32}(0{,}1^4 - 0{,}07^4)} + \frac{1{,}5}{\frac{\pi}{32}(0{,}07)^4}\right] \leq 2{,}5 \times \frac{\pi}{180}$

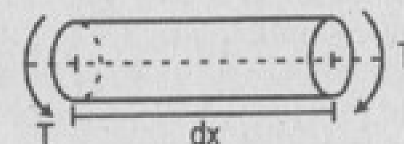
$\Rightarrow T \leq 4{,}0\ \text{kN.m} \quad \therefore \boxed{T_{máx} = 4{,}0\ \text{kN.m}}$

312. Una transmisión flexible consta de un alambre de acero de 5 mm de diámetro encerrado en un tubo guía en el que encaja tan ajustado que se produce un par torsor resistente por fricción de 2 N. m/m. Determinar la máxima longitud que puede tener si el esfuerzo cortante no debe exceder de 140 MPa. ¿Cuál será el ángulo total de torsión? Use G = 83 GPa.

Resolución:

Del diagrama: (+ Horario; dx)

Si tomamos un diferencial de longitud:



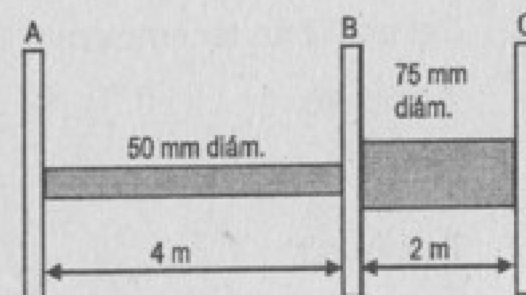
Tenemos: $\tau = \frac{16(m_tL)}{\pi d^3}$

$\therefore \quad \tau = \frac{16(2 \times L)}{\pi(0{,}005)^3} \leq 140 \times 10^6 \Rightarrow L \leq 1{,}72\ \text{m} \quad \therefore \boxed{L = 1{,}72\ \text{m}}$

Para el giro tenemos: $\int_0^\theta d\theta = \int_0^L \frac{Tdx}{JG} = \int_0^L \frac{m_txdx}{JG} = \frac{m_t}{JG}\int_0^L xdx$

$\theta = \frac{m_tL^2}{2JG} = \frac{2(1{,}72)^2}{2(83 \times 10^9)\left(\frac{\pi}{32}(0{,}005)^4\right)} \quad \therefore \boxed{\theta = 0{,}58 = 33{,}3°}$

313. El árbol de la figura gira a 3 r/s absorbiendo 30 kW en A y 15 kW en B de los 45 kW aplicados en C. Si G = 83 × 10⁹ N/m², calcular el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión de la rueda A respecto de la rueda C. (Material acero).



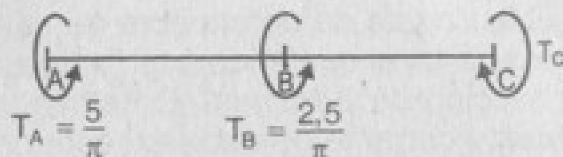
Resolución:

Calculamos los momentos torsionantes:

$T_B = \frac{\mathcal{P}_{B/C}}{2\pi f} = \frac{15 \times 10^3}{2\pi(3)} = \frac{2{,}5}{\pi}\ \text{kN.m}; \quad T_A = \frac{\mathcal{P}_{A/B}}{2\pi f} = \frac{30 \times 10^3}{2\pi(3)} = \frac{5}{\pi}\ \text{kN.m}$

$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi d_{BC}^3} = \frac{16(7{,}5/\pi)}{\pi(0{,}075)^3} = 28{,}8\ \text{MN/m}^2; \quad \tau_{AB} = \frac{16T_{AB}}{\pi d_{AB}^3} = \frac{16(5/\pi)}{\pi(0{,}05)^3} = 64{,}9\ \text{MN/m}^2$

El esfuerzo máximo es: $\boxed{\tau_{máx} = \tau_{A/B} = 64{,}9\ \text{MN/m}^2}$

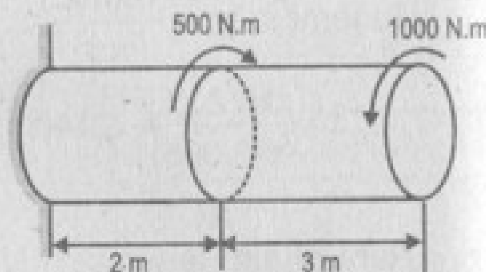


Del equilibrio tenemos: $T_C = \frac{7,5}{\pi} \Rightarrow \theta_{A/C} = \theta_{A/B} + \theta_{B/C} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}G_{AB}} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}G_{BC}}$

$$\theta_{A/C} = \frac{\left(\frac{5}{\pi}\right)(4)\times10^3}{\frac{\pi}{32}(0,05)^4\left(83\times10^9\right)} + \frac{\left(\frac{7,5}{\pi}\right)(2)\times10^3}{\frac{\pi}{32}(0,075)^4\left(83\times10^9\right)} \Rightarrow \theta_{A/C} = 0,125 + 0,0185$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{A/C} = 8,22^\circ}$$

314. Un árbol de acero se encuentra cargado según se muestra en la figura. Usando un módulo G = 83 GN/m², calcule el diámetro requerido del árbol si el esfuerzo cortante está limitado a 60 MN/m² y el ángulo de rotación en el extremo libre no debe exceder de 4.°



Resolución



Del equilibrio tenemos que T = 500 N.m.

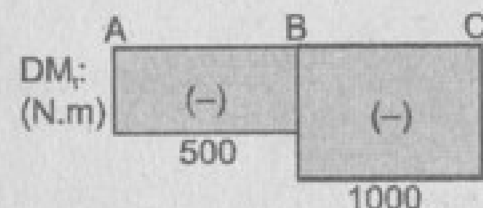
Tramo AB:

$T_{AB} = T = 500$ N.m $\Rightarrow \tau_{AB} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(500)}{\pi d^3} \le 60\times10^6 \Rightarrow d \ge 0,035$ m

Tramo BC:

$T_{BC} = 1000$ N.m $\Rightarrow \tau_{BC} = \frac{16(1000)}{\pi d^3} \le 60\times10^6 \Rightarrow d \ge 0,044$ m

Para calcular los giros, haremos el diagrama de momento torsionante para ver cómo es el giro en la barra.



(+) horario
(–) antihorario

∴ todos giran antihorario

$$\theta_{C/A} = \theta_{C/B} + \theta_{B/A}$$

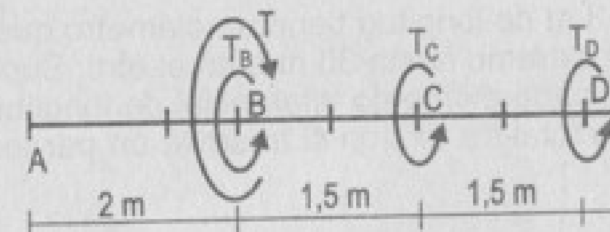
$$\theta_{C/A} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{JG} + \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} = \frac{1}{JG}\left(T_{BC}L_{BC} + T_{AB}L_{AB}\right)$$

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{\frac{\pi}{32}d^4\left(83\times10^9\right)}\left[1000(3) + 500(2)\right] \le 4\times\frac{\pi}{180}$$

$d \ge 0,052$ m $\Rightarrow$ tomando el mayor: $\boxed{d = 52 \text{ mm}}$

315. A un eje de sección constante y 5 m de longitud que gira a 2 r/s se le aplica 70 kW a través de un engrane situado a 2 m del extremo izquierdo, en donde se absorben 20 kW y a 1,5 m de este, los otros 20 kW. (a) Dimensionar el árbol si el esfuerzo cortante no ha de exceder de 60 MN/m². (b) Si el eje tiene un diámetro de 100 mm, determinar el ángulo total de torsión de un extremo al otro. Use G = 83 GN/m².

Resolución:

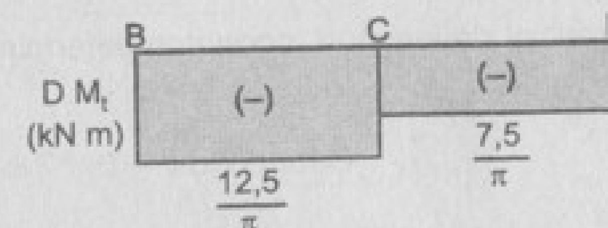


Calculando los T_i = ?

$T_B = \frac{20\times10^3}{2\pi(2)} = \frac{5}{\pi}\text{kN.m} = T_c$ $\qquad T_D = \frac{30\times10^3}{2\pi(2)} = \frac{7,5}{\pi}\text{kN.m}$

Del equilibrio calculamos: $T = \frac{70\times10^3}{2\pi(2)} = \frac{17,5}{\pi}$ kN.m

Hacemos el diagrama de momento torsionante:



(a) Para dimensionar tenemos que: $\tau_{BC} > \tau_{CD}$

$$\therefore \tau_{AB} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16\left(\frac{12,5}{\pi}\right)\times10^3}{\pi d^3} \le 60\times10^6$$

$d \ge 0,0696$ m $\Rightarrow \boxed{d = 69,6 \text{ mm}}$

(b) Si: d = 100 mm ∧ G = 83 GN/m²

donde $\theta_{D/A} = \theta_{D/C} + \theta_{C/B} = \Sigma \frac{TL}{dG}$

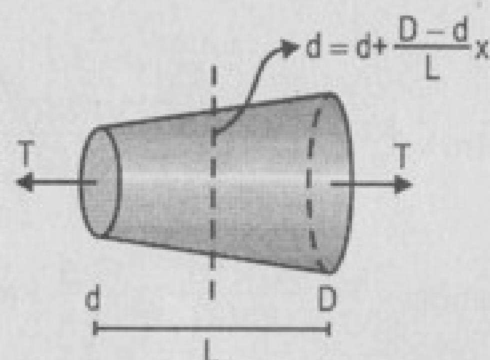
$$\Rightarrow \theta_{D/A} = \frac{T_{CB}(1{,}5)}{\frac{\pi}{32}d^4(83\times10^9)} + \frac{T_{DC}(1{,}5)}{\frac{\pi}{32}d^4(83\times10^9)}$$

$$\theta_{D/A} = \frac{\frac{12{,}5}{\pi}(1{,}5)\times10^3}{\frac{\pi}{32}(0{,}1)^4(83\times10^9)} + \frac{\frac{7{,}5}{\pi}(1{,}5)\times10^3}{\frac{\pi}{32}(0{,}1)^4(83\times10^9)}$$

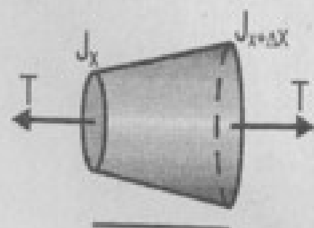
$$\boxed{\theta_{D/A} = 0{,}0117 \text{ rad} = 0{,}671°}$$

316. Un eje de acero de 3 m de longitud tiene un diámetro que varía uniformemente desde 60 mm en un extremo hasta 30 mm en el otro. Suponiendo que es válida la ecuación (3-1) en cada elemento diferencial de longitud sin error apreciable, determinar el ángulo total de torsión si trasmite un par torsor de 170 N.m. Use G = 83 × 10³ MN/m².

Resolución:



Si tomamos un diferencial de longitud, podemos determinar el giro (diferencial).



Cuando: $dx \to 0 \quad \Rightarrow \quad J_x \to J_{x+\Delta x}$

$$\therefore \quad \Delta\theta = \frac{T\,dx}{J_x G}$$

Integrando obtenemos: $\theta = \int_0^L \frac{T\,dx}{J_x G}$ ... (I)

Además: $J_x = \frac{\pi}{32}\left(d + \frac{D-d}{L}x\right)^4$ ... (II)

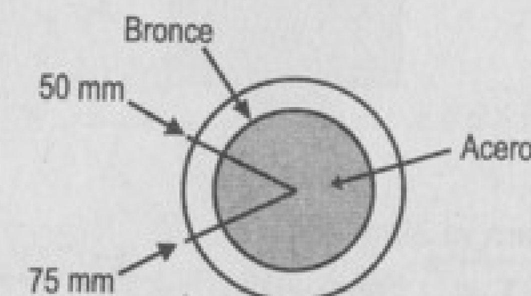
(II) en (I): $\theta = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{32}\left(d + \frac{D-d}{L}x\right)^4} = \frac{32\,TL}{3\pi G D^3 d^3}(D^2 + Dd + d^2)$

$$\boxed{\theta = 0{,}02259 = 1{,}29°}$$

317. Un árbol hueco de bronce de 75 mm de diámetro exterior y 50 mm interior tiene dentro un eje de acero de 50 mm de diámetro y de la misma longitud, estando ambos materiales firmemente unidos en los extremos del eje. Determinar el máximo esfuerzo en cada material cuando se somete el conjunto a un par torsor de 3 kN.m. G = 35 GN/m² para el bronce y G = 83 GN/m² para el acero.

Resolución:

Árbol hueco de bronce:



Como están firmemente unidos, ambos giran el mismo ángulo:

$$\theta_{bronce} = \theta_{acero}$$

$$\frac{T_B L}{J_B G_B} = \frac{T_A L}{J_A G_A}$$

$$\frac{T_B}{\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)35} = \frac{T_A L}{\frac{\pi}{32}(d^4)83} \quad \Rightarrow \quad T_B = 1{,}7131 T_A$$

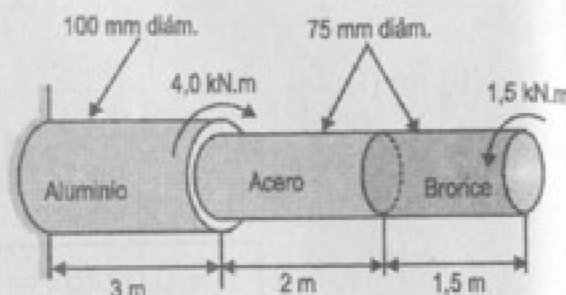
Además: $T_B + T_A = .T = 3000$ N.m

$\therefore \quad T_B = 1894{,}3 \quad y \quad T_A = 1105{,}7$

Luego: $\tau_{bronce} = \frac{T_B c}{J} = \frac{1894{,}3\times0{,}375}{\frac{\pi}{32}(0{,}075^4 - 0{,}05^4)} \Rightarrow \boxed{t_{bronce} = 28{,}5 \text{ MN/m}^2}$

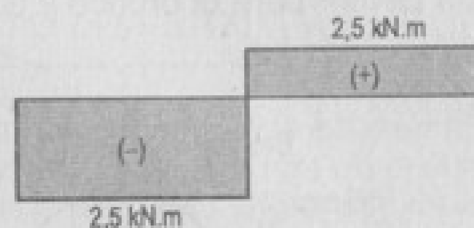
$\tau_{acero} = \frac{T_A c}{J} = \frac{1105{,}7\times0{,}25}{\frac{\pi}{32}(0{,}05)^4} \Rightarrow \boxed{t_{acero} = 45{,}1 \text{ MN/m}^2}$

318. Un árbol compuesto está constituido con tres materiales diferentes y sujeto a dos pares aplicados según se ilustra en la figura. (a) Calcule el máximo esfuerzo cortante desarrollado en cada material. (b) Calcule el ángulo de rotación del extremo libre del árbol. Use los siguientes valores: $G_{al} = 28$ GN/m², $G_{ac} = 83$ GN/m² y $G_{br} = 35$ GN/m².



Resolución:

a) Construimos el diagrama de momento torsor:



Luego para el aluminio:

$$\tau_{al.} = \frac{T_{al.}c}{J_{al.}} = \frac{2500\times0,05}{\frac{\pi}{32}(0,1^4)} = \boxed{12,73\ \text{MN/m}^2}$$

Acero:

$$\tau_{ac.} = \frac{T_{ac.}c}{J_{ac.}} = \frac{1\,500\times0,0375}{\frac{\pi}{32}(0,075^4)} = \boxed{18,11\ \text{MN/m}^2}$$

Bronce:

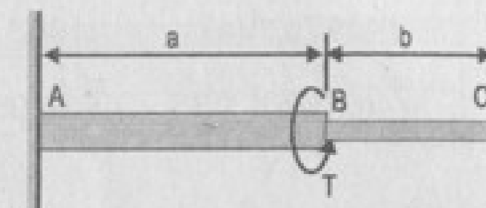
$$\tau_{br.} = \frac{T_{br.}}{J_{br.}} = \frac{1500\times0,0375}{\frac{\pi}{32}(0,075^4)} = \boxed{18,11\ \text{MN/m}^2}$$

b) Calculamos los giros por tramos:

$$\theta_{al.} = \frac{T_{al.}L_{al.}}{J_{al.}G_{al.}} = \frac{2500\times3}{\frac{\pi}{32}(0,1)^4\times28\times10^9} = \boxed{1,56°}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{ac.} = -0,67°} \text{ y } \boxed{\theta_{br.} = -1,19°}$$

319. En el árbol de la figura, firmemente empotrado en sus extremos, la porción AB tiene 75 mm de diámetro y es de bronce, con $\tau \leq 60$ MN/m² y G = 35 GN/m². La porción BC es de acero, de 50 mm de diámetro, $T \leq 80$ MN/m² y G = 83 GN/m². Si a = 2 m y b = 1,5 m, determinar el par torsor máximo T que puede aplicarse en el punto B de unión de las dos partes.



Resolución:

Liberamos A, luego: $\theta_{AB} + \theta_{BC} = 0$

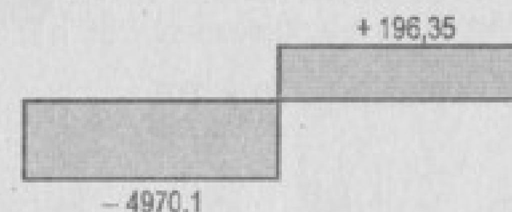
$$\frac{T_{AB}\times2}{\frac{\pi}{32}\times0,075^4\times35} + \frac{T_{BC}\times1,5}{\frac{\pi}{32}(0,05)^4\times83} = 0 \quad\Rightarrow\quad T_{AB} = -1,6T_{BC} \quad ...\ (I)$$

$$\tau_{bronce} = \frac{T_{bronce}\,c}{J} \quad\Rightarrow\quad T_{bronce} \geq \frac{60\times10^6\times\frac{\pi}{32}(0,075)^4}{0,0375} \geq 4,97\ \text{kN.m}$$

$$\therefore\ T_{acero} \geq \frac{80\times10^6\times\frac{\pi}{32}(0,05)^4}{0,025} \geq 1,96\ \text{kN.m} \quad\Rightarrow\quad \boxed{T_{acero} \geq 1,96\ \text{kN.m}}$$

320. En el problema anterior determine la relación de longitudes b/a que debe existir para que el acero y el bronce trabajen al máximo esfuerzo posible. ¿Qué par torsor T es necesario para ello?

Resolución:



Bronce: D = 75 mm ; $\tau_{máx} = 60$ MN/m² ; G = 35 GN/m²

Acero: D = 50 mm ; $\tau_{máx} = 80$ MN/m² ; G = 83 GN/m²

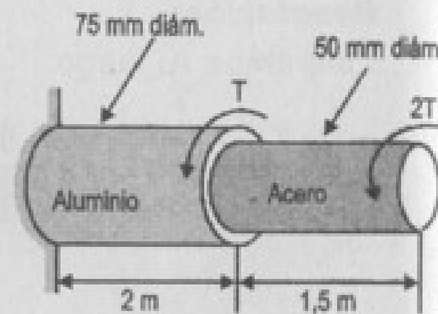
$$T_B = \frac{\tau J}{c} = \frac{60\times10^6\times\frac{\pi}{32}(0,075)^4}{0,0375} = 4,97\ \text{kN}$$

$$T_A = \frac{80\times10^6\times\frac{\pi}{32}(0,05)^4}{0,025} = 1,96\ \text{kN}$$

$$\frac{(-4970,1)(a)}{\frac{\pi}{32}(0,075)^4\times 35}+\frac{(1963,5)(b)}{\frac{\pi}{32}(0,05)^4\times 83}=0 \Rightarrow \frac{b}{a}=1,19$$

$$T = T_B + T_A = 4970,1 + 1963,5 \quad \therefore \quad \boxed{T = 6,93\ kN.m}$$

321. Un árbol compuesto, que consta de un segmento de aluminio y uno de acero, está sometido a dos momentos de torsión como se muestra en la figura. Calcule el máximo valor admisible de T de acuerdo con las siguientes condiciones: $\tau_{ac} \leq 100$ MPa, $\tau_{al} \geq 70$ MPa, y el ángulo de rotación del extremo libre, limitado a 12°. Use los valores G_{ac} = 83 GPa y G_{al} = 28 GPa.

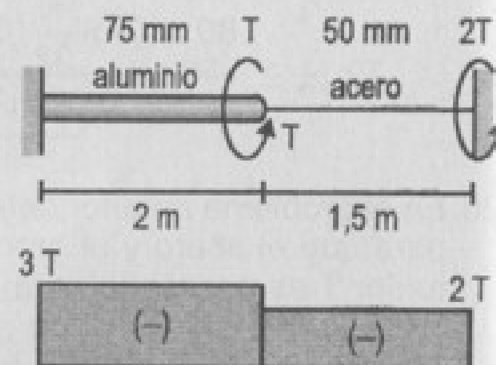


Resolución:

$t_{ac.} \leq 100$ MPa $\qquad G_{ac.}$ = 83 GPa

$t_{al.} \leq 70$ MPa $\qquad G_{al.}$ = 28 GPa

θ = 12°



$$\tau_{ac.}=\frac{2T(0,025)}{\frac{\pi}{32}(0,05)^4}=81\ 487,33T \leq 100\times 10^6$$

$$\Rightarrow T \leq 1227,2$$

$$\tau_{al.}=\frac{3T(0,0375)}{\frac{\pi}{32}(0,075)^4}=36\ 216,59T \leq 70\times 10^6$$

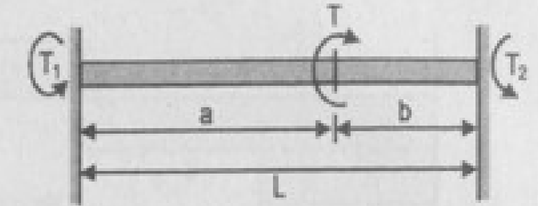
$$\Rightarrow T \leq 1932,8$$

$$\theta=\frac{2T(1,5)}{83\times 10^9\times\frac{\pi}{32}(0,05)^4}+\frac{3T(2)}{28\times 10^9\times\frac{\pi}{32}(0,075)^4}=1,2789\times 10^{-4}\ T \leq \underbrace{12^\circ\times\frac{\pi}{180}}_{0,2094}$$

$$T \leq 1637,3$$

$$\therefore \boxed{T_{máx} = 1227,2}$$

322. Un par torsor T se aplica, como indica la figura, a un árbol macizo con extremos empotrados. Demostrar que los momentos torsionantes en los empotramientos son T_1 = Tb/L y T_2 = Ta/L. ¿Variarían estos valores si el árbol fuera hueco?



Resolución:

Equilibrio:

$T_1 - T + T_2 = 0$

$T_1 + T_2 = T \qquad$ ... (I)

Sabemos que:

$$\theta_{2/1}=0=\frac{(-T_1)a}{JG}+\frac{T_2(b)}{JP}=0 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\frac{b}{a} \qquad ...\ (II)$$

De (I) y (II):

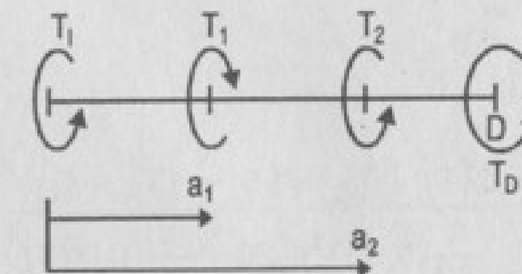
$$T_2\frac{b}{a}+T_2=T \Rightarrow T_2\frac{b+a}{a}=T \Rightarrow \boxed{T_2=\frac{aT}{L}} \text{ l.q.q.d.}$$

$$T_1=T-T_2=T-\frac{aT}{L}=\frac{bT}{L} \Rightarrow \boxed{T_1=\frac{bT}{L}} \text{ l.q.q.d.}$$

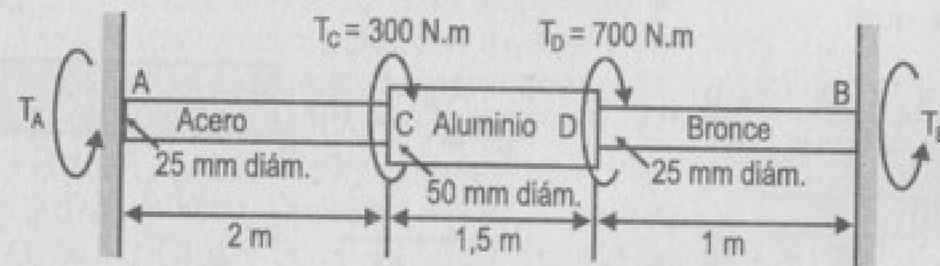
No variarían estos valores si el árbol es hueco.

323. Un árbol de 100 mm de diámetro y 3 m de longitud, con los extremos empotrados, se somete a un par torsor de 4 kN.m aplicado a 1 m del extremo izquierdo y a otro del mismo sentido de 16 kN.m a 2 m de ese extremo. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada porción del árbol. *Indicación:* aplicar el método de superposición con la resolución del problema anterior.

Resolución:



$$T_1=\frac{2\times 4}{3}+\frac{1\times 16}{3}=\frac{24}{3}=8\ kN.m$$



$$\tau_{máx} = \frac{T_{máx}c}{J} = \frac{12\times10^3\times0{,}05}{\frac{\pi}{32}(0{,}1)^4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{máx} = 61{,}1\ MN/m^2}$$

324. Un árbol se compone de tres porciones AC, CD y DB soldadas entre sí y el conjunto firmemente empotrado en sus extremos y cargado como indica la figura. Para el acero G = 83 GN / m², para el aluminio G = 28 GN/m² y para el bronce G = 35 GN/m². Determinar la tensión cortante máxima en cada material.

T_C = 300 N.m T_D = 700 N.m

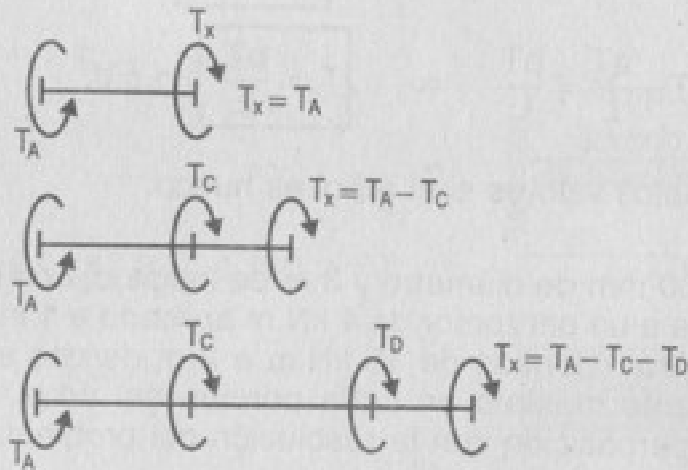
T_A A   Acero   C Aluminio D   Bronce   B T_B

25 mm diám.   50 mm diám.   25 mm diám.

2 m   1,5 m   1 m

Resolución:

Equilibrio



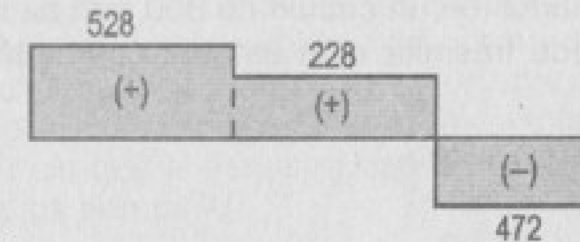
Compatibilidad de deformaciones (giros)

$$\therefore \quad \theta_{\frac{B}{A}} = \theta_{\frac{C}{A}} + \theta_{\frac{D}{C}} + \theta_{\frac{B}{D}} = 0$$

$$\frac{T_A(2)}{\frac{\pi}{32}(0{,}025)^4\times83} + \frac{(T_A - T_C)\times1{,}5}{\frac{\pi}{32}(0{,}05)^4\times28} + \frac{(T_A - T_C - T_D)}{\frac{\pi}{32}(0{,}025)^4\times35} = 0$$

$$\frac{2T_A}{83} + \frac{(T_A - 300)(1{,}5)}{16\times28} + \frac{(T_A - 300 - 700)(1)}{35} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = 528$$

Dibujando el diagrama de momento torsor:



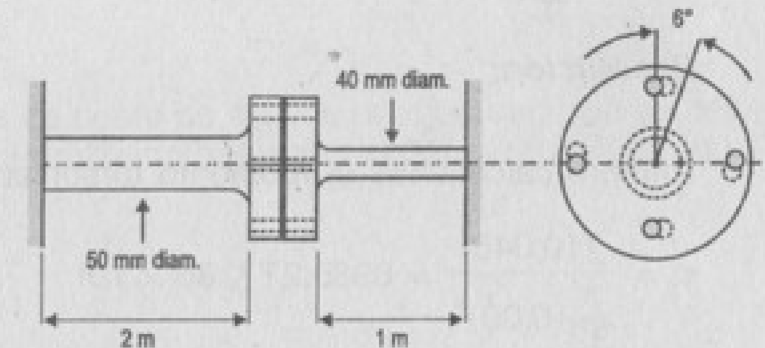
Sabemos que:

$$\tau_{acero} = \frac{528\times0{,}0125}{\frac{\pi}{32}(0{,}025)^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{acero} = 172{,}1\ MN/m^2}$$

$$\tau_{Aluminio} = \frac{228\times0{,}025}{\frac{\pi}{32}(0{,}05)^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{aluminio} = 9{,}3\ MN/m^2}$$

$$\tau'_{bronce} = \frac{472\times0{,}0125}{\frac{\pi}{32}(0{,}025)^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{bronce} = 153{,}8\ MN/m^2}$$

325. Los dos árboles de acero mostrados en la figura, cada uno con un extremo empotrado en un apoyo rígido, tiene sendas bridas rígidamente sujetas a sus extremos libres. Los ejes están atornillados uno al otro en sus bridas. Sin embargo, existe una desalineación de 6° en la localización de los barrenos de los tornillos, según se ilustra en la figura. Calcule el máximo esfuerzo cortante en cada árbol una vez que los ejes se hayan atornillado uno al otro. Use un valor de G = 83 GN/m² y desprecie la deformación de tornillos y bridas.



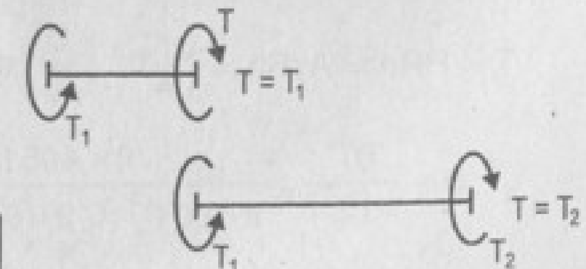
Resolución:

$$\theta = 6° = \frac{6}{180}\pi = \frac{\pi}{30}\ \text{rad}$$

$$\frac{T_1(2)}{\frac{\pi}{32}(0{,}05)^4 G} + \frac{(+T_2)(1)}{\frac{\pi}{32}(0{,}04)^4 G} = \frac{\pi}{30}$$

$$\therefore \quad T = 1200\ N.m$$

$$\tau = \frac{1200(0{,}02)}{\frac{\pi}{32}(0{,}04)^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 95{,}5\ MN/m^2}$$



326. Un acoplamiento por medio de bridas tiene 8 pernos de 20 mm de diámetro, equidistantemente espaciados en un círculo de 300 mm de diámetro. Determine el par torsor que puede trasmitir si el esfuerzo cortante admisible en los pernos es de 40 MN/m².

Resolución:

Sabemos que: $A = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2$

$P = A\tau = 12\ 566{,}37$ N

$T = PRn = P(D/2)n = (12\ 566{,}37)(0{,}3/2)(8) \Rightarrow \boxed{T = 15{,}08 \text{ kN.m}}$

327. Un acoplamiento por medio de bridas conecta un árbol de 90 mm de diámetro y otro hueco de diámetros exterior e interior de 100 y 90 mm, respectivamente. Si el esfuerzo cortante admisible es de 60 MN/m², determinar el número de pernos de 10 mm que se necesitarían, dispuestos en una circunferencia de 200 mm de diámetro, para que el acoplamiento sea igualmente resistente que el más débil de los árboles.

Resolución:

Primero calculamos el momento torsor admisible:

$$\tau_1 = \frac{T(0{,}045)}{\frac{\pi}{32}(0{,}09)^4} = 6986{,}2T \le 60 \times 10^6 \Rightarrow T \le 8588{,}4 \text{ N}$$

$$\tau_2 = \frac{T(0{,}05)}{\frac{\pi}{32}(0{,}01)^4(0{,}09)^4} = 14\ 809{,}4\ T \le 60 \times 10^6 \Rightarrow T \le 4051{,}5 \text{ N}$$

$\therefore\ T = 4051$ N

También sabemos que:

$$T = PRn = A\tau Rn = \left(\frac{\pi}{4}d^2\right)\left(\frac{D}{2}\right)\tau n$$

$$\therefore\ n = \frac{8T}{\pi d^2 D\tau} = \frac{8 \times 4051}{\pi(0{,}01)^2(0{,}2)(60 \times 10^6)} = 8{,}59 \Rightarrow \boxed{n = 9 \text{ pernos}}$$

328. Un acoplamiento por medio de bridas tiene 6 pernos de 10 mm situados en una circunferencia de 300 mm de diámetro y cuatro pernos del mismo diámetro, en otro círculo concéntrico de 200 mm de diámetro, como se indica en la figura. ¿Qué par torsor puede trasmitir sin que el esfuerzo cortante exceda de 60 MPa en los pernos?

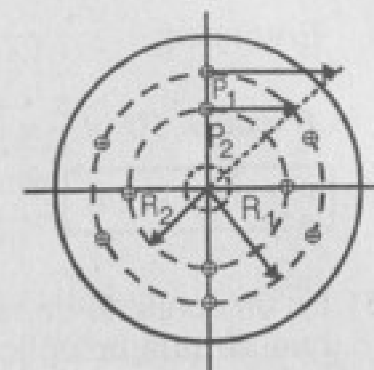


Figura 3.7

Resolución:

$D_1 = 300$ mm $\Rightarrow$ $R_1 = 150$ mm

$d_2 = d_1 = 10$ mm

$D_2 = 200$ mm $\Rightarrow$ $R_2 = 100$ mm

Además: $T = P_1R_1n_1 + P_2R_2n_2$; $\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{150}{100} = 1{,}5$

$$T = 60 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(0{,}01)^2 \times 0{,}15 \times 6 + 40 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(0{,}01)^2 \times 0{,}1 \times 4$$

$\boxed{T = 5{,}5 \text{ kN.m}}$

329. Determine el número de pernos de acero de 10 mm de diámetro que se necesitarían en el círculo exterior del problema anterior para poder trasmitir un par torsor de 8 kN.m.

Resolución:

Datos:

Sabemos que: $T = P_1R_1n_1 + P_2R_2n_2$

$$8 \times 10^3 = 60 \times 10^6\left(\frac{\pi}{4}(0{,}01)^2\right) \times 0{,}15 \times n_1 + 40 \times 10^6\left(\frac{\pi}{4}(0{,}01)^2\right) \times 0{,}1 \times 4$$

$n_1 = 9{,}5 \Rightarrow \boxed{n_1 = 10 \text{ pernos}}$

330. Resolver el problema 328 si en el círculo interior los pernos son de 20 mm de diámetro.

Resolución:

Sabemos que: $T = \sum P_iR_in_i = \sum \tau_iA_iR_in_i$

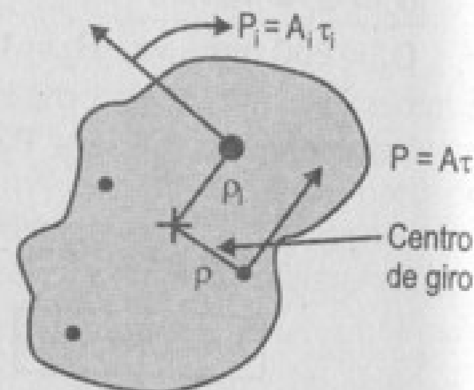
También: $\frac{\tau_1}{G_1R_1} = \frac{\tau_2}{G_2R_2} \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = 1{,}5$

Entonces:

$$T = 60 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}01^2 \times 0{,}15 \times 6 + 40 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}02^2 \times 0{,}1 \times 4$$

$$\boxed{T = 9{,}26 \text{ kN.m}}$$

331. En un conjunto de remaches sometidos a la acción de un par torsor, demostrar que se puede aplicar la fórmula de la torsión $\tau = T\rho/J$ para determinar el esfuerzo cortante en el centro de un remache, siendo $J = \Sigma A\rho^2$, donde A es el área de la sección recta de un remache situado a una distancia ρ del centroide del conjunto de remaches.



Resolución:

Tenemos que:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad ; \quad J = \sum A\rho^2$$

Sabemos que: $P_i = A_i\tau_i$

Además:

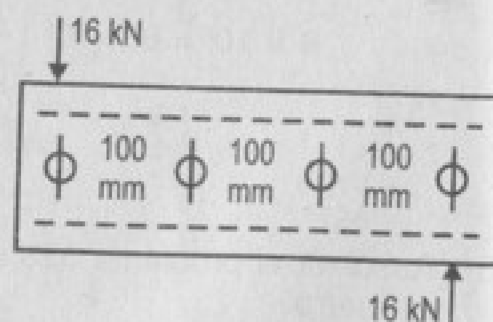
$$T_i = P_i\rho_i = A_i\tau_i\rho_i; \quad T = \sum T_i = \sum \tau_i A_i\rho_i = \sum \frac{\tau_i}{\rho_i}\rho_i^2 A_i$$

También:

$$\frac{\tau_i}{\rho_i} = \frac{\tau}{\rho} = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \Sigma\frac{\tau_i}{\rho_i}\rho_i^2 A_i = \Sigma\frac{\tau}{\rho}\rho_i^2 A_i$$

$$\therefore \; T = \frac{\tau}{\rho}\sum A_i\rho_i^2 = \frac{\tau}{\rho}J \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}} \text{ l.q.q.d.}$$

332. Una placa se sujeta a un elemento fijo y rígido mediante cuatro remaches de 20 mm de diámetro, como se indica en la figura. Determinar el máximo y mínimo esfuerzos cortantes que aparecen en los remaches.



Resolución:

Del gráfico: $T = 16 \times 0{,}3 = 4{,}8$ kN.m

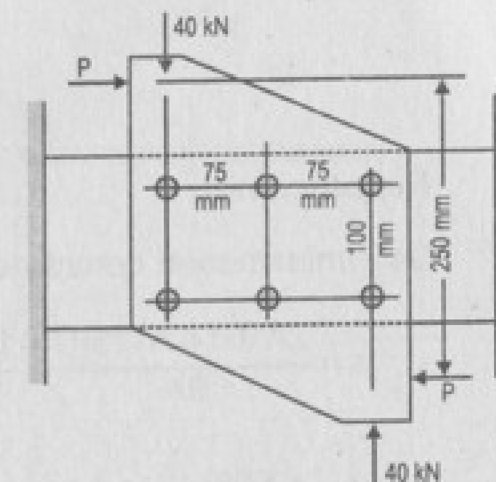
$$J = \sum A_i\rho_i^2 = A\sum \rho_i^2 = \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2\,\{(0{,}05)^2 + (0{,}15)^2 + (0{,}15)^2 + (0{,}05)^2 + (0{,}15)^2\}$$

$J = 15{,}7 \times 10^{-6}$ m^4

$$\tau_{máx} = \frac{T\rho_{máx}}{J} = \frac{4{,}8\times10^3\times0{,}15}{15{,}7\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 45{,}9 \text{ MN/m}^2}$$

$$\tau_{mín} = \frac{T\rho_{mín}}{J} = \frac{4{,}8\times10^3\times0{,}05}{15{,}7\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 15{,}3 \text{ MN/m}^2}$$

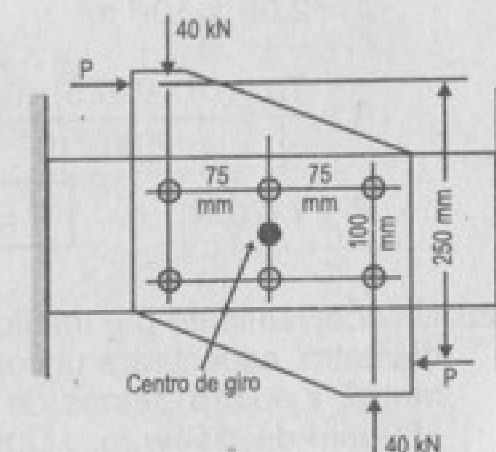
333. Seis remaches de 20 mm de diámetro sujetan la placa de la figura a una base rígida. Determinar el esfuerzo cortante medio en cada remache producido por las fuerzas de 40 kN aplicados como se indica. ¿Qué fuerzas adicionales P podrían aplicarse sin que el esfuerzo cortante sobrepase el valor de 60 MN/m² en remache alguno?



Resolución:

$\rho_1 = 0{,}05$ m

$\rho_2 = 0{,}09$ m



Ubicamos el centro de giro.

Calculamos: $J = \Sigma A\rho^2$

Para áreas iguales: $J = A\Sigma\rho^2$

$$J = \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2\,\{2(0{,}05)^2 + 4(0{,}09)^2$$

$J = 11{,}7 \times 10^{-6}$ m^4

Luego: $T = 40 \times 10^3 \times 0{,}15 = 6000$ Nm

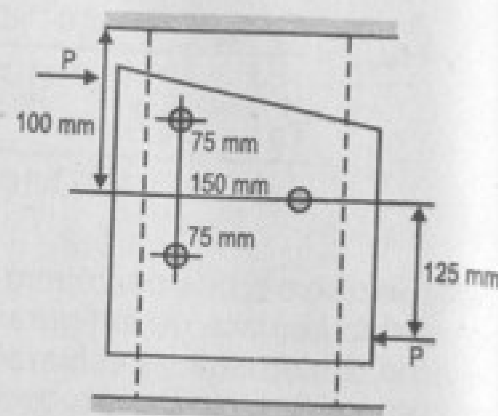
$$\tau_1 = \frac{T\rho_1}{J} = \frac{6000\times0{,}05}{11{,}7\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = 25{,}6 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau_2 = \frac{T\rho_2}{J} = \frac{6000\times0{,}09}{11{,}7\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = 46{,}1 \text{ MN/m}^2$$

En vista de que $\tau_2 < 60$ MN/m² $\Rightarrow$ P > 40 kN

$$\tau = \frac{(P\times0{,}25 - T)0{,}09}{11{,}7\times10^{-6}} \leq 60\times10^6 \text{ N/m}^2 \quad ; \quad P \leq 55{,}2 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 55{,}2 \text{ kN}}$$

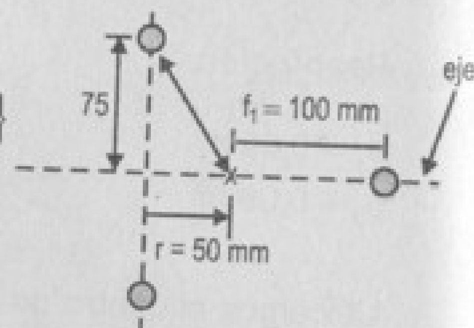
334. La placa de la figura se sujeta a una base rígida mediante 3 remaches de 10 mm. Determinar el valor de las fuerzas P de manera que en ninguno de los remaches se sobrepase el esfuerzo admisible de 70 MPa.



Resolución:

Determinamos el centro de giro que está sobre el eje:

$$r=\frac{2A(0)+A(150)}{3A}=\frac{150}{3}=50 \text{ mm}$$



$$J=A\sum d=\frac{\pi}{4}(0{,}01)^2\{0{,}1^2+2(0{,}075^2+0{,}05^2)\}$$

$J = 2{,}06 \times 10^{-6}$ m²

$$\tau=\frac{T\rho}{J}=\frac{(P\times 0{,}225)\times 0{,}09}{2{,}06\times 10^{-6}}\leq 70\times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$P \leq 7120$ N $\quad\therefore\quad$ **P = 7,12 kN**

335. Un acoplamiento por medio de bridas tiene seis pernos de acero de 10 mm de diámetro, espaciados uniformemente en una circunferencia de 300 mm de diámetro, y cuatro pernos de aluminio de 20 mm de diámetro en un círculo de 200 mm de diámetro. ¿Qué par torsor puede trasmitir sin exceder el valor de 60 MN/m² en el acero o de 40 MN/m² en el aluminio? Para el acero $G_{ac} = 83$ GN/m² y para el aluminio $G_{al} = 28$ GN/m².

Resolución:

Sabemos que:

$$T=\tau_1 A_1 R_1 n_1 + \tau_2 A_2 R_2 n_2 \qquad \text{... (I)}$$

$$\frac{\tau_1}{G_1R_1}=\frac{\tau_2}{G_2R_2} \qquad \text{... (II)}$$

De (II) tenemos: $\dfrac{\tau_1}{(83)(150)}=\dfrac{\tau_2}{(28)(100)} \Rightarrow \dfrac{\tau_1}{\tau_2}=4{,}45$

Si $\tau_1 = 60 \Rightarrow \tau_2 = 13{,}5$ MN/m² SÍ

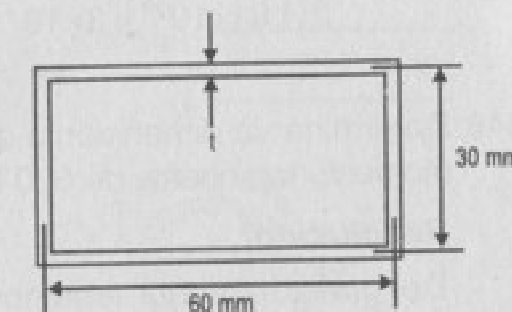
Si $\tau_2 = 40 \Rightarrow \tau_1 = 178$ MN/m² NO

$$\therefore\; T = 60\times 10^6\times\frac{\pi}{4}\times(0{,}01)^2\times 0{,}15\times 6 + 13{,}5\times 10^6\times\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2\times 0{,}1\times 4$$

$T = 5937$ N.m $\Rightarrow$ **T = 5,94 kN.m**

336. Problema ilustrativo.

337. Se aplica un momento torsionante de 600 N.m a un tubo de sección rectangular, como el de la figura. Determinar el espesor t de sus paredes, de manera que el esfuerzo cortante no exceda de 60 MPa. Calcular el esfuerzo en los lados cortos. Despreciar la concentración de esfuerzos en las esquinas.

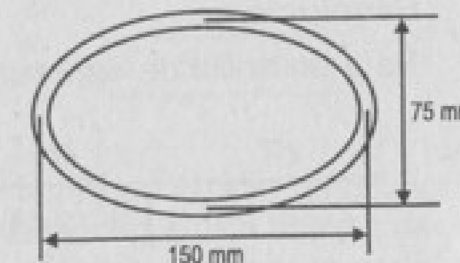


Resolución:

Sabemos que: $\tau=\dfrac{T}{2At} \quad\wedge\quad A = bh = 0{,}03\times 0{,}06 = 0{,}0018$ m²

$$\Rightarrow\; \tau=\frac{600}{2(0{,}018)t}\leq 60\times 10^6 \Rightarrow t\geq 2{,}8 \text{ mm} \;\therefore\; \boxed{t = 3 \text{ mm}}$$

338. Un tubo de 3 mm de espesor tiene una forma elíptica, como se indica en la figura. Hallar el momento torsionante que producirá en él un esfuerzo cortante de 60 MN/m².

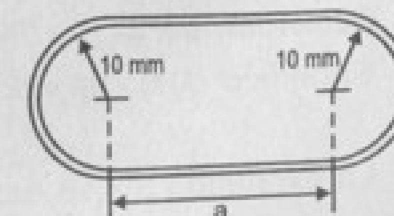


Resolución:

Del gráfico tenemos $A=\pi\, a\, b=\pi\left(\dfrac{0{,}15}{2}\right)\left(\dfrac{0{,}075}{2}\right)=8{,}84\times 10^{-3}$

Además: $T = \tau(2A.t) = 60\times 10^6\times 2\times 8{,}84\times 10^{-3}\times 0{,}003 \Rightarrow$ **T = 3,18 kN.m**

339. Un tubo de 3 mm de espesor tiene la forma y dimensiones que se indican en la figura. Calcular el esfuerzo cortante si se le aplica un momento torsionante de 700 N.m y el valor de a es 75 mm.



Resolución:

Sabemos que $\tau = \dfrac{T}{2At}$

Donde: T = 700 N.m ; t = 3 mm ; a = 75 mm

Del gráfico: $A = \pi(0,01)^2 + 0,075 \times 0,02 = 1,81 \times 10^{-3}\ m^2$

$$\Rightarrow \tau = \frac{700}{2(1,81\times10^{-3})(3\times10^{-3})} \quad \therefore \quad \boxed{\tau = 64,5\ MPa}$$

340. Determinar la dimensión a del problema anterior, de manera que pueda soportar un momento torsionante de 600 N.m con un esfuerzo cortante admisible de 70 MN/m².

Resolución:

Del gráfico anterior tenemos: $A = \pi \times 10^2 + a \times 20 = 314 + 20a\ mm^2$

$$\Rightarrow \tau = \frac{700}{2(3\times10^{-3})(314+20a)10^{-6}} \le 70\times10^6 \Rightarrow a \ge 55,7 \quad \therefore \quad \boxed{a = 55,7\ mm}$$

341. Deducir la fórmula de la torsión $\tau = T\rho/J$ para una sección circular, partiendo de que esta puede considerarse formada por una serie de tubos de paredes delgadas encajados unos dentro de otros, y suponiendo que el esfuerzo cortante en cada fibra es proporcional a su distancia al centro.

Resolución:

Para un anillo de espesor dρ, tenemos:

$$\tau = \frac{dT}{2(\pi\rho^2)d\rho} = \frac{\int_0^T \rho dT}{\int_0^t \rho^2(2\pi\rho)d\rho} = \frac{\rho T}{J} \quad \therefore \quad \boxed{\tau = \frac{\rho T}{J}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

342. Problema ilustrativo.

343. Determinar el esfuerzo cortante máximo y el alargamiento en un resorte helicoidal de 20 espiras de alambre de 20 mm con un radio medio de 80 mm, cuando el resorte soporta una carga de 2 kN. Aplicar la expresión (3-10). Con G = 83 GN/m².

Resolución:

Sabemos que: $m = 2R/d = 2(80)/20 = 8 \Rightarrow 4m = 32$

La expresión 3 - 10 es: $\tau_{máx} = \dfrac{16PR}{\pi d^3}\left(\dfrac{4m-1}{4m-4} + \dfrac{0,615}{m}\right)$

Luego: $\tau_{máx} = \dfrac{16(2\times10^3)(80\times10^{-3})}{\pi(20\times10^{-3})^3}\left(\dfrac{32-1}{32-4} + \dfrac{0,614}{8}\right)$

$$\boxed{\tau_{máx} = 121\ MN/m^2}$$

También sabemos que:

$$\delta = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{64(2000)(0,08)^3(20)}{(83\times10^9)(0,02)^4} \Rightarrow \boxed{\delta = 98,7\ mm}$$

344. Calcular el máximo alargamiento del resorte del problema anterior si está hecho de bronce fosforado para el que G = 42 GN/m² y el esfuerzo máximo puede ser de 140 MN/m². Aplicar (3-10).

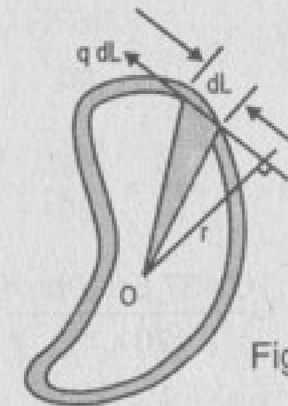


Figura 3-10

Resolución:

Del problema anterior vemos que: $\tau_{máx} = 121 \Rightarrow P = 2000$

$$\Rightarrow \tau = \frac{140}{121} \times 2000 = 2314\ N$$

Luego: $\delta = \dfrac{64PR^3n}{Gd^4} = \dfrac{64(2314)(0,08)^3(20)}{(42\times10^9)(0,02)^4} \Rightarrow \boxed{\delta = 255\ mm}$

345. Se construye un resorte helicoidal enrollando una varilla de 20 mm de diámetro sobre un cilindro de 150 mm de diámetro. Determinar el número de espiras necesarias para permitir un alargamiento de 100 mm sin que el esfuerzo cortante exceda de 140 MPa. Aplicar (3-9) con G = 83 GPa.

Resolución:

Sabemos que:

$$\tau = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right) = \frac{16P(75\times10^{-3})}{\pi(20\times10^{-3})^3}\left(1 + \frac{20\times10^{-3}}{4\times75\times10^{-3}}\right) \le 140\times10^6$$

$$\Rightarrow P \le 2,75\ kN$$

Además: $\delta = \dfrac{64PR^3n}{Gd^4} = \dfrac{64(2,75\times10^3)(75\times10^{-3})^3 n}{83\times10^9(20\times10^{-3})^4} \le 100\times10^{-3}$

$$\Rightarrow n \le 17,9$$

346. Determinar el esfuerzo cortante máximo en un resorte de bronce fosforado de diámetro medio de 200 mm y formado por 24 vueltas de varilla de 20 mm de diámetro cuando se estira una longitud de 100 mm. Aplicar (3-10) con G = 42 GN/m².

Resolución:
Sabemos que:

$$\tau = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{64P(100\times10^{-3})^3 24}{(42\times10^9)(20\times10^{-3})^4} \le 100\times10^{-3} \quad \Rightarrow \quad P \le 437{,}5 \text{ N}$$

Además: $\tau_{máx} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4}+\frac{0{,}615}{m}\right)$

Donde: $m = \frac{D}{d} = \frac{200}{20} = 10$

$$\tau_{máx} = \frac{16(437{,}5)(100\times10^{-3})}{\pi(20\times10^{-3})^3}\left(\frac{4\times10-1}{4\times10-4}+\frac{0{,}615}{10}\right) \Rightarrow \quad \tau_{máx} = \boxed{31{,}9 \text{ MPa}}$$

347. Un embrague está accionado por seis resortes helicoidales dispuestos simétricamente. Cada resorte tiene doce espiras de alambre de acero de 10 mm de diámetro y un diámetro exterior de 50 mm. Determinar la fuerza que hay que ejercer contra la placa del embrague para comprimir los resortes una longitud de 40 mm. ¿Cuál será el esfuerzo cortante máximo en ellos? Aplicar (3-9) con G = 83 GN/m².

Resolución:

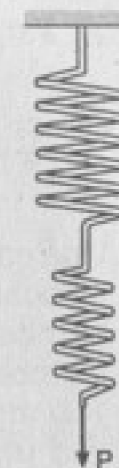
Sabemos que: $\delta = \frac{64PR^3n}{Gd^4} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\delta G d^4}{64R^3n}$

Además: $\tau_{máx} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4}+\frac{0{,}615}{m}\right)$

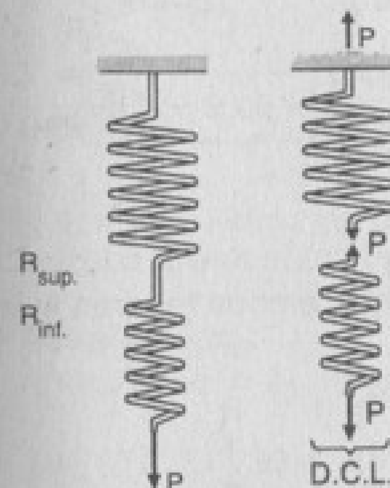
Donde:
$m = 2R/d = 200/20 = 10 \quad \Rightarrow \quad 4m = 40$

$$\tau_{máx} = \frac{16(437{,}5)(0{,}1)}{\pi(0{,}02)^3}\left(\frac{40-1}{40-4}+\frac{0{,}615}{10}\right) \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{máx} = 32 \text{ MN/m}^2}$$

348. Dos resortes de acero colocados en serie, como indica la figura, soportan una carga P. El resorte superior tiene 12 espiras de varilla de 25 mm de diámetro con un radio medio de 100 mm. El inferior tiene 10 espiras de varilla de 20 mm de diámetro con radio medio de 75 mm. Si el esfuerzo cortante no debe exceder en ninguno de ellos de 200 MN/m², determinar P y el alargamiento total del conjunto. Aplicar (3 - 10) con G = 83 GN/m². Calcular la constante del resorte equivalente dividiendo la carga entre el alargamiento.



Resolución:



Resorte superior:
$n_1 = 12$
$d_1 = 25$ mm
$R_1 = 100$ mm $\Rightarrow$ $m_1 = 8$

Resorte inferior:
$n_2 = 10$
$d_2 = 20$ mm
$R_2 = 75$ mm $\Rightarrow$ $m_2 = 7{,}5$
$\tau_{máx} = 200$ MN/m² y G = 83 GN/m²

En el resorte superior:

$$\tau = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4}+\frac{0{,}615}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{16P(0{,}10)}{\pi(0{,}025)^3}\left\{\frac{4(8)-1}{4(8)-4}+\frac{0{,}615}{8}\right\}$$

$\tau = 38\,590P \le 200 \quad \Rightarrow \quad P \le 5{,}18$ kN

En el resorte inferior:

$$\tau = \frac{16P(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left\{\frac{4(7{,}5)-1}{4(7{,}5)-4}+\frac{0{,}615}{7{,}5}\right\} \Rightarrow \tau = 57\,170{,}9P \le 200 \Rightarrow P \le 3{,}5 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{máx.} = 3{,}5 \text{ kN}}$$

Para calcular el alargamiento total: $\delta_T = \delta_1 + \delta_2$

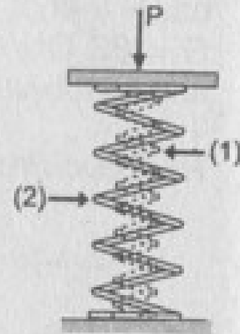
$$\delta_1 = \frac{64PR_1^3n_1}{Gd_1^4} = \frac{64(3{,}5)(0{,}1)^3(12)}{(83\times10^6)(0{,}025)^4} = 0{,}0829 \text{ m}$$

$$\delta_2 = \frac{64PR_2^3n_2}{Gd_2^4} = \frac{64(3{,}5)(0{,}075)^3(10)}{(83\times10^6)^4(0{,}02)^4} = 0{,}0711 \text{ m}$$

$\delta_T = 0{,}154\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_T = (15{,}4\ \text{cm})}$

$k = \dfrac{P}{\delta} = \dfrac{3{,}5\times10^3}{0{,}154} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 22{,}7\ \text{kN/m}}$

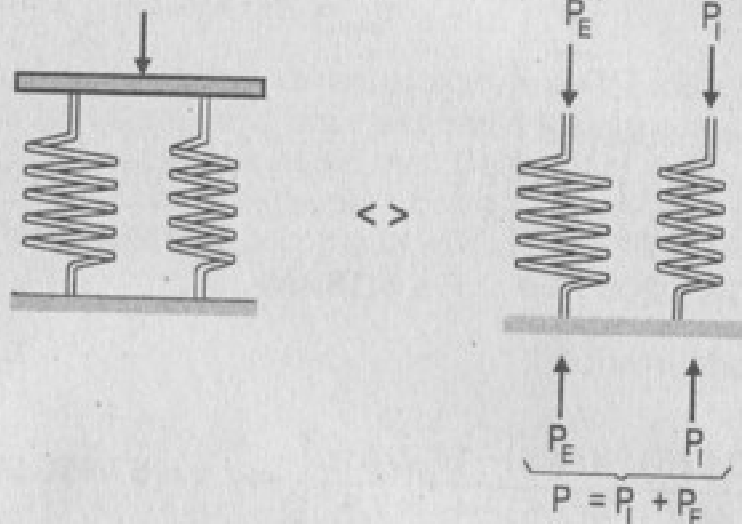
349. Una carga P está soportada por dos resortes helicoidales colocados concéntricamente uno dentro de otro, como se observa en la figura. El interior tiene 30 espiras de alambre de 20 mm de diámetro sobre un radio medio de 150 mm y el exterior, 20 espiras de alambre de 30 mm con un radio medio de 200 mm. Determinar la carga máxima P que pueden soportar, de manera que no se sobrepase el esfuerzo cortante admisible de 140 MPa en cada resorte. Aplicar (3-9) con G = 83 GPa. Inicialmente los dos resortes tienen sus extremos superiores al mismo nivel.



Resolución:

Tenemos 2 resortes concéntricos esto quiere decir que ambos tendrán la misma deformación δ.

El sistema es equivalente A:



Del equilibrio tenemos que: $P = P_I + P_E$ ...(I)

Además:

$$\delta_I = \delta_E \Rightarrow \frac{64P_IR_I^3n_I}{Gd_I^4} = \frac{64P_ER_E^3n_E}{Gd_E^4}$$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{P_I(0{,}15)^3(30)}{(0{,}02)^4} = \frac{P_E(0{,}2)^3(20)}{(0{,}03)^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_E}{P_I} = 3{,}2036 \quad \Rightarrow \quad P_I = 0{,}238P$$

$$P_E = 0{,}762P$$

Aplicando: $\tau = \dfrac{16PR}{\pi d^3}\left(1+\dfrac{d}{4R}\right)$

Reemplazando los datos tenemos:

$$\tau_I = \frac{16(0{,}238P)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[1+\frac{0{,}02}{4(0{,}075)}\right] \Rightarrow \tau_I = 12\ 121{,}24P \leq 140$$

$$\Rightarrow P \leq 11{,}55\ \text{kN}$$

$$\tau_{II} = \frac{16(0{,}762P)(0{,}1)}{\pi(0{,}03)^3}\left[1+\frac{0{,}03}{4(0{,}1)}\right] \Rightarrow \tau_{II} = 15\ 451P \leq 140 \Rightarrow P \leq 9{,}06\ \text{kN}$$

$\therefore \quad \boxed{P_{máx} = 9{,}06\ \text{kN}}$

350. Si el resorte interior del problema anterior es de bronce fosforado con G = 42 GN/m², calcular el esfuerzo cortante máximo en cada resorte con P = 5 kN. Aplicar (3-10).

Resolución:

Aplicando $\delta_I = \delta_E$, tenemos:

$$\frac{64P_I(0{,}075)^3(30)}{42(0{,}02)^4} = \frac{64P_E(0{,}1)^3(20)}{83(0{,}03)^4}$$

$$\frac{P_E}{P_I} = 6{,}33 \quad \Rightarrow \quad P_I = 0{,}79\ \text{kN} \quad ; \quad P_E = 4{,}21\ \text{kN}$$

Calculando: $m_I = \dfrac{2R_I}{d_I} = 7{,}5$; $m_E = 6{,}67$

Aplicando: $\dfrac{16PR}{\pi d^3}\left(\dfrac{4m-1}{4m-4}+\dfrac{0{,}615}{m}\right)$

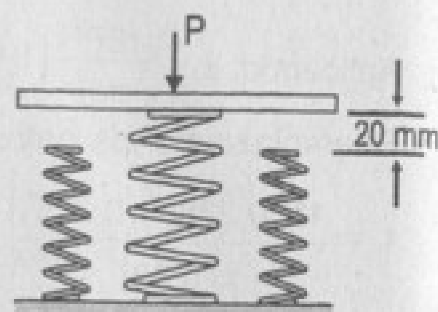
Reemplazando, tenemos:

$$\tau_I = \frac{16(790)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[\frac{4(7{,}5)-1}{4(7{,}5)-4}+\frac{0{,}615}{7{,}5}\right] = 45{,}1\ \text{MPa}$$

$$\tau_E = \frac{16(4210)(0{,}1)}{\pi(0{,}03)^3}\left[\frac{4(6{,}67)-1}{4(6{,}67)-4}+\frac{0{,}615}{6{,}67}\right] = 97{,}23\ \text{MPa}$$

$\therefore \boxed{\tau_I = 45{,}1\ \text{MPa}} \quad ; \quad \boxed{\tau_E = 97{,}23\ \text{MPa}}$

351. Una placa rígida se apoya en el resorte central, ver figura, que es 20 mm más largo que los dos resortes laterales, simétricamente colocados. Cada uno de estos laterales tiene 18 espiras de alambre de 10 mm sobre un diámetro medio de 100 mm. El resorte central tiene 24 espiras de alambre de 20 mm y diámetro medio de 150 mm. Si se aplica una carga P = 5 kN en la placa, determinar el esfuerzo cortante máximo en cada resorte. Aplicar (3-9) con G = 83 GN/m².



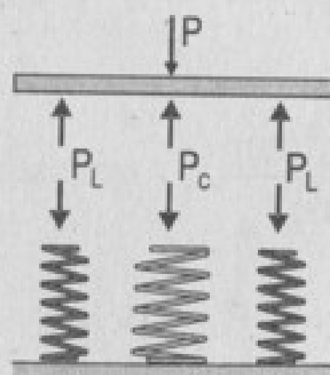
Resolución:

Primeramente, veremos si para la carga P deforma más o menos:

$\delta = 20$ mm

$$\delta_C = \frac{64(5)(0{,}075)^3(24)\times10^3}{(83\times10^9)(0{,}02)^4} = 0{,}24\ \text{m} > 20\ \text{mm}$$

Entonces, actúa todo el sistema:



Equilibrio: $\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_L + P_C = P = 5000$

Compatibilidad de deformación: $\delta_C = 0{,}02 + \delta_L$ ... (*)

Aplicando $\delta = \dfrac{64PR^3n}{Gd^4}$

Tenemos: $$\frac{64P_C\,(0{,}075)^3\,24}{83\times10^9(0{,}02)^4} - \frac{64P_L\,(0{,}05)^3\,18}{83\times10^9(0{,}01)^4} = 0{,}02$$

$$4{,}88P_C - 17{,}35P_L = 2000$$

$$4{,}88(5000 - 2P_L) - 17{,}35P_L = 2000$$

$$27{,}11P_L = 22\,400$$

$$P_L = 826{,}26\ \text{N}$$

$$P_C = 3347{,}48\ \text{N}$$

$$\tau_C = \frac{16(3347{,}48)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[1+\frac{0{,}02}{4(0{,}075)}\right] \Rightarrow \boxed{\tau_C = 170\ \text{MPa}}$$

352. Resolver el problema 351 si los resortes laterales son de bronce fosforado para el que G = 42 GN/m². ¿Se puede predecir el efecto cualitativo de este cambio en los esfuerzos?

Resolución:

$G_L = 42$ GN/m² ; $G_C = 83$ GPa

Sí, los laterales resisten en la proporción (42/83) veces del anterior.

Reemplazando en la ecuación (*) del problema anterior:

$$9{,}64P_C - 17{,}35P_L = 2000$$

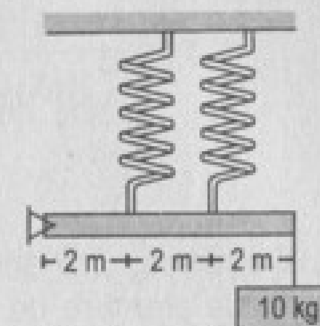
$$9{,}64(5000 - 2P_L) - 17{,}35P_L = 2000$$

$$P_L = 1711\ \text{N}$$

$$P_C = 1578\ \text{N}$$

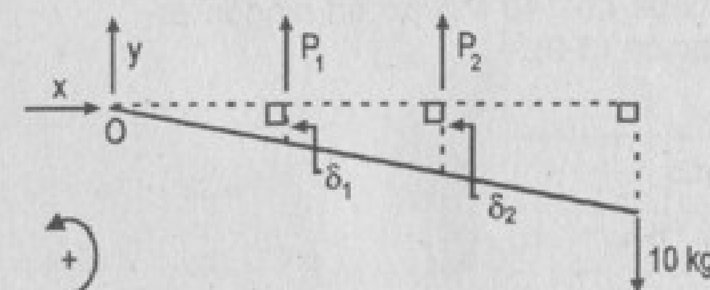
$$\tau_C = \frac{16(1578)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[1+\frac{0{,}02}{4(0{,}075)}\right] \Rightarrow \boxed{\tau_C = 80\ \text{MPa}}$$

353. Una barra rígida articulada en un extremo pende de dos resortes idénticos, como se observa en la figura. Cada uno de ellos tiene 20 espiras de alambre de 10 mm con diámetro medio de 150 mm. Determinar el esfuerzo cortante máximo en los resortes aplicando (3-9). Desprecie la masa de la barra rígida.



Resolución:

Dibujando el diagrama de deformación: D.C.L.



Del equilibrio: ver D.C.L.

$\circlearrowleft\!+\ \Sigma M_O = 0:\ P_1(2) + P_2(4) - 10(6) = 0$

$$P_1 + 2P_2 = 30 \qquad ...(1)$$

De la compatibilidad de deformaciones:

Por semejanza: $\frac{\delta_1}{2}=\frac{\delta_2}{4} \Rightarrow \delta_2=2\delta_1$ ...(2)

Aplicando $\delta=\frac{64PR^3n}{Gd^4}$ en (2):

$$\frac{64(P_2)R^3n}{Gd^4}=2\left[\frac{64(P_1)R^3n}{Gd^4}\right] \Rightarrow P_2=2P_1 \quad ...(3)$$

De (1) y (3) tenemos:

$P_1+2(2P_1)=30 \Rightarrow P_1=6$ kg y $P_2=12$ kg

Para calcular el esfuerzo constante máximo, aplicamos:

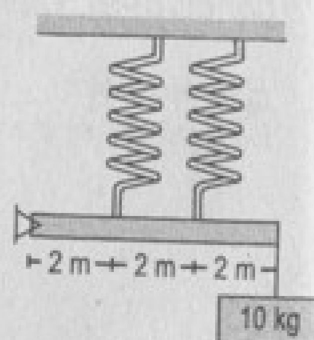
$$\tau=\frac{16PR}{\pi d^3}\left(1+\frac{d}{4R}\right)$$

$$\tau_1=\frac{16(6)(0,075)}{\pi(0,01)^3}\left(1+\frac{0,01}{4(0,075)}\right)\times 9,81=23,2\ MN/m^2$$

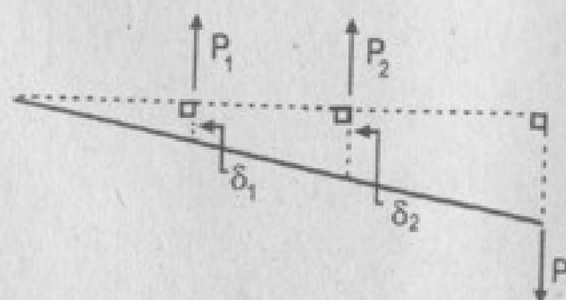
$$\tau_2=\frac{16(12)(0,075)}{\pi(0,01)^3}\left[1+\frac{0,01}{4(0,075)}\right]\times 9,81=46,5\ MN/m^2$$

$$\therefore \boxed{\tau_{máx}=46,5\ MN/m^2}$$

354. Si cada resorte del problema anterior tiene 16 espiras de alambre de 10 mm sobre 160 mm de diámetro medio, determinar la carga máxima P para que el esfuerzo no exceda de 140 MN/m² en ningún resorte. Use la ecuación (3-9).



Resolución:
Dibujando el D.C.L.:



Del equilibrio: $P_1+2P_2=3P$ ...(1)

De las deformaciones $P_2=2P_1$ ...(2)

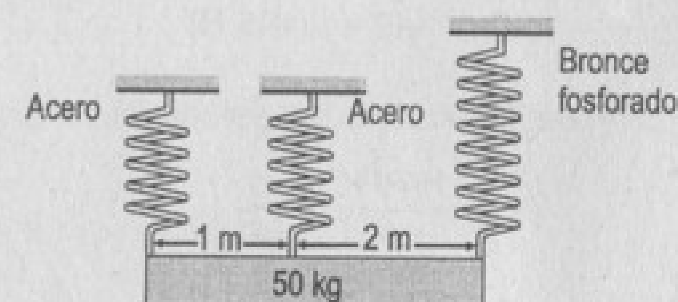
De (1) y (2) tenemos: $\begin{cases}P_1=3P/5\\ P_2=6P/5\end{cases}$

Podemos apreciar que el resorte (2) está más cargado que el resorte (1), por tanto:

$$\tau_2=\frac{16(6P/5)(0,08)}{\pi(0,01)^3}\left[1+\frac{0,01}{4(0,08)}\right]\leq 140\times10^6$$

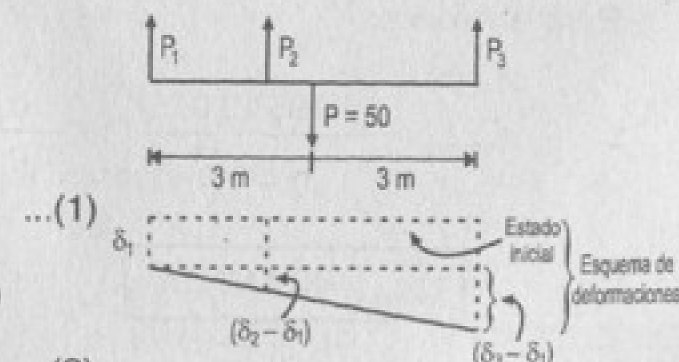
$$P\leq 277N(28,3\ kg) \qquad \therefore \boxed{P_{máx}=28,3\ kg}$$

355. Como se indica en la figura, un bloque rígido de 50 kg pende de tres resortes cuyos extremos inferiores, inicialmente, están al mismo nivel. Cada resorte de acero tiene 24 espiras de alambre de 10 mm de diámetro sobre un diámetro medio de 100 mm y G = 83 GN/m². El resorte de bronce tiene 48 espiras de alambre de 20 mm y diámetro medio de 150 mm, con G = 42 GN/m². Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada resorte aplicando (3-9).



Resolución:
Cada resorte de

Aplicando el equilibrio en el D.C.L.:



$+\uparrow \Sigma F_v=0:\ P_1+P_2+P_3-P=0$

$P_1+P_2+P_3=50$ ...(1)

$\circlearrowleft \Sigma M_1=0:\ P_2(1)+P_3(3)-P(1,5)=0$

$P_2+3P_3=75$ ...(2)

Aplicando compatibilidad de deformaciones por semejanza, tenemos:

$$\frac{\delta_2-\delta_1}{1}=\frac{\delta_3-\delta_1}{3} \Rightarrow \delta_3=3\delta_2-2\delta_1 \qquad ...(3)$$

Aplicando: $\delta=\frac{64PR^3n}{Gd^4}$ en (3), tenemos:

$$\frac{64P_3(0,075)^3(48)^2}{42(0,02)^4}=\frac{64(0,05)^3(24)}{83(0,01)^4}(3P_2-2P_1)$$

$$P_3=3,6P_2-2,4P_1 \qquad ...(4)$$

De (1), (2) y (4) se obtiene lo siguiente:

P_1 = 14,8 kg (145 N)
P_2 = 15,3 kg (150 N)
P_3 = 19,9 kg (195 N)

Para determinar los esfuerzos cortantes en cada resorte aplicamos:

$$\tau=\frac{16PR}{\pi d^3}\left(1+\frac{d}{4R}\right)$$

Para el acero:

$$\tau_{acero,1}=\frac{16(145)(0,05)}{\pi(0,01)^3}\left[1+\frac{0,01}{4(0,05)}\right]=38,77\ MN/m^2$$

$$\tau_{acero,2}=40,1\ MN/m^2$$

Para el bronce:

$$\tau_{bronce}=\frac{16(195)(0,075)}{\pi(0,02)^3}\left[1+\frac{0,02}{4(0,075)}\right]=9,93\ MN/m^2$$

$$\therefore \boxed{\tau_{acero}=40,1\ MN/m^2} \quad \wedge \quad \boxed{\tau_{bronce}=9,93\ MN/m^2}$$

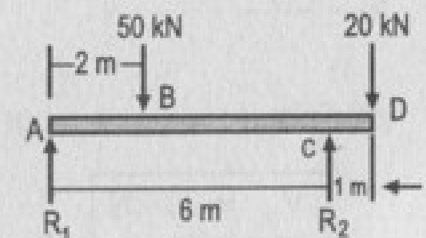
CAPÍTULO 4

FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE EN VIGAS

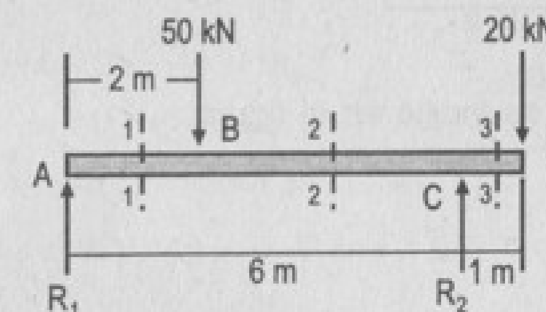
Escribir las distribuciones de momentos flexionantes y fuerza cortante en las vigas de los problemas siguientes. Trazar también sus diagramas, marcando los valores en todos los puntos de discontinuidad, y en los de fuerza cortante nula. Despreciar el peso propio de las vigas.

401 y 402: problemas ilustrativos.

403. Viga cargada como se indica en la figura:



Resolución:



(I) Calculamos las reacciones, aplicando las ecuaciones de equilibrio.

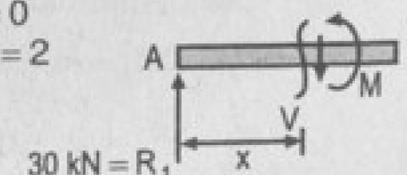
$+\circlearrowleft\ \Sigma M_A=0:\ -50(2)+R_2(6)-20(7)=0 \Rightarrow R_2=40$ kN

$+\uparrow\ \Sigma F_v=0:\ R_1-50+R_2-20=0 \Rightarrow R_1=30$ kN

(II) En los cortes calculamos las fuerzas internas.

Corte 1 - 1: x = ⟨0;2⟩

$+\circlearrowleft\Sigma M_x=0:\ M-30x=0 \Rightarrow M=30x\begin{cases}M=0,\ x=0\\ M=60,\ x=2\end{cases}$



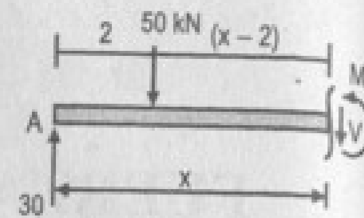
$+\uparrow\ \Sigma F_v=0:\ 30-V=0 \Rightarrow V=30$, cte.

Corte 2 - 2: $x = \langle 2;6 \rangle$

$+\circlearrowright \Sigma M_x = 0$: $M + 50(x-2) - 30x = 0 \Rightarrow M = 100 - 20x$

$M_{x=2} = 60$ kN.m ; $M_{x=6} = -20$ kN.m

$\uparrow \Sigma F_V$: $30 - 50 - V = 0 \Rightarrow V = -20$, cte.



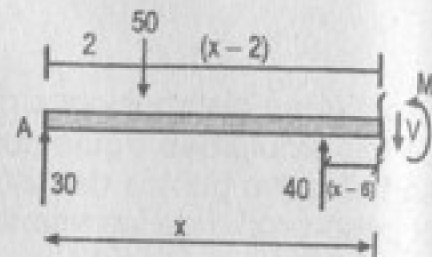
Corte 3 - 3: $x = \langle 6;7 \rangle$

$+\circlearrowright \Sigma M_x = 0$: $M + 50(x-2) - 40(x-6) - 30x = 0$

$M = 20x - 140$

$M_{x=6} = -20$, $M_{x=7} = 0$

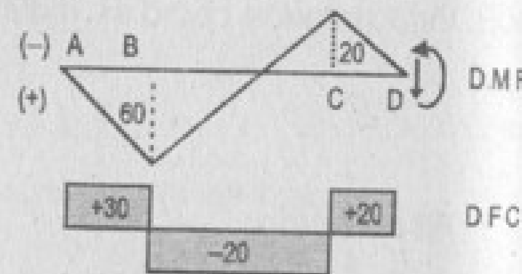
$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $30 - 50 + 40 - V = 0 \Rightarrow V = 20$, cte.



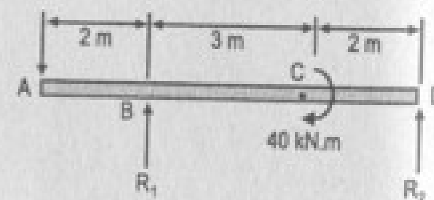
(III) Dibujamos los diagramas:

$\boxed{V_{CD} = 20 \text{ kN}}$

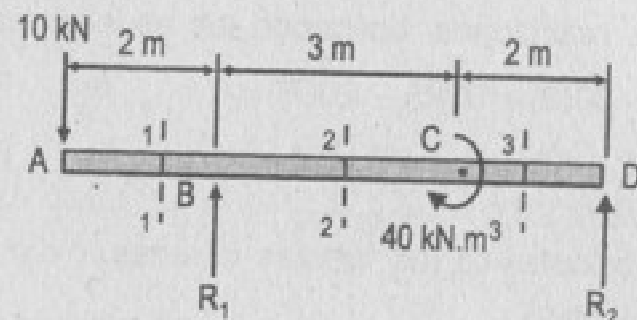
$\boxed{M_{CD} = 20(x - 140) \text{ kN.m}}$; $x = \langle 6;7 \rangle$



404. Viga cargada como se indica en la figura.



Resolución:



(I) Calculamos las reacciones:

$+\circlearrowright$ $\Sigma M_B = 0$: $10(2) - 40 + R_2(5) = 0 \Rightarrow R_2 = 4$ kN

$+\uparrow$ $\Sigma F_V = 0$: $-10 + R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 6$ kN

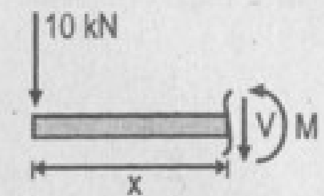
(II) En los cortes, calculamos las fuerzas internas:

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$

$+\circlearrowright$ $\Sigma M_{1-1} = 0$: $M + 10(x) = 0 \Rightarrow M = -10x$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = -20$ kN.m

$+\uparrow$ $\Sigma F_V = 0$: $-10 - V = 0 \Rightarrow V = -10$ kN (cte.)



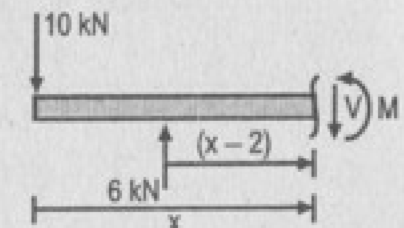
Corte 2 - 2: $x = \langle 2;5 \rangle$

$+\circlearrowright$ $\Sigma M_{2-2} = 0$: $M + 10(x) - 6(x-2) = 0$

$\Rightarrow M = -4x - 12$

$M_{x=2} = -20$; $M_{x=5} = -32$ kN.m

$+\uparrow$ $\Sigma F_V = 0$: $-10 + 6 - V = 0 \Rightarrow V = -4$ kN (cte.)



Corte 3 - 3: $x = \langle 5;7 \rangle$

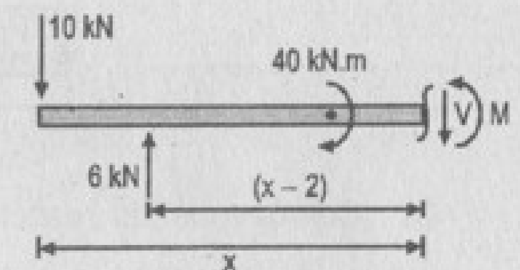
$+\circlearrowright$ $\Sigma M_{3-3} = 0$:

$M + 10(x) - 6(x-2) - 40 = 0$

$\Rightarrow M = -4x + 28$

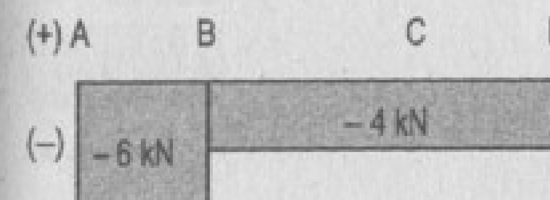
$M_{x=5} = 8$ kN.m ; $M_{x=7} = 0$ kN.m

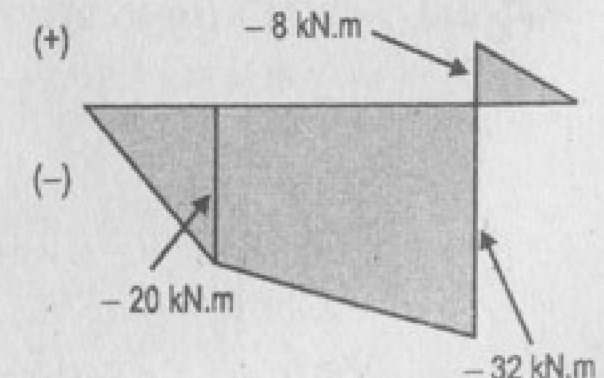
$+\uparrow$ $\Sigma F_V = 0$: $-10 + 6 - V = 0 \Rightarrow V = -4$ kN (cte.)



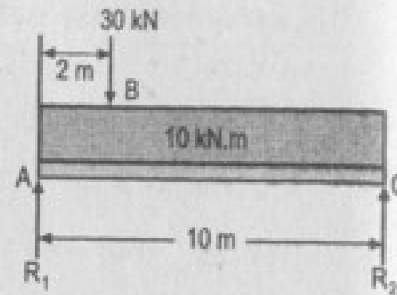
(III) Dibujamos los diagramas:

$\boxed{M_{CD} = (-4x + 28)}$; $x = \langle 5;7 \rangle$

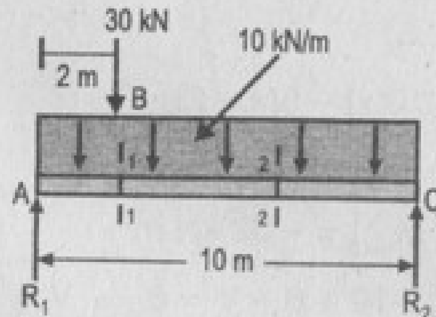




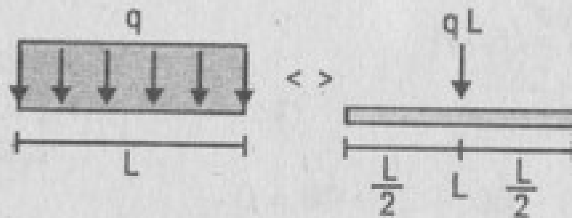
405. Viga cargada como se indica en la figura.



Resolución:



Nota: para cargas distribuidas. Es equivalente solo para calcular reacciones.



(I) Calculamos las reacciones:

$+\circlearrowright\ \Sigma M_A = 0$: $R_2(10) - (10 \times 10)(10/2) - 30(2) = 0 \Rightarrow R_2 = 56$ kN

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $R_1 - 30 - (10 \times 10) + R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 74$ kN

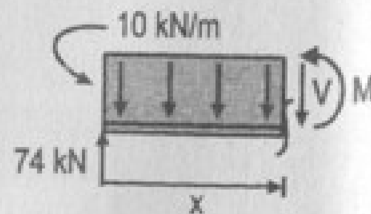
(II) Calculamos los momentos y cortantes en los cortes indicados:

Corte 1 - 1, $x = \langle 0;2 \rangle$

$+\circlearrowright\ \Sigma M_{1-1} = 0$: $M + (10x)(x/2) - 74(x) = 0$

$M = 74x - 5x^2$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = 128$ kN.m



$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $74 - 10x - V = 0 \Rightarrow V = 74 - 10x$

$V_{x=0} = 74$ kN; $V_{x=2} = 54$ kN

$V = 0 \Rightarrow x = 74/10 = 7{,}4 \Rightarrow \nexists\ x = \langle 0;2 \rangle$

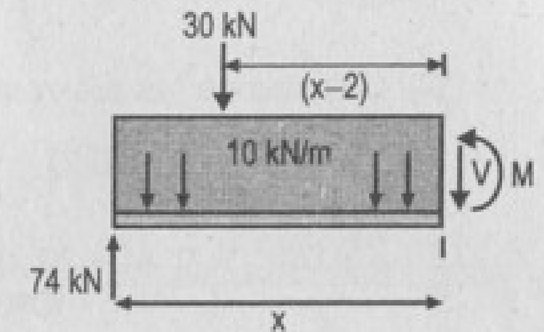
Corte 2 - 2; $x = \langle 2;10 \rangle$

$+\circlearrowright\ \Sigma M_{2-2} = 0$: $M + (10x)(x/2) + 30(x - 2) - 74x = 0$

$M = 60 + 44x - 5x^2$

$M_{x=2} = 128$ kN.m ; $M_{x=10} = 0$

$M_{x=4,4} = 156{,}8$ kN.m



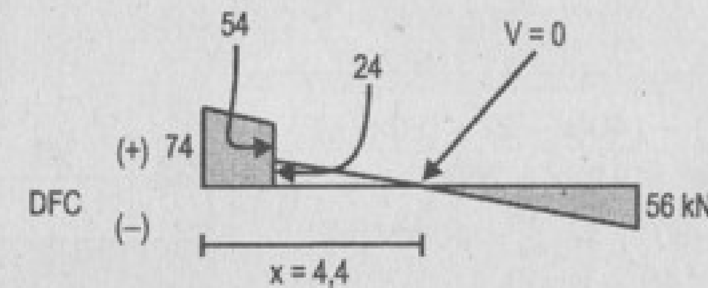
$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $74 - 30 - 10x - V = 0$

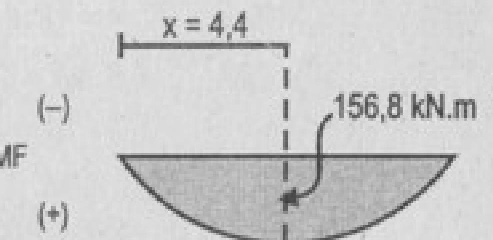
$\Rightarrow V = 44 - 10x$

$V_{x=2} = 24$; $V_{x=10} = -56$ kN

$V = 44 - 10x = 0 \Rightarrow x = 4{,}4 \Rightarrow x = \langle 2;10 \rangle$

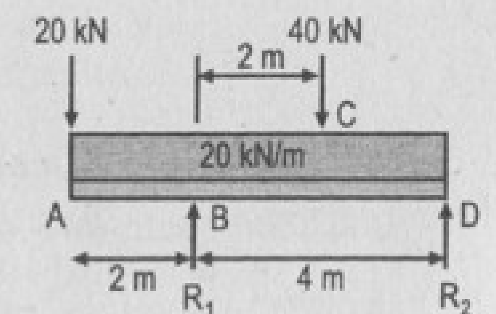
(III) Dibujamos los diagramas:



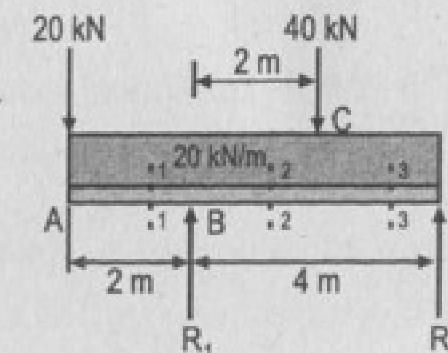


$\boxed{M_{BC} = -5x^2 + 44x + 60}$; $x = \langle 2;10 \rangle$

406. Viga cargada como se indica en la figura.



Resolución:



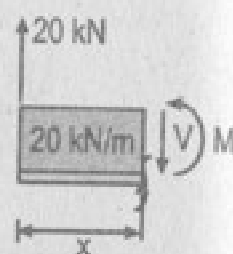
(I) Calculamos las reacciones:

$+\circlearrowright\ \Sigma M_D = 0$: $40(2) - R_1(4) + 20(6) + (20 \times 6)(6/2) = 0 \Rightarrow R_1 = 140$ kN

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $-20 + R_1 - 20(6) - 40 + R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 40$ kN

(II) Calculamos las fuerzas (momentos y cortante) en los cortes.

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$



$+\circlearrowright\ \Sigma M_{1-1} = 0$: $M + 20(x) + (20x)(x/2) = 0$

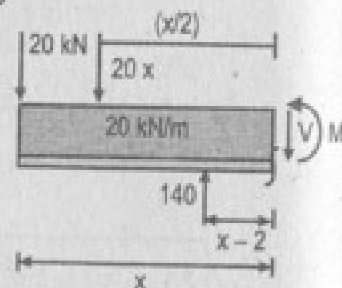
$M = -10x^2 - 20x$

$M_{x=0} = 0 \ ; \ M_{x=2} = -80$ kN.m

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $-20 - 20x - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -20 - 20x$

$V_{x=0} = -20 \ ; \ V_{x=2} = -60$ kN

Corte 2 - 2: $x = \langle 2;4 \rangle$



$+\circlearrowright\ \Sigma M_{2-2} = 0$: $M + 20(x) - 140(x - 2) + (20x)(x/2) = 0$

$M = -10x^2 + 120x - 280$

$M_{x=2} = -80 \ ; \ M_{x=4} = 40$ kN.m

$+\uparrow\ F_V = 0$: $-20 - 20x + 140 - V = 0$

$V = -20x + 120$

$V_{x=2} = 80$ kN ; $V_{x=4} = 40$ kN

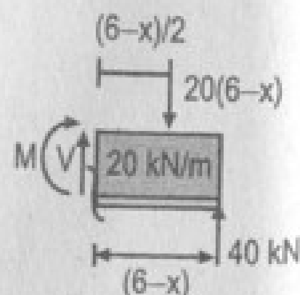
$V = -20x + 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \ ; \ \nexists\, x = \langle 2;4 \rangle$

Corte 3 - 3: $x = \langle 4;6 \rangle$

$+\circlearrowright\ \Sigma M_{3-3} = 0$: $-M + 40(6 - x) - 20(6 - x)(6 - x)/2 = 0$

$M = -10x^2 + 80x - 120$

$M_{x=4} = 40; \ M_{x=6} = 0$ kN.m



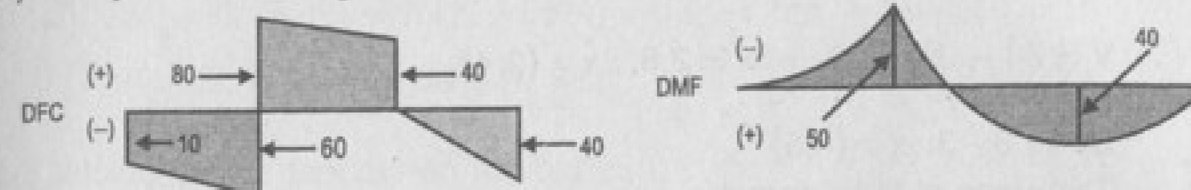
$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $V - 20(6 - x) + 40 = 0$

$V = -20x + 80$

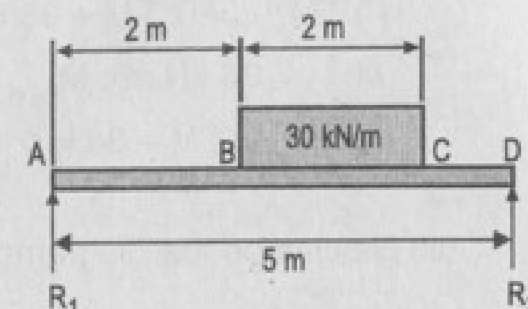
$V_{x=4} = 0$ kN ; $V_{x=6} = -40$ kN

$V = 0 = -20x + 80 \Rightarrow x = 4; \quad x = \langle 4;6 \rangle$

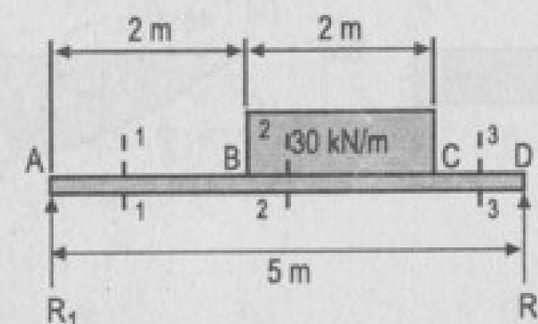
(III) Dibujamos los diagramas:



407. Viga cargada como se indica en la figura.



Resolución:



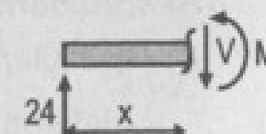
(I) Calculamos las reacciones:

$+\circlearrowright\ \Sigma M_A = 0$: $R_2(5) - [30(2)]\,(2 + 2/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 36$ kN

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $R_1 - [30(2)] + R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 24$ kN

(II) Calculamos los momentos y cortantes en los cortes:

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$

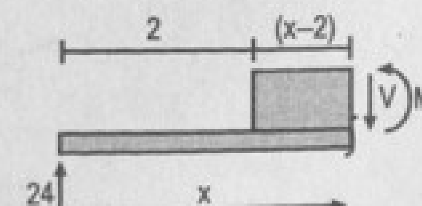


$+\circlearrowright\ \Sigma M_{1-1} = 0$: $M - 24x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 24x$

$M_{x=0} = 0 \ ; M_{x=2} = 48$ kN.m

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $24 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 24$ (cte.)

Corte 2 - 2: $x = \langle 2;4 \rangle$



$+\circlearrowright\ \Sigma M_{2-2} = 0$: $M - 24x + [30(x-2)(x-2)/2] = 0$

$M = -15x^2 + 84x - 60$

$M_{x=2} = 48 \quad ; \quad M_{x=4} = 36$ kN.m

$M_{x=2,8} = 57{,}6$ kN.m

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $24 - [30\,(x - 2)] - V = 0 \Rightarrow V = 84 - 30x$

$V_{x=2} = 24$ kN ; $V_{x=4} = -36$ kN

$V = 84 - 30x = 0 \Rightarrow x = 2{,}8; \exists x = \langle 2;4 \rangle$

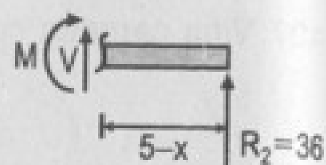
Corte 3 - 3: $x = \langle 4;5 \rangle$

Tomamos el lado derecho

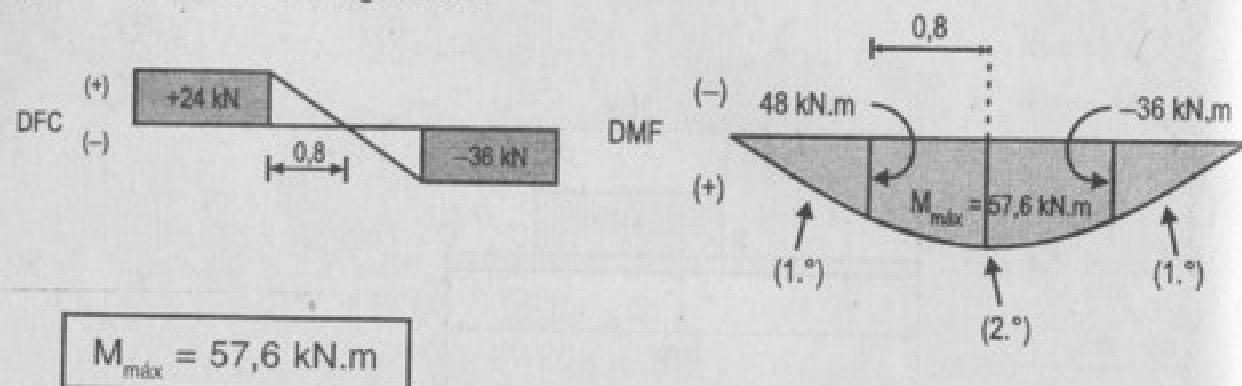
$+\circlearrowleft\ \Sigma M_{3-3} = 0: -M + 36(5 - x) = 0 \Rightarrow M = 180 - 36x$

$M_{x=4} = 36$ kN.m ; $M_{x=5} = 0$ kN.m

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0: V + 36 = 0 \Rightarrow V = -36$ kN

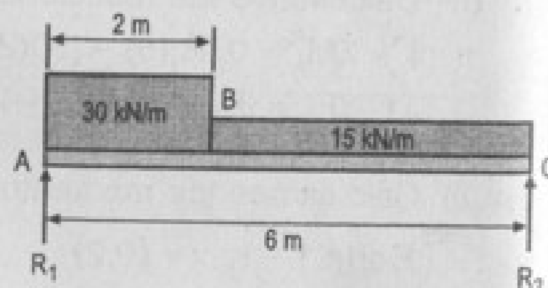


(III) Dibujamos los diagramas:



$M_{máx} = 57{,}6$ kN.m

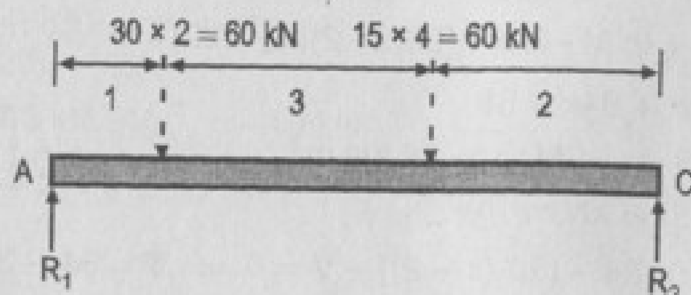
408. Viga cargada como se indica en la figura.



Resolución:

(I) Calculamos las reacciones:

Sistema equivalente solo para el cálculo de las reacciones.

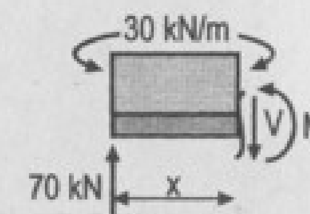


$+\circlearrowleft\ \Sigma M_A = 0: R_2(6) - 60(1) - 60(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 50$ kN

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0: R_1 - 60 - 60 + R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 70$ kN

(II) Cálculo de las fuerzas en los cortes:

Corte 1 - 1; $x = \langle 0;2 \rangle$



$+\circlearrowleft\ \Sigma M_{1-1} = 0: M + (30x)(x/2) - 70(x) = 0$

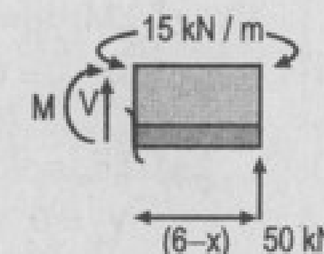
$M = -15x^2 + 70x$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = 80$ kN.m

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 70 - 30(x) - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -30x + 70$

$V_{x=0} = 70$ kN; $V_{x=2} = +10$ kN

Corte 2 - 2; $x = \langle 2;6 \rangle$



$+\circlearrowleft\ \Sigma M_{2-2} = 0: -M - [(15)(6-x)](6-x)/2 + 50(6-x) = 0$

$M = -7{,}5x^2 + 40x + 30$

$M_{x=2} = 80$ kN.m ; $M_{x=6} = 0$

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0 : V - 15(6 - x) + 50 = 0$

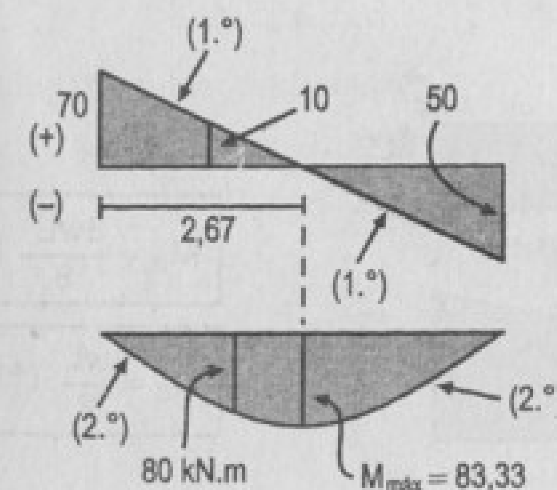
$V = -15x + 40$

$V_{x=2} = 10$ kN ; $V_{x=6} = -50$ kN

$V = 0 = -15x + 40 \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}67\ \exists\ x = \langle 2;6 \rangle$

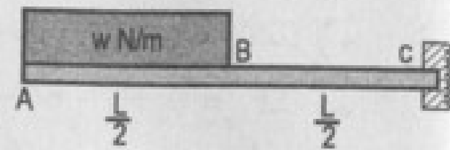
$\therefore\ M_{máx} = M_{x=2,67} = 83{,}33$ kN.m

(III) Dibujamos los diagramas de momento flector y fuerza cortante:

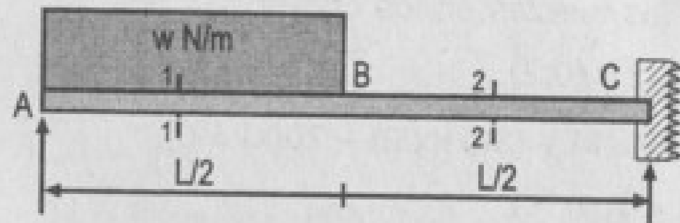


$M_{máx} = 83{,}33$ kN.m

409. Ménsula cargada como se indica en la figura.



Resolución:



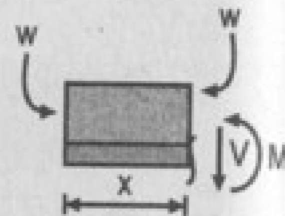
El cálculo de las reacciones en C es opcional.

(I) Cálculo de las fuerzas en los cortes:

Corte 1 - 1 ; $x = \langle 0; L/2 \rangle$

$\circlearrowleft + \Sigma M_{1-1} = 0$: $M + [w(x)]\,(x/2) = 0 \Rightarrow M = -wx^2/2$

$M_{x=0} = 0$; $\quad M_{x=L/2} = -wL^2/4$



$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $-w(x) - V = 0 \;\Rightarrow\; V = -wx$

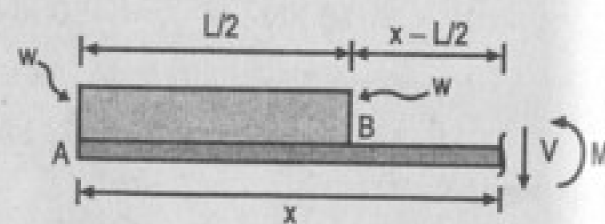
$V_x = 0$; $V_{x=L/2} = -wL/2$

Corte 2 - 2 ; $x = \langle L/2, L \rangle$

$\circlearrowleft + \Sigma M_{2-2} = 0$: $M + [w(L/2)]\,(x - L/2 + (L/2)/2) = 0$

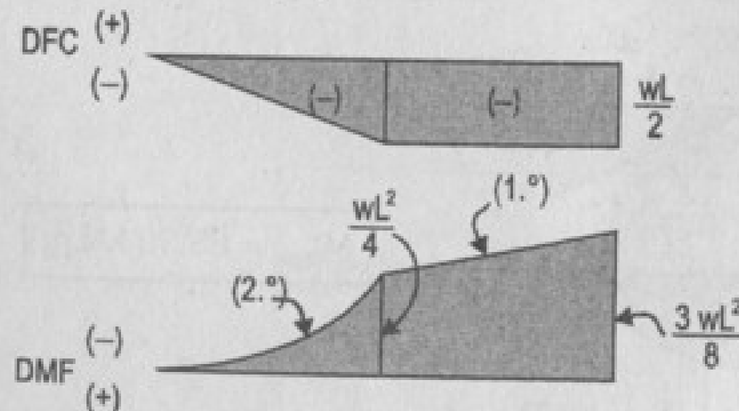
$$M = -\frac{wL}{2}x + \frac{wL^2}{8}$$

$$M_{x=L/2} = -\frac{wL^2}{4}\;;\; M_{x=L} = -\frac{3wL^2}{8}$$



$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $-[w(L/2)] - V \Rightarrow V = -\dfrac{wL}{2}$

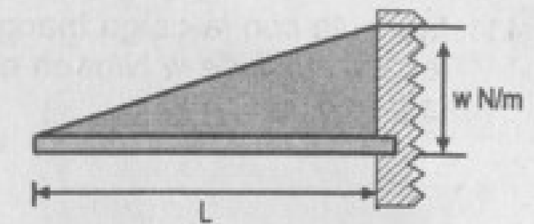
(II) Dibujamos los diagramas:



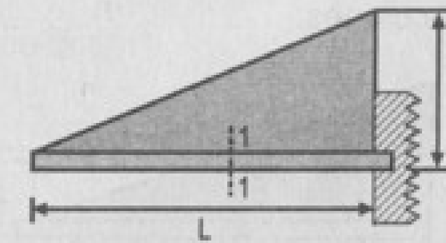
$$M_C = \frac{3wL^2}{8}\;(\circlearrowright)$$

$$V_C = \frac{wL}{2}\;(\uparrow)$$

410. Ménsula cargada con la carga triangular que indica la figura.

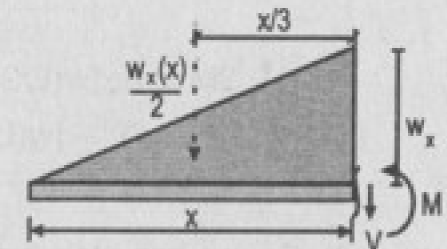


Resolución:



(I) Calculamos las fuerzas en el corte 1 - 1: $x = \langle 0; L \rangle$

Por semejanza: $\dfrac{w_x}{x} = \dfrac{w}{L} \;\Rightarrow\; w_x = w\dfrac{x}{L}$



$\circlearrowleft + \Sigma M_{1-1} = 0$: $M + \left[\left(w\dfrac{x}{L}\right)(x)/2\right](x/3) = 0$

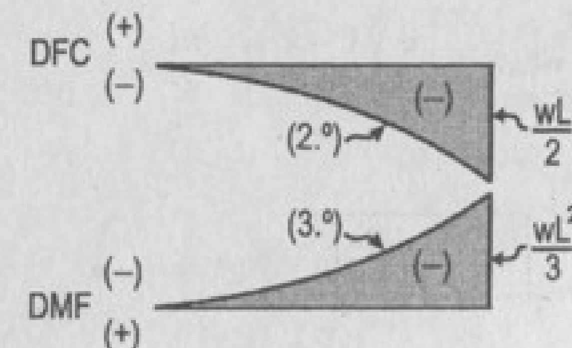
$$M = -\frac{w}{6L}x^3$$

$M_{x=0} = 0$; $\quad \boxed{M_{x=L} = -\dfrac{wL^2}{6}}$

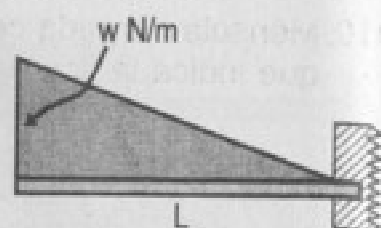
$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $-\left[\left(\dfrac{wx}{L}\right)(x)/2\right] - V = 0 \;\Rightarrow\; V = -\dfrac{wx^2}{2L}$

$V_{x=0} = 0$; $\quad \boxed{V_{x=L} = -\dfrac{wL}{6}}$

(II) Dibujamos los diagramas:

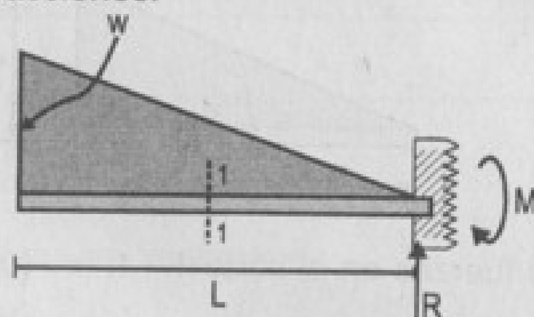


411. Ménsula con la carga triangular que indica la figura, la cual varía de w N/m en el extremo libre a cero en la pared.



Resolución:

(I) Calculamos las reacciones:



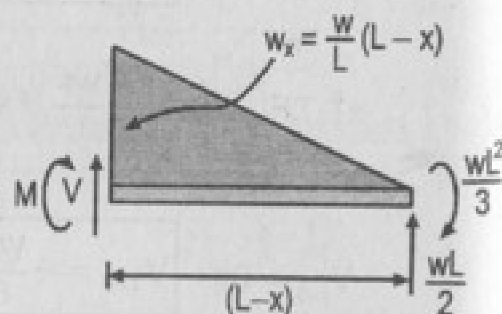
$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M = 0$: $[w(L/2)]\,[L(2/3)] - M = 0 \Rightarrow M = \dfrac{wL^2}{3}$

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $-[w(L/2)] + R = 0 \Rightarrow R = wL/2$

(II) Calculamos las fuerzas en el corte 1-1: $x = \langle 0,L \rangle$

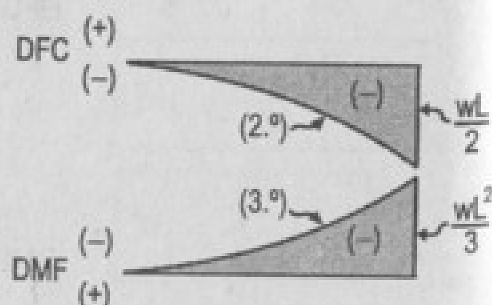
$$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M_{1\text{-}1} = 0:\ \frac{wL}{2}(L-x) - \frac{wL^2}{3} - \left[w\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\frac{(L-x)}{2}\frac{(L-x)}{3} - M = 0$$

$$\boxed{M = \frac{wx^3}{6L} - \frac{wx^2}{2}}\ \begin{cases} M_{x=0} = 0 \\ \boxed{M_{x=L} = -\dfrac{wL^2}{3}} \end{cases}$$

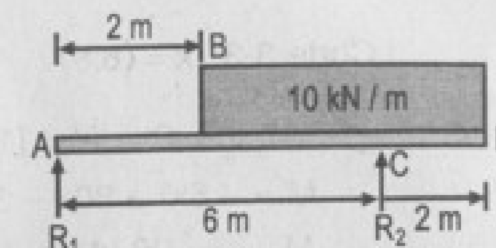


$$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0:\ V - \left[w\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(\frac{L-x}{2}\right)\right] + \frac{wL}{2} = 0$$

$$V = \frac{wx^2}{2L} - wx\ \begin{cases} V_{x=0} = 0 \\ \boxed{V_{x=L} = -\dfrac{wL}{2}} \end{cases}$$

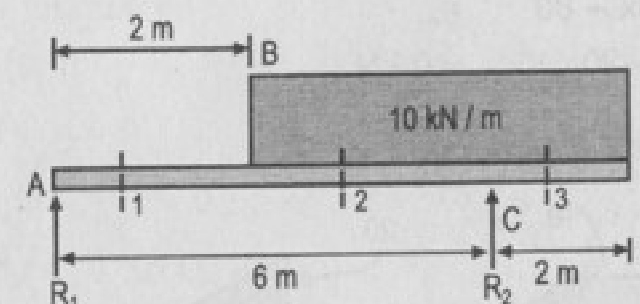


412. Viga con la carga indicada en la figura.



Resolución:

(I) Calculamos las reacciones:



$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0$: $R_2(6) - [10(6)](2 + 6/2) = 0 \Rightarrow R_2 = 50$ kN

$+\uparrow\Sigma F_V = 0$: $R_1 - [10(6)] + R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 10$ kN

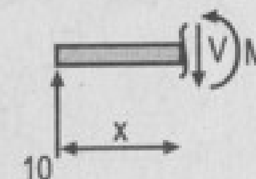
(II) Cálculo de las fuerzas cortantes y momento flexionante en cortes:

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$

$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M_{1-1} = 0$: $M - 10x = 0 \Rightarrow M = 10x$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = +20$ kN.m

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $10 - V = 0 \Rightarrow V = 10$ kN (cte.)



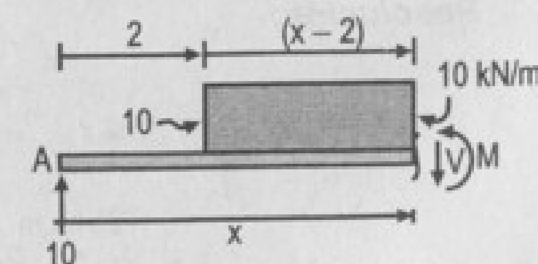
Corte 2 - 2: $x = \langle 2;6 \rangle$

$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M_{2-2} = 0$: $M - 10x + [10(x-2)(x-2)/2] = 0$

$M = -5x^2 + 30x - 20$

$M_{x=2} = +20$ kN.m

$M_{x=6} = -20$ kN.m



$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0$: $10 - [10(x-2)] - V = 0$

$V = -10x + 30$

$V_{x=2} = 10$; $V_{x=6} = -30$ kN

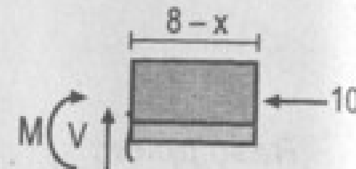
$V = 0 = -10x + 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow M_{máx} = M_{x=3} = 25$

Corte 3-3: $x = \langle 6;8 \rangle$

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_{3-3} = 0: - M - [10(8 - x)(8 - x)/2] = 0$

$M = - 5x^2 + 80x - 320$

$M_{x=6} = -20$ kN.m; $M_{x=8} = 0$

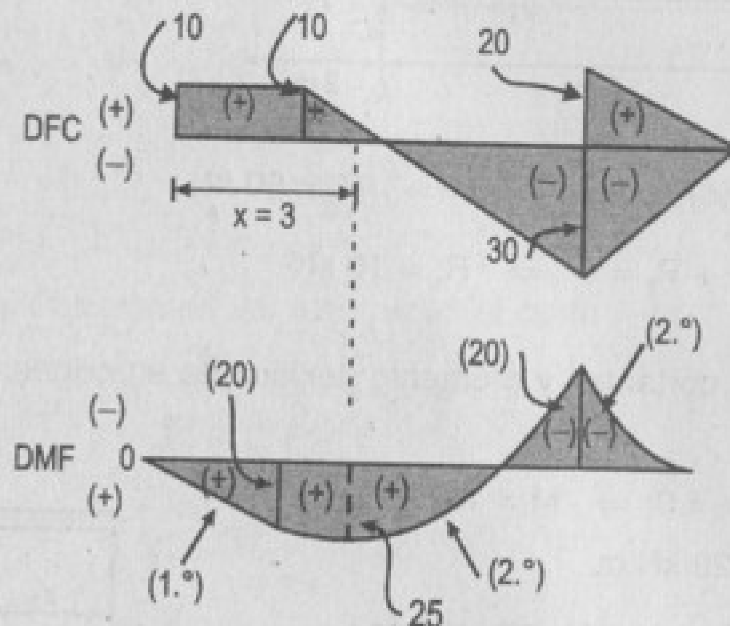


$+\uparrow \; \Sigma F_V = 0: V - [10(8 - x)] = 0$

$V = -10x + 80$

$V_{x=6} = +20; \; V_{x=8} = 0$ kN

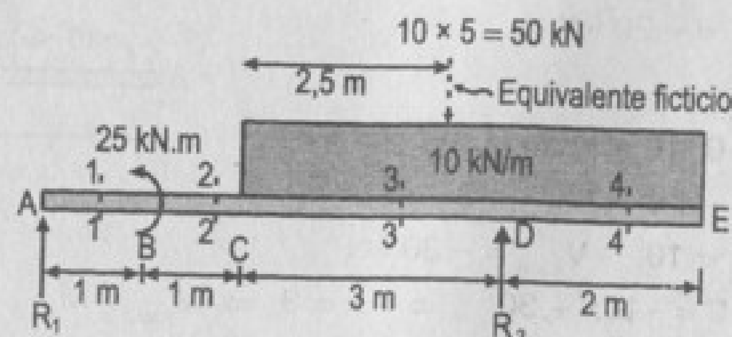
(III) Dibujamos los diagramas.



$M_{máx} = 25$ kN.m

413. Viga con la carga indicada en la figura.

Resolución:



(I) Calculamos las reacciones:

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_A = 0: 25 - 50\,(4{,}5) + R_2(5) = 0$

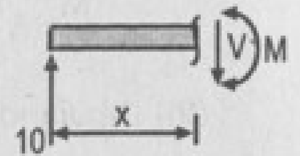
$R_2 = 40$ kN

$+\uparrow \; \Sigma F_V = 0: R_1 - 50 + R_2 = 0$

$R_1 = 10$ kN

(II) Calculamos las fuerzas en los cortes:

Corte 1-1: $x = \langle 0; 1 \rangle$

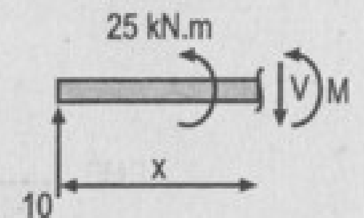


$+\uparrow \; \Sigma F_V = 0 : 10 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 10$ kN (cte.)

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_{1-1} = 0 \; ; \; M - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 10x$

$M_{x=0} = 0 \; ; \; M_{x=1} = 10$ kN.m

Corte 2-2: $x = \langle 1; 2 \rangle$

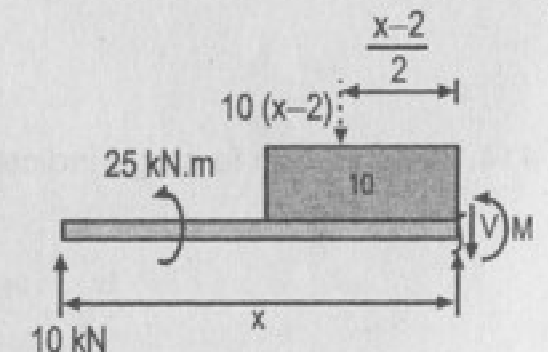


$+\uparrow \; \Sigma F_V = 0: 10 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 10$ kN (cte.)

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_{2-2} = 0: M + 25 - 10x \quad \Rightarrow \quad M = 10x - 25$

$M_{x=1} = - 15$ kN.m ; $M_{x=2} = - 5$ kN.m

Corte 3-3: $x = \langle 2; 5 \rangle$



$+\uparrow \; \Sigma F_V = 0: 10 - 10(x - 2) - V = 0$

$V = -10x + 30$

$V_{x=2} = 10$ kN ; $\quad V_{x=5} = - 20$ kN

$V = 0 = -10x + 30 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ m

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_{3-3} = 0: M + [10(x - 2)(x - 2)/2] + 25 - 10x = 0$

$M = -5x^2 + 30x - 45$

$M_{x=2} = -5 \; ; \; M_{x=5} = - 20$ kN.m

$M_{máx} = M_{x=3} = 0$

Corte 4-4: $x = \langle 5;7 \rangle$

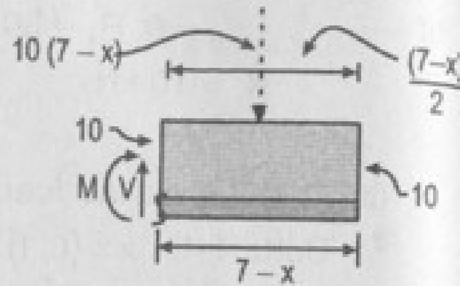
$+\uparrow \Sigma F_v = 0 : -10(7 - x) + V = 0 \Rightarrow V = -10x + 70$

$V_{x=5} = 20$; $V_{x=7} = 0$ kN

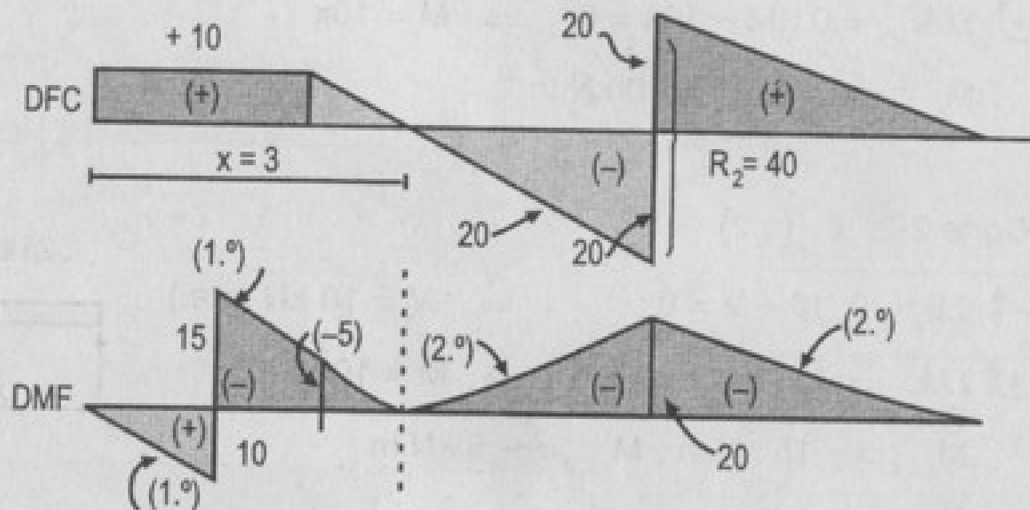
$\Sigma M_{4-4} = 0: - M - [10(7 - x)(7 - x)/2] = 0$

$M = - 5x^2 + 70x - 245$

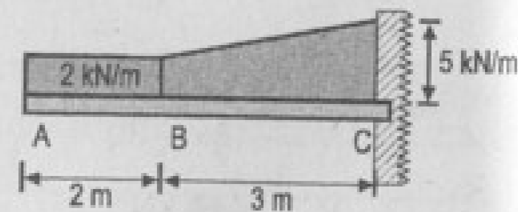
$M_{x=5} = - 20$ kN.m ; $M_{x=7} = 0$



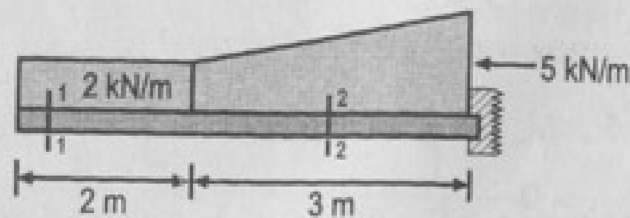
(III) Dibujando los diagramas:



414. Ménsula con la carga indicada en la figura.

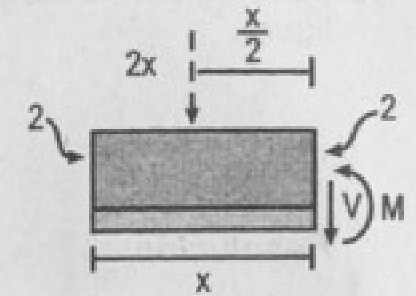


Resolución:



Calculamos las fuerzas en los cortes:

Corte 1-1: $x = \langle 0; 2 \rangle$

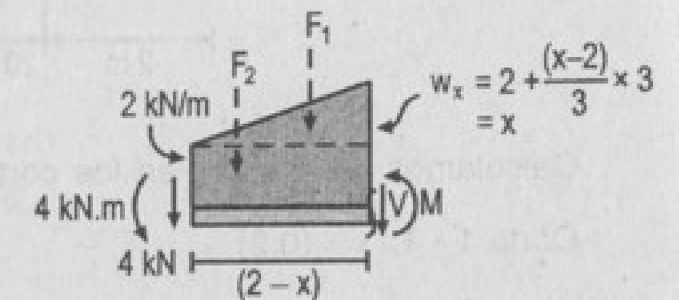


$+\uparrow \Sigma F_v = 0: - 2x - V = 0 \Rightarrow V = - 2x$

$\Sigma M_{1-1} = 0: M + 2x(x/2) \Rightarrow M = - x^2$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = - 4$ kN.m

Corte 2-2: $x = \langle 2; 5 \rangle$



$$F_1 = (x - 2)(x - 2)/2 = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$$

$$F_2 = 2(x - 2) = 2x - 4$$

$+\uparrow \Sigma F_v = 0: - 4 - F_2 - F_1 - V = 0$

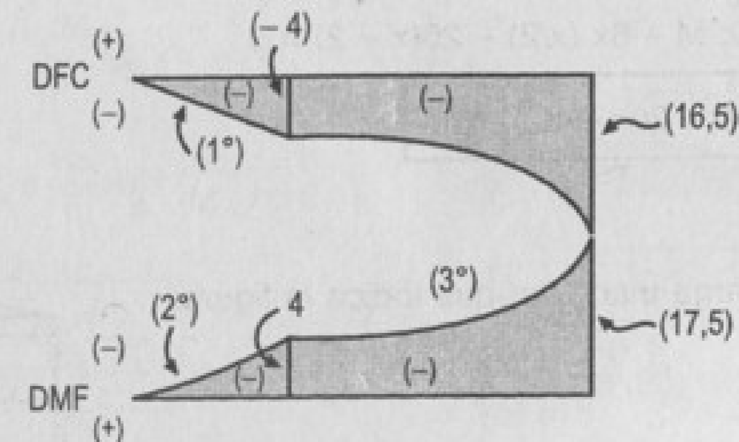
$$V = -\frac{x^2}{2} - 2$$

$V_{x=2} = - 4$ kN ; $\boxed{V_{x=5} = - 16,5 \text{ kN}}$

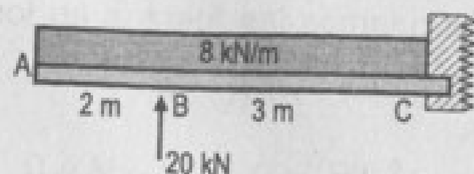
$$\Sigma M_{2-2} = 0: 4 + F_1\frac{(x-2)}{3} + F_2\frac{(x-2)}{2} + M = 0$$

$M = - x^3/6 + 2x - 20/3$

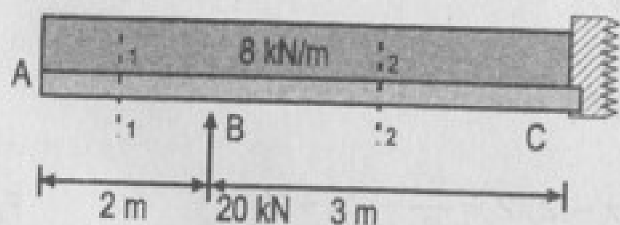
$M_{x=2} = - 4$ kN.m ; $\boxed{M_{x=5} = - 17,5 \text{ kN.m}}$



415. Ménsula con la carga indicada en la figura.



Resolución:



Calculamos las fuerzas en los cortes:

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$

$+\uparrow \Sigma F_V = 0: -8x - V = 0 \Rightarrow V = -8x$

$V_{x=0} = 0$; $V_{x=2} = -16$ kN

$\Sigma M_{1-1} = 0: M + (8x)(x/2) = 0 \Rightarrow M = -4x^2$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = -16$ kN

Corte 2 - 2: $x = \langle 2;5 \rangle$

$+\uparrow \Sigma F_V = 0: -8x + 20 - V = 0$

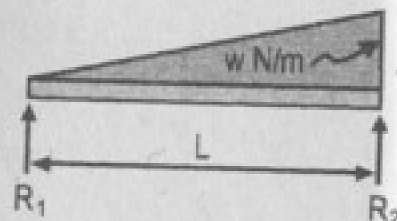
$\Rightarrow V = 20 - 8x$

$V_{x=2} = +4$ kN ; $M_{x=5} = -20$ kN

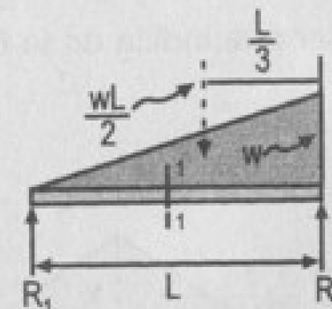
$\Sigma M_{2-2} = 0: M + 8x\,(x/2) - 20(x-2) = 0$

$$M = (-4x^2 + 20x - 40) \text{ kN.m}$$

416. Viga con la carga triangular que indica la figura.



Resolución:

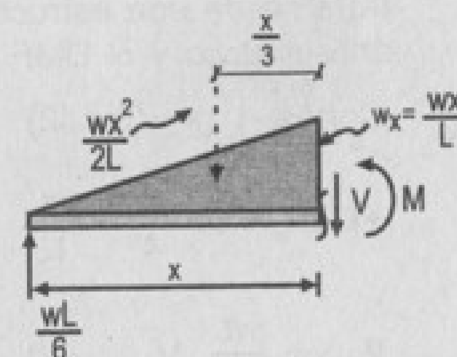


Calculamos R_1:

$\Sigma M_2 = 0: \frac{wL}{2}(L/3) - R_1(L) = 0$

$R_1 = wL/6$

Calculamos las fuerzas en el corte 1 - 1, $x = \langle 0;L \rangle$:



$+\uparrow \Sigma F_V = 0: \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} - V = 0$

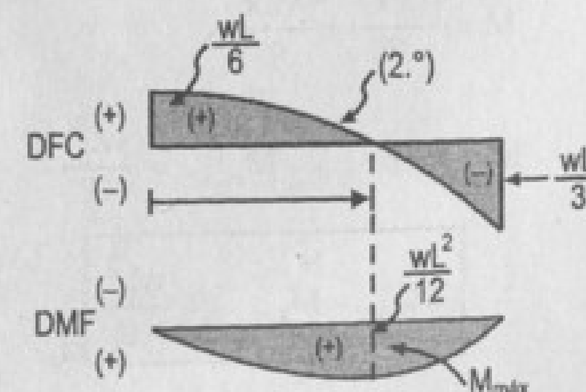
$$V = -\frac{wx^2}{2L} + \frac{wL}{6} \Rightarrow \begin{cases} V_{x=0} = \frac{wL}{6} \\ V_{x=L} = -\frac{wL}{3} \end{cases}$$

$$V = 0 = -\frac{wx^2}{2L} + \frac{wL}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$+\uparrow \Sigma M_{1-1} = 0: M + \left(\frac{wx^2}{2L}\right)\left(\frac{x}{3}\right) - \left(\frac{wL}{6}\right)x = 0$$

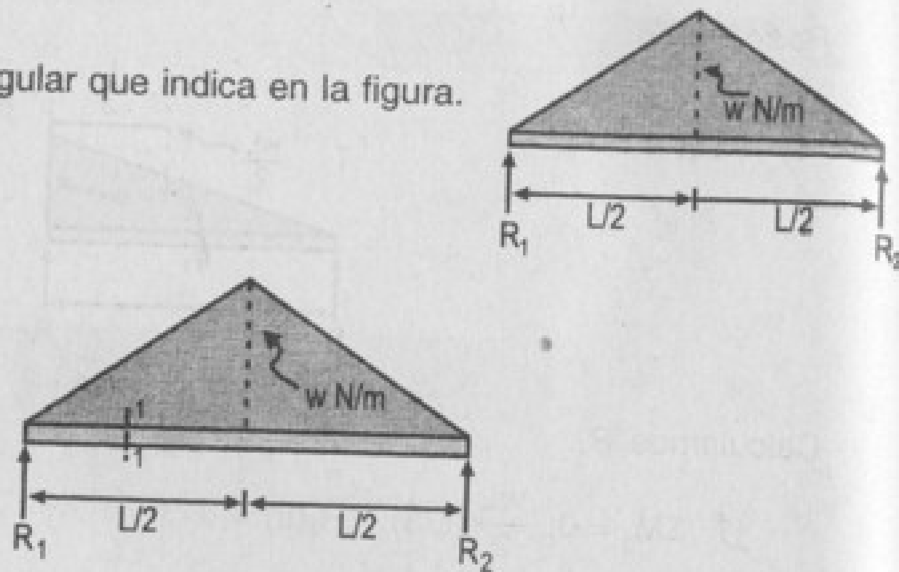
$$M = -\frac{w}{6L}x^3 + \frac{wL}{6}x \Rightarrow \begin{cases} M_{x=0} = 0 \\ M_{x=L} = 0 \end{cases}$$

$$M_{máx} = M_{x=\frac{L}{\sqrt{3}}} = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$$



417. Viga con la carga triangular que indica en la figura.

Resolución:



Por simetría : $R_1 = R_2 = \left(\frac{wL}{2}\right)/2 = \frac{wL}{4}$

Calculamos las fuerzas en el corte 1-1 hasta el centro del tramo y luego por tratarse de una estructura con simetría de cargas y geometría. El DFC es antisimétrico y el DMF es simétrico.

Corte 1-1: $x = \langle 0; L/2 \rangle$

$+\uparrow \Sigma F_V = 0: \frac{wL}{4} - \frac{wx^2}{L} - V = 0 \Rightarrow V = -\frac{wx^2}{L} + \frac{wL}{4}$

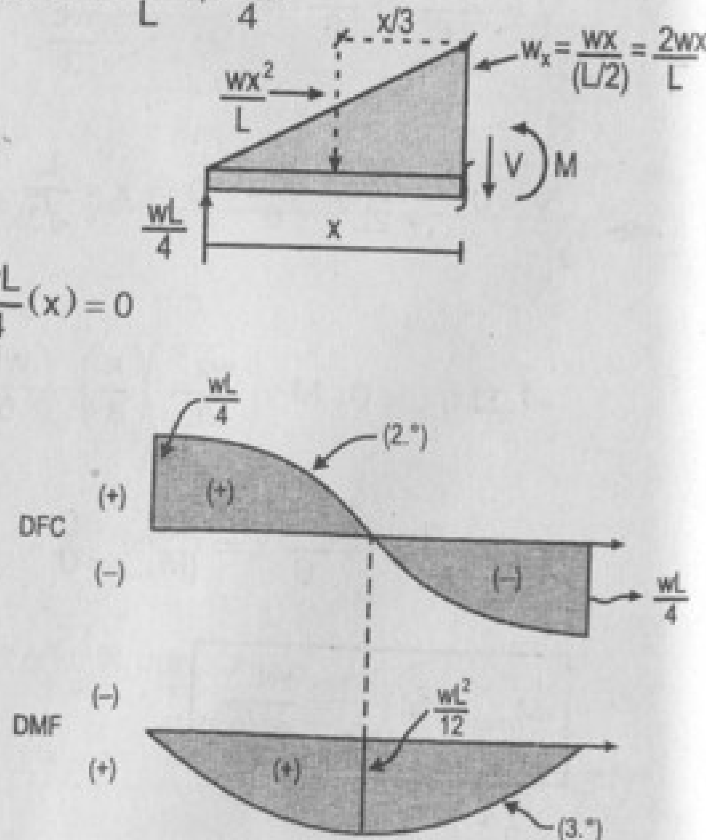
$V_{x=0} = \frac{wL}{4}$, $V_{x=L/2} = 0$

$\Sigma M_{1-1} = 0: M_3 + \left(\frac{wx^2}{L}\right)\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{wL}{4}(x) = 0$

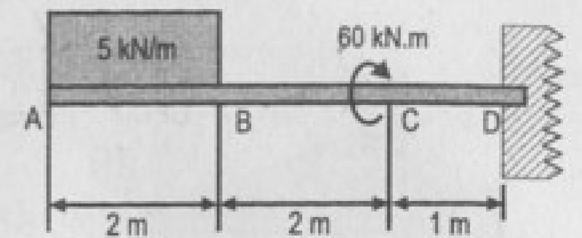
$M = -\frac{wx^3}{3L} + \frac{wLx}{4}$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=L/2} = \frac{wL^2}{12}$

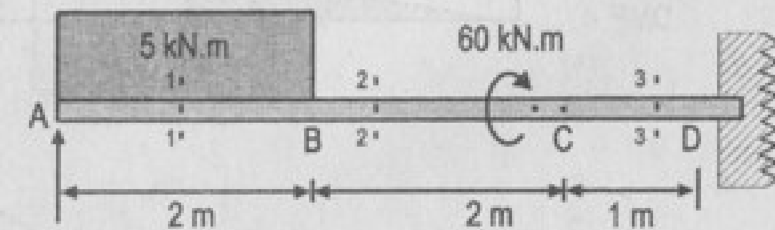
$\therefore$ $M_{máx} = M_{x=L/2} = \frac{wL^2}{12}$



418. Voladizo o ménsula cargada como indica la figura.

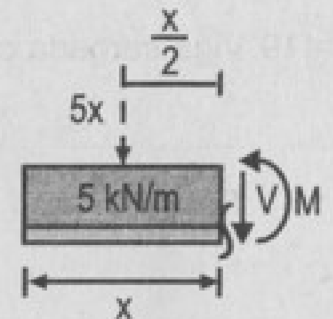


Resolución:



Calculamos las fuerzas en los cortes:

Corte 1-1: $x = \langle 0;2 \rangle$



$+\uparrow \Sigma F_V = 0: -5x - V = 0 \Rightarrow V = -5x$

$V_{x=0} = 0$; $V_{x=2} = -10$ kN

$\Sigma M_{1-1} = M + (5x)(x/2) = 0 \Rightarrow M = -2{,}5x^2$

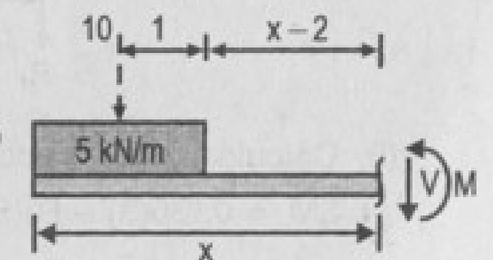
$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = -10$ kN.m

Corte 2 - 2: $x = \langle 2;4 \rangle$

$+\uparrow \Sigma F_V = 0: -10 - V = 0 \Rightarrow V = -10$ kN (cte.)

$\Sigma M_{2-2} = 0: M + 10(x-1) = 0$; $M = -10x + 10$

$M_{x=2} = -10$ kN.m; $M_{x=4} = -30$ kN.m



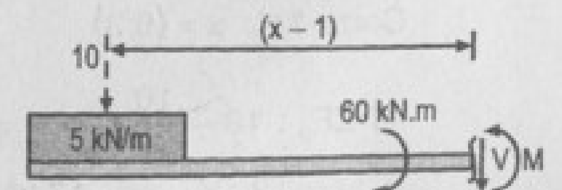
Corte 3-3: $x = \langle 4;5 \rangle$

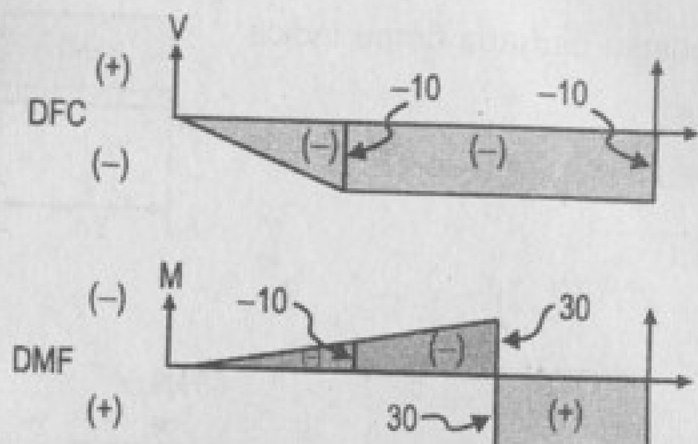
$+\uparrow \Sigma F_V = 0: -10 - V = 0 \Rightarrow V = -10$ kN

$\Sigma M_{3-3} = 0: M - 60 + 10(x-1) = 0$

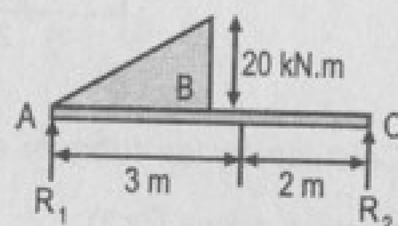
$M = -10x + 70$

$M_{x=4} = 30$ kN.m; $M_{x=5} = 20$ kN.m

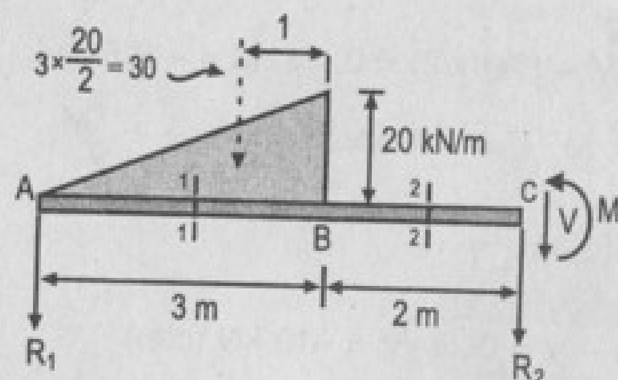




419. Viga cargada como indica en la figura.



Resolución:



(I) Cálculo de las reacciones:

$\circlearrowleft + \Sigma M_c = 0$: $30(3) - R_1(5) = 0 \Rightarrow R_1 = 18$

$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $R_1 - 30 + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 12$ kN

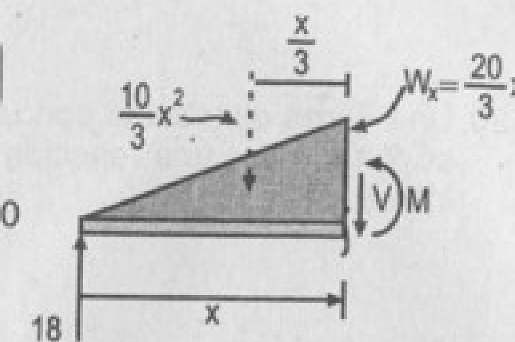
(II) Cálculo de las fuerzas en los cortes:

Corte 1-1: $x = \langle 0;3 \rangle$

$+\uparrow \Sigma F_V : 18 - \frac{10}{3}x^2 - V = 0 \Rightarrow V = 18 - \frac{10}{3}x^2$

$V_{x=0} = 18$; $V_{x=3} = -12$ kN

$V = 0 = 18 - \frac{10}{3}x^2 \Rightarrow x = 2{,}32 = \left(\frac{3}{5}\sqrt{15}\right)$



$\circlearrowleft + \Sigma M_{1-1} = 0$: $M + \left(\frac{10}{3}x^2\right)\left(\frac{x}{3}\right) - 18x = 0$

$M = -\frac{10}{9}x^3 + 18x$

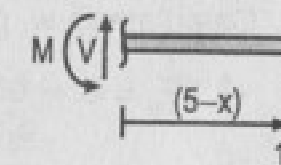
$M_{x=0} = 0$; $M_{x=3} = 24$ kN.m

$M_{máx} = M_{x=2,32} = 27{,}89$ kN.m

Corte 2-2: $x = \langle 3; 5 \rangle$

$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $V + 12 = 0 \Rightarrow V = -12$ kN

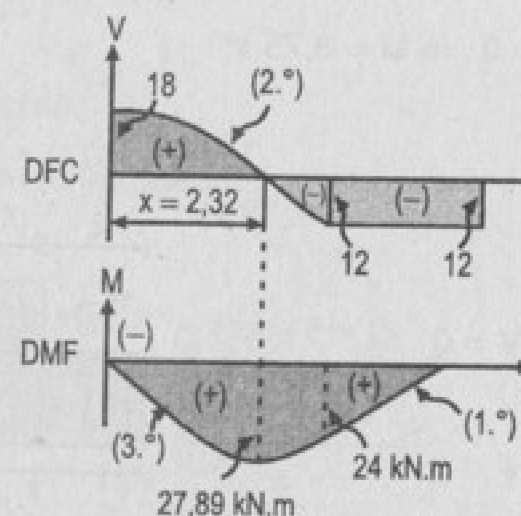
$\circlearrowleft + \Sigma M_{2-2} = 0$: $12(5 - x) - M = 0$



$M = 60 - 12x$

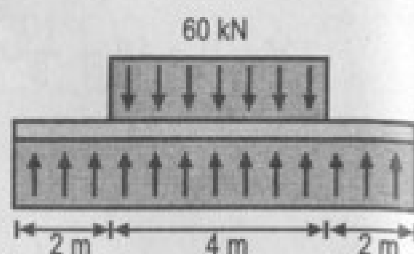
$M_{x=3} = 24$ kN.m; $M_{x=5} = 0$ kN.m

(III) Dibujando los diagramas:

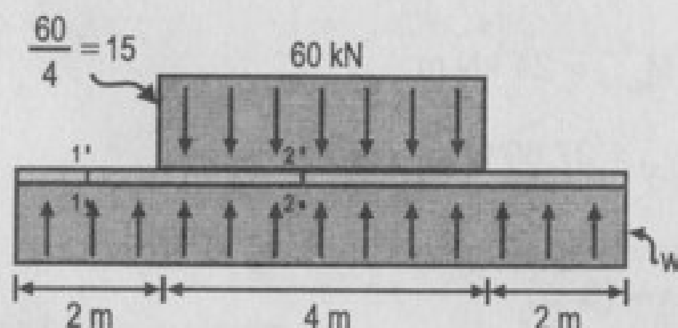


$\therefore$ $M_{máx} = 27{,}89$ kN.m

420. Una carga distribuida con un total de 60 kN, soportada por una reacción uniforme como indica la figura.



Resolución:

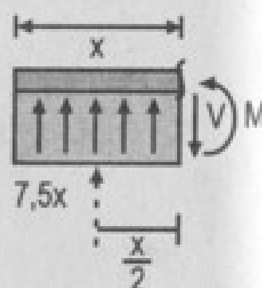


(I) Calculamos w, para que la viga esté en equilibrio.

$+\uparrow \Sigma F_V = 0: -60 + w(8) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 7{,}5 \text{ kN/m}$

(II) Calculamos las fuerzas en los cortes (notar que es simétrico).

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$



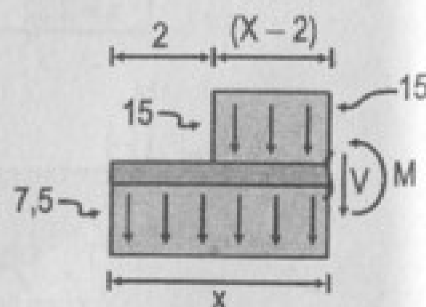
$+\uparrow \Sigma F_V = 0: 7{,}5\,x - V = 0 \Rightarrow V = 7{,}5x$

$V_{x=0} = 0 \; ; \; V_{x=2} = 15 \text{ kN}$

$\Sigma M_{1-1} = 0; \; M - (7{,}5\,x)(x/2) = 0 \Rightarrow M = 3{,}75\,x^2$

$M_{x=0} = 0 \; ; \; M_{x=2} = 15 \text{ kN.m}$

Corte 2 - 2: $x = \langle 2;4 \rangle$



$+\uparrow \Sigma F_V = 0: 7{,}5\,x - 15(x-2) - V = 0$

$\Rightarrow \quad V = -7{,}5x + 30$

$V_{x=2} = 15 \text{ kN} \quad ; \quad V_{x=24} = 0 \text{ kN}$

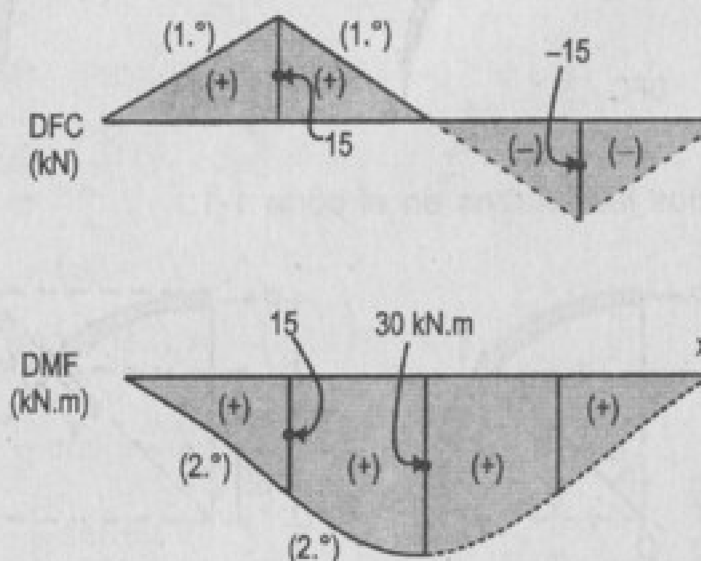
$\Sigma M_{2-2} = 0: M + [15(x-2)(x-2)/2] - (7{,}5x)(x/2) = 0$

$M = -3{,}75x^2 + 30x - 30$

$M_{x=2} = 15 \text{ kN.m} \; ; \; M_{x=4} = 30 \text{ kN.m}$

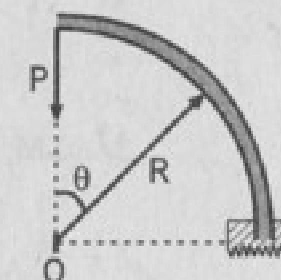
$\therefore \quad M_{máx} = M_{x=4} = 30 \text{ kN.m}$

(III) Dibujando los diagramas:



Comentario: esta estructura es simétrica en geometría y carga, por lo cual el DFC es antisimétrico y el DMF simétrico.

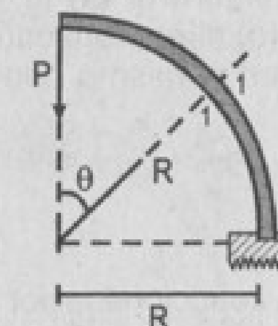
421. Determinar las distribuciones de fuerza cortante y momento flexionante en la barra curva de la figura: (a) en el caso de que la fuerza P sea vertical como está indicado, y (b) en el caso de que sea horizontal y dirigida hacia la izquierda.

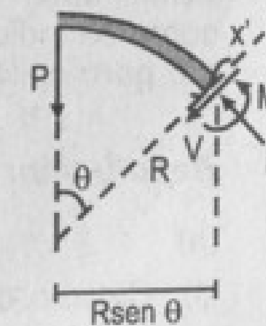


Resolución:

Calculamos las fuerzas en el corte 1 - 1: $\theta = \langle 0;\pi/2 \rangle$

Corte 1 - 1:





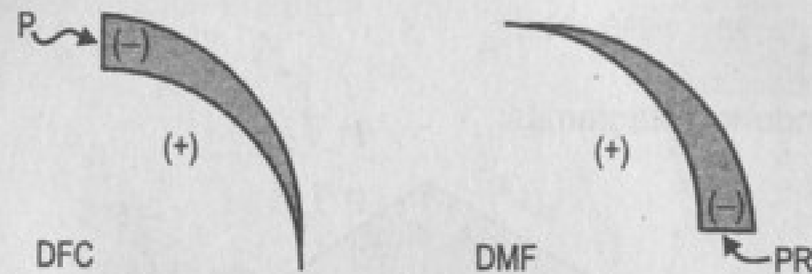
$\Sigma F_{x'} = 0: -V - P\cos\theta = 0$

$\boxed{V = -P\cos\theta}$

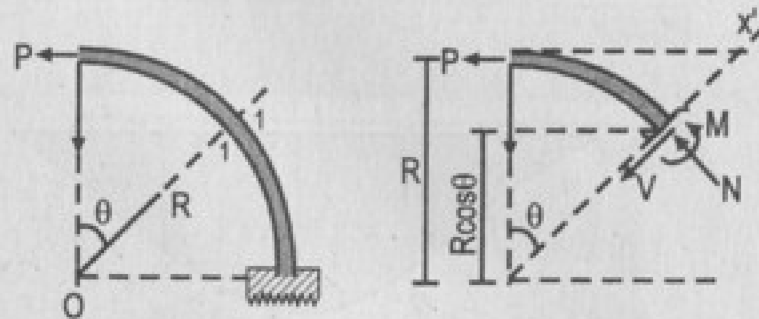
$\Sigma M_{1-1} = 0: M + P(R\,\text{sen}\,\theta) = 0$

$\boxed{M = -PR\,\text{sen}\,\theta}$

Dibujamos los diagramas:



b) Calculamos las fuerzas en el corte 1-1:



En el corte 1-1:

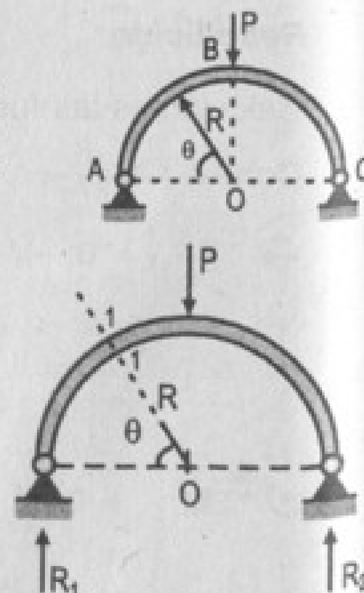
$\xrightarrow{+}$ $\Sigma F_{x'} = 0 : -V - P\text{sen}\,\theta = 0$

$$\boxed{V = -P\text{sen}\theta}$$

$\overset{+}{\circlearrowleft}$ $\Sigma M_{1-1} = 0$: $M + P(R - R\cos\theta) = 0$

$$\boxed{M = -PR(1 - \cos\theta)}$$

422. Determinar las distribuciones de V y M en el arco semicircular de la figura si (a) la fuerza P es vertical como se indica, y (b) si es horizontal y hacia la izquierda, pero aplicada en el mismo punto.



Resolución:

(a)

(I) Cálculo de las reacciones, por ser simétrico:

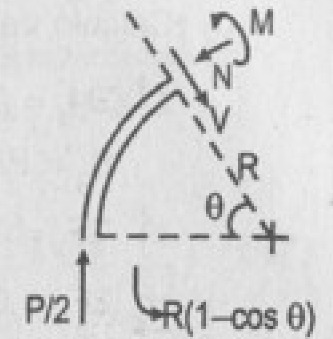
$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

(II) Cálculo de las fuerzas:

Corte 1 - 1: (tramo AB); $\theta = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$\Sigma F_r = 0 : V - (P/2)\text{sen}\theta = 0$

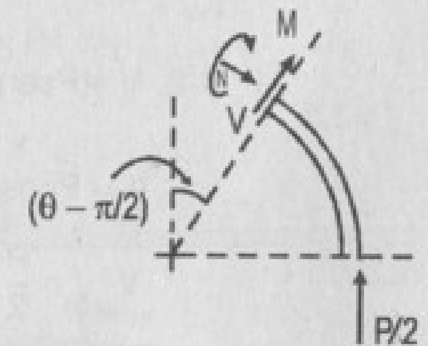
$$V = \frac{P}{2}\text{sen}\theta$$



$\overset{+}{\circlearrowleft}$ $\Sigma M = 0$: $M - (P/2)[(R(1 - \cos\theta)] = 0$

$$M = \frac{PR}{2}(1 - \cos\theta)$$

Corte 2 - 2: (tramo BC); $\theta = \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

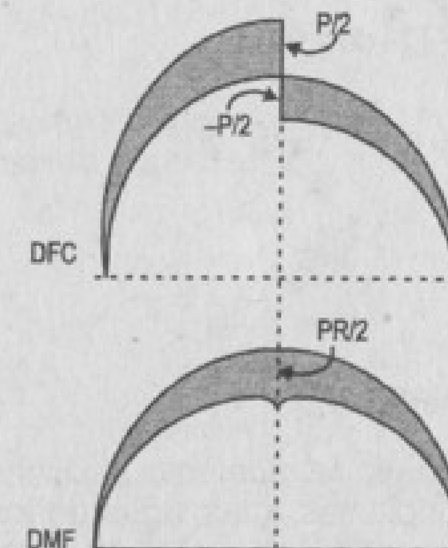


$\Sigma F_r = 0$: $V + \frac{P}{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 0$

$$V = -\frac{P}{2}\text{sen}\theta$$

$\overset{+}{\circlearrowleft}$ $\Sigma M = 0$: $\frac{P}{2}R\left[1 - \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] - M = 0$

$$M = \frac{PR}{2}(1 + \cos\theta)$$



(b)

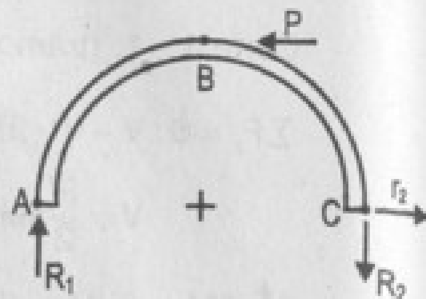
(I) Cálculo de las reacciones:

$\circlearrowleft\!+\ \Sigma M_1 = 0 \Rightarrow P(R) - R_2(2R) = 0$

$R_2 = P/2$

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0 \Rightarrow R_1 - R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = P/2$

$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_H = 0 \Rightarrow -P + r_2 = 0 \Rightarrow r_2 = P$



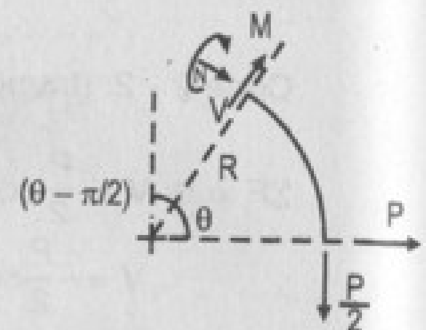
(II) En el tramo AB las fuerzas son iguales a 222(a).

Para el tramo BC: $\theta = \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

$$\Sigma F_r = 0:\ V + P\text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{P}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$V = P\cos\theta + \frac{P}{2}\text{sen}\,\theta$$

$$V_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{P}{2};\quad V_{\theta=\pi} = P$$

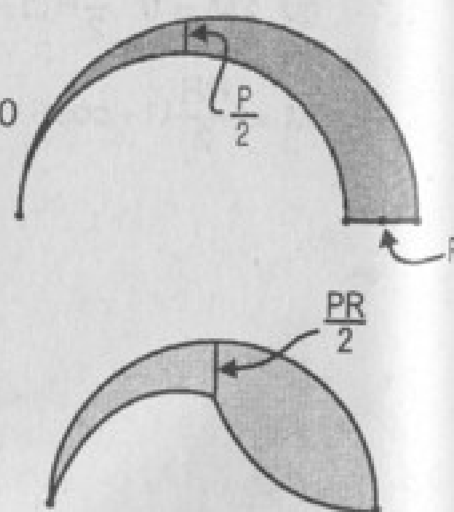


$\circlearrowleft\!+\ \Sigma M = 0:$

$$P\left[R\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{P}{2}\left\{R\left[1 - \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} - M = 0$$

$$M = PR\text{sen}\,\theta - \frac{PR}{2}(1 + \cos\theta)$$

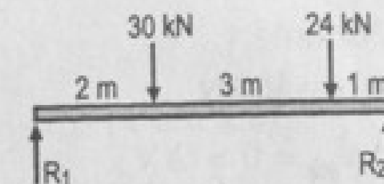
$$M_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{PR}{2};\quad M_{\theta=\pi} = 0$$



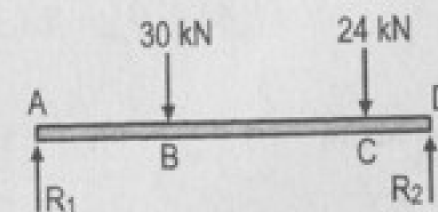
423, 424: problemas ilustrativos

Sin escribir las expresiones de momento flexionante y fuerza cortante, trazar los diagramas correspondientes a las vigas de los problemas siguientes. Dar los valores numéricos en todos los puntos de discontinuidad y en los de fuerza cortante nula.

425. Viga cargada como indica la figura:



Resolución:



Cálculo de las reacciones:

$\circlearrowleft\!+\ \Sigma M_1 = 0: -30(2) - 24(5) + R_2(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 30\text{ kN}$

$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0: -R_1 - 30 - 24 + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 24\text{ kN}$

Dibujando el diagrama de cortante:

$V_A = R_1 = 24\text{ kN}$

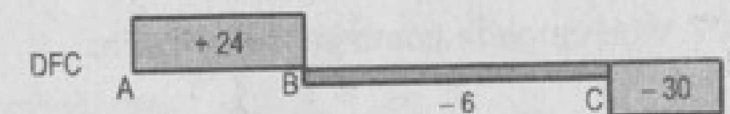
$\Delta V_{A\text{-}B} = (\text{área})_{carga} = 0$

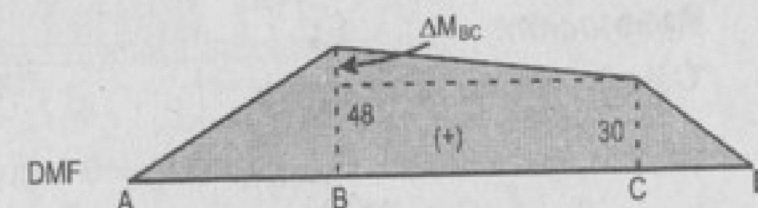
$V_B = V_A - 30 = -6\text{ kN}$

$\Delta V_{B\text{-}C} = (\text{área})_{carga} = 0$

$V_C = V_B - 24 = -30\text{ kN}$

$M_A = 0$

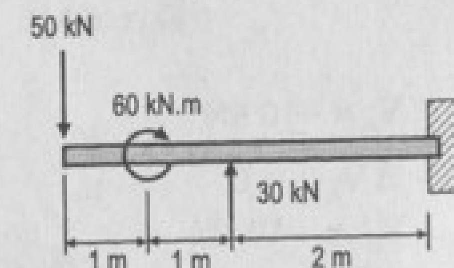




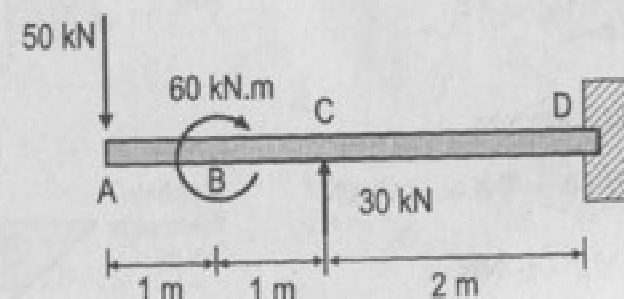
$\Delta M_{AB} = (\text{área})_{cortante} = (+24)(2) = 48$

$\Delta M_{BC} = (\text{área})_{cortante} = (-6)(3) = -18$

426. Viga en voladizo, sobre la que actúan dos fuerzas y un par como indica la figura.



Resolución:

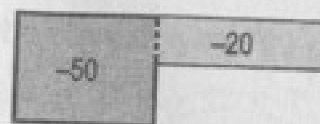


Cortante:

$V_A = -50$ kN

$\Delta V_{AB} = 0 = \Delta V_{BC}$

$V_C = -50 + 30 = -20$ kN



Flexionante:

$\Delta M_{AB} = (-50)(1) = -50$ kN.m

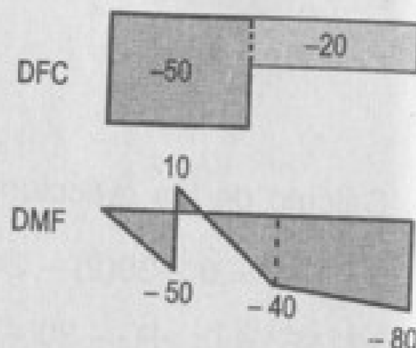
$M_B = -50 + 60 = 10$

$\Delta M_{BC} = (-50)(1) = -50$

$M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 10 - 50 = -40$

$\Delta M_{CD} = (-20)(2) = -40$

$M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -40 - 40 = -80$



427. Viga cargada como indica la figura:

Resolución:

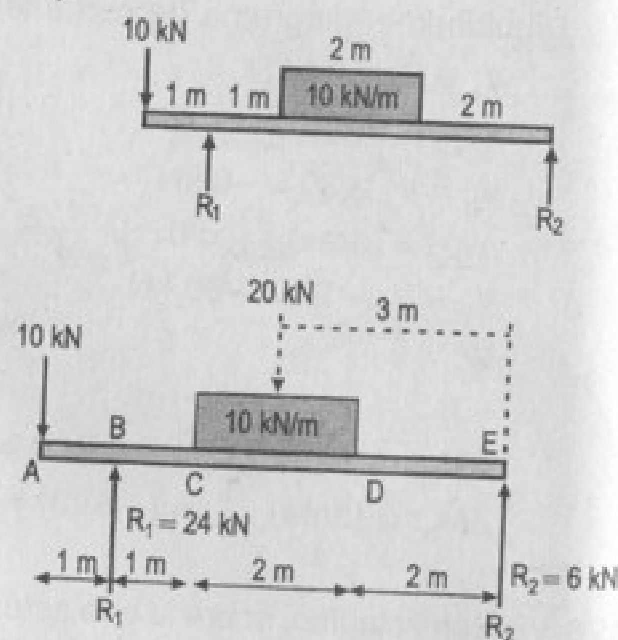
Cálculo de las reacciones:

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_E = 0$: $10(6) - R_1(5) + 20(3) = 0$

$R_1 = 24$ kN

$+\uparrow \ \Sigma F_V = 0$: $-10 + 24 - 20 + R_2 = 0$

$R_2 = 6$ kN



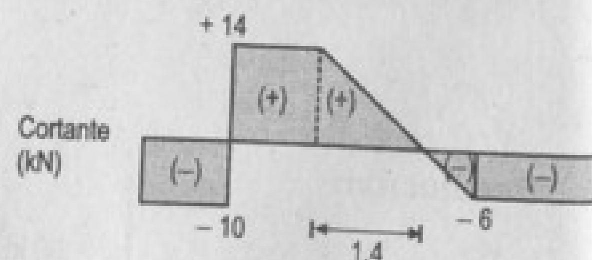
$V_A = -10$ kN

$\Delta V_{A-B} = 0$

$V_B^- = -10$ kN

$V_B^+ = V_B^- + 24 = -10 + 24 = 14$

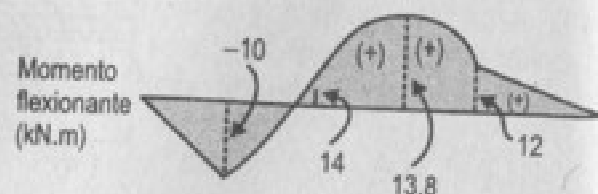
$\Delta V_{B-C} = 0; \quad V_C^- = V_B^+ = 14$



$\Delta V_{C-D} = (-10)(2) = -20$ kN

$V_D^- = V_C^- + \Delta V_{C-D} = 14 - 20 = -6$ kN

$\Delta V_{D-E} = 0$; $V_E = V_D^+ - 6$ NK



$M_A = 0 \Rightarrow \Delta M_{AB} = (-10)(1) = -10 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -10$ kN.m

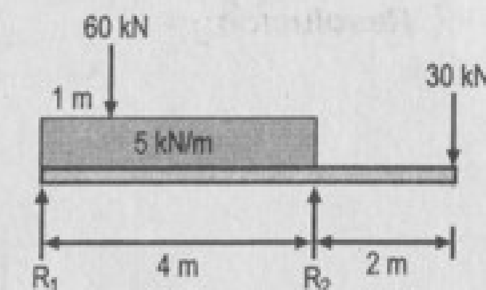
$\Delta M_{BC} = (+14)(1) = +14 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -10+14 = 4$ kN.m

$\Delta M_{C,\,máx} = (+14)(1,4)/2 = 9,8 \Rightarrow M_{máx} = M_C + \Delta M_{C,\,Máx} = 4 + 9,8 = 13,8$ kN.m

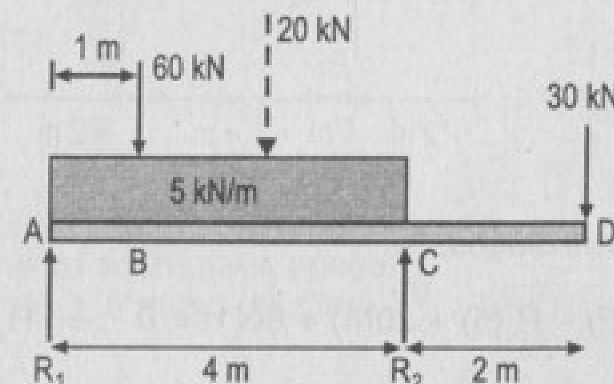
$\Delta M_{D,\,máx} = (-6)(0,6)/2 = -1,8 \Rightarrow M_D = M_{máx} + \Delta M_{Máx,\,D} = 13,8 - 1,8 = 12$ kN.m

$\therefore$ $\boxed{M_{máx} = 13,8 \text{ kN.m}}$

428. Viga cargada como se muestra en la figura:



Resolución:



$\circlearrowleft + \ \Sigma M_C = -R_1(4) + 60(3) + 20(2) - 30(2) = 0 \Rightarrow R_1 = 40$ kN

$+\uparrow \ \Sigma F_V = 0$: $40 - 60 - 20 + R_2 - 30 = 0 \Rightarrow R_2 = -70$ kN

$V_A = R_1 = 40$ kN

$\Delta V_{A-B} = (-5)(1) = -5$ kN, $V_B^- = 35$

$V_B^+ = V_B^- - 60 = 35 - 60 = -25$ kN

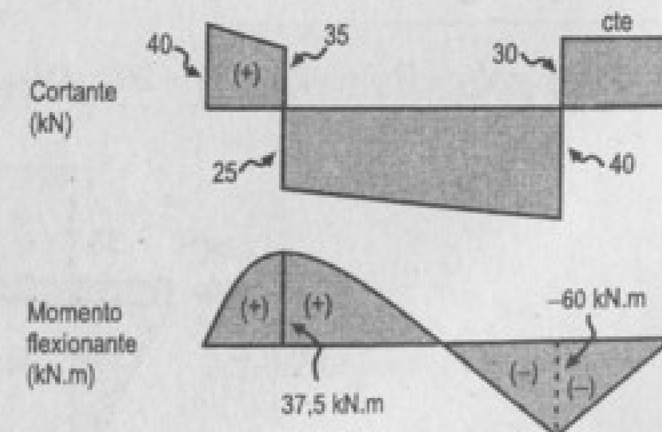
$\Delta V_{BC} = (-5)(3) = -15$ kN

$V_C^- = V_B^+ + \Delta V_{BC} = -25 - 15 = -40$

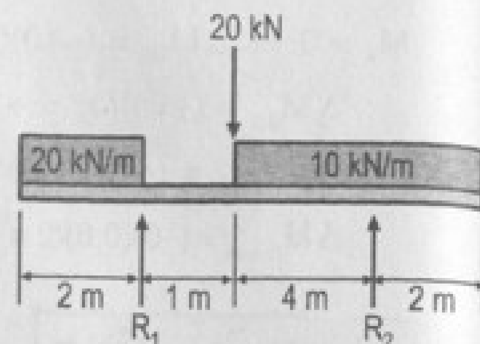
$V_C^+ = V_C^- + R_2 = -40 + 70 = 30$ kN

$M_A = 0$

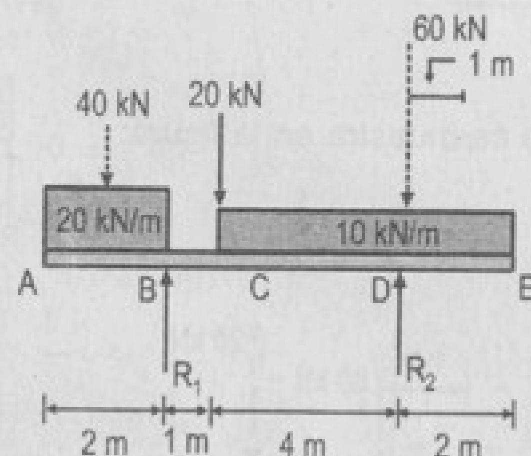
$\Delta M_{AB} = (40 + 35) \times 1/2 = 37,5$



429. Viga cargada como se indica en la figura.



Resolución:



Cálculo de las reacciones:

$\circlearrowleft^{+}$ $\Sigma M_D = 0$: $40(6) - R_1(5) + 20(4) + 60(1) = 0 \Rightarrow R_1 = 76$ kN

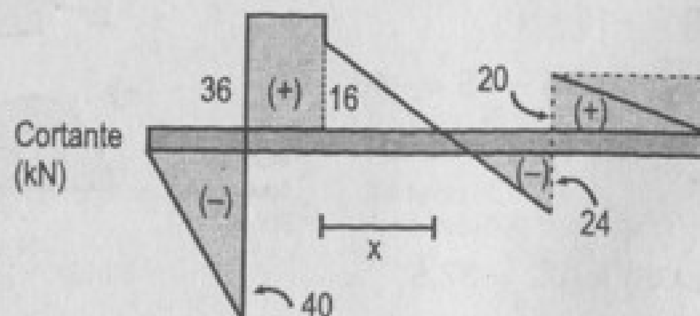
$+\uparrow$ $\Sigma F_V = 0$: $-40 + 76 - 20 - 60 + R_2 \Rightarrow R_2 = 44$ kN

$V_A=0$, $\Delta V_{AB} = (-20)(2) = -40$ kN; $V_B^- = V_A + \Delta V_{AB} = 0 + (-40) = -40$ kN/m

$V_B^+ = V_B^- + R_1 = -40 + 76 = 36$; $\Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow V_C^- = V_B^+ = 36$

$V_C^+ = V_C^- - 20 = 36 - 20 = 16$; $\Delta V_{CD} = (-10)(4) = -40 \Rightarrow V_D^- = V_C^+ + \Delta V_{CD} = -24$

$V_D^+ = V_D^- + R_2 = -24 + 44 = 20$; $\Delta V_{DE} = (-10)(2) = -20 \Rightarrow V_E = V_D^+ + \Delta V_{DE} = 0$



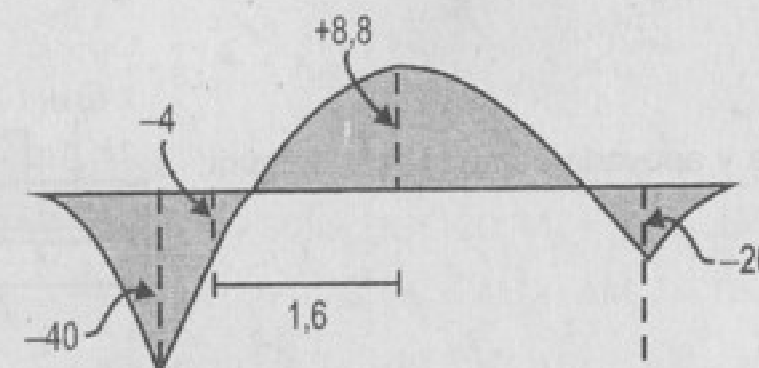
Cálculo de la posición para $V = 0 \Rightarrow x = 1{,}6$ m

$M_A = 0$, $\Delta M_{AB} = (\text{área})_{\text{cortante}} = (-40)(2)/2 = -40$ kN.m, $M_B = -40$ kN.m

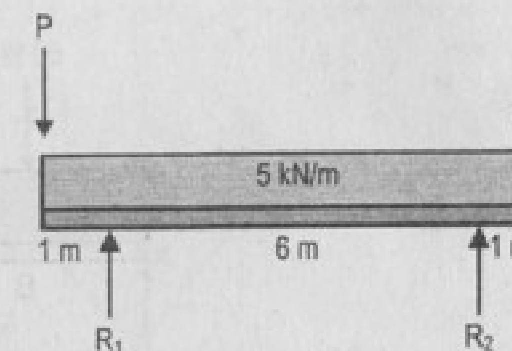
$\Delta M_{BC} = (36)(1) = 36$; $M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -40 + 36 = -4$

$\Delta M_{CX} = (16)(1{,}6)/2 = 12{,}8$; $M_X = M_C + \Delta M_{CX} = -4 + 12{,}8 = 8{,}8$

$\Delta M_{XD} = (-24)(2{,}4/2) = 28{,}8$; $M_D = M_X + \Delta M_{XD} = 8{,}8 - 28{,}8 = -20$



430. En la viga mostrada en la figura determine P para que el momento sobre cada apoyo sea igual al momento a la mitad del claro.



Resolución:

Cálculo de las reacciones:

$R_1 = R_2 = P + 20$ (simétrico)

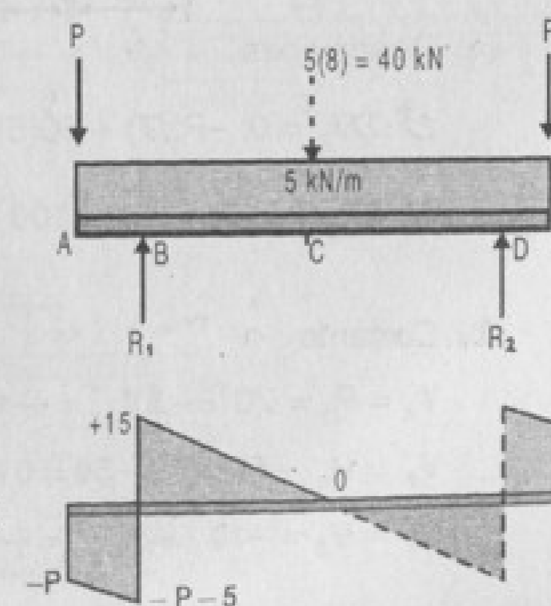
$V_A = -P$, $\Delta V_{AB} = (-5)(1) = -5$, $V_B^- = -P - 5$

$V_B^+ = V_B^- + R_1 = 15$, $\Delta V_{BC} = (-5)(3) = -15$

$V_C = V_B^+ + \Delta V_{BC} = 15 - 15 = 0$

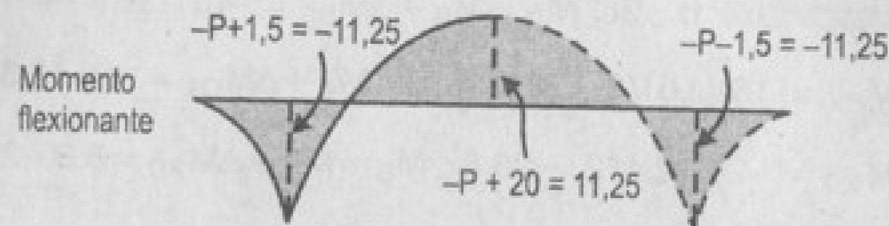
$M_A = 0$; $\Delta M_{AB} = -P(1) - (1)(5)/2 = -P - 2{,}5$

$M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -P - 2{,}5$

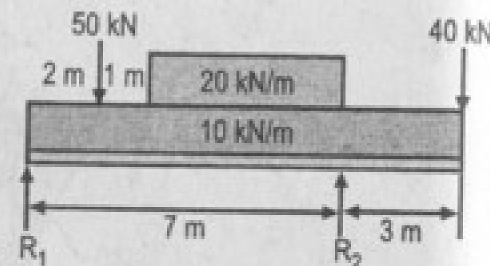


$\Delta M_{BC} = (15)(3)/2 = 22{,}5;\ M_C = -P + 20$

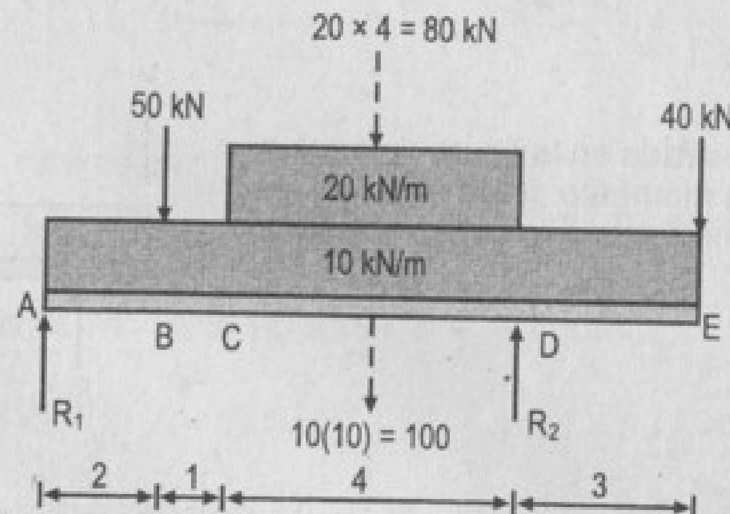
$M_B + M_C = 0: -P - 2{,}5 - P + 20 = 0 \Rightarrow P = 8{,}75$



431. Viga cargada y apoyada como indica la figura.



Resolución:



(a) Reacciones

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_D = 0: -R_1(7) + 50(5) + (100 + 80)(2) - 40(3) = 0 \Rightarrow R_1 = 70$ kN

$+\uparrow \Sigma F_V = 0: 70 - 50 - 100 - 80 + R_2 - 40 = 0 \Rightarrow R_2 = 200$ kN

(b) Cortante

$V_A = R_1 = 70 \Rightarrow \Delta V_{AB} = (-10)(2) = -20;\ V_B^- = V_A + \Delta V_{AB} = 70 - 20 = 50$ kN

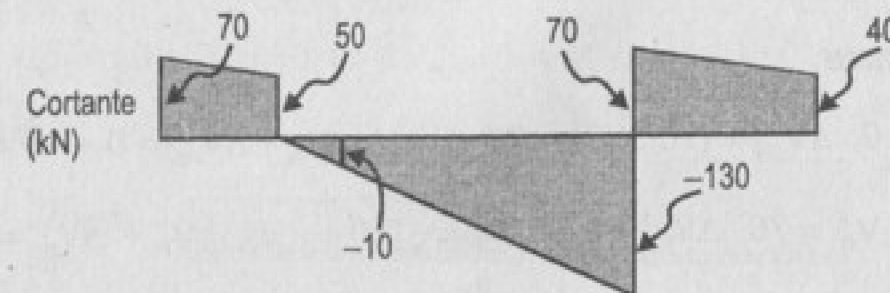
$V_B^+ = V_B^- - 50 = 50 - 50 = 0 \Rightarrow \Delta V_{BC} = (-10)(1) = -10,\ V_C^- = V_B^+ + \Delta V_{BC} = -10$ kN

$V_C^+ = V_C^- = -10 \Rightarrow \Delta V_{CD} = (-10 - 20)(4) = -120$

$V_D^- = V_C^+ + \Delta V_{CD} = -10 - 120 = -130$ kN

$V_D^+ = V_D^- + R_2 = -130 + 200 = 70 \Rightarrow \Delta V_{DE} = (-10)(3) = -30$

$\Rightarrow V_E = V_D^+ + \Delta V_{DE} = 70 - 30 = 40$



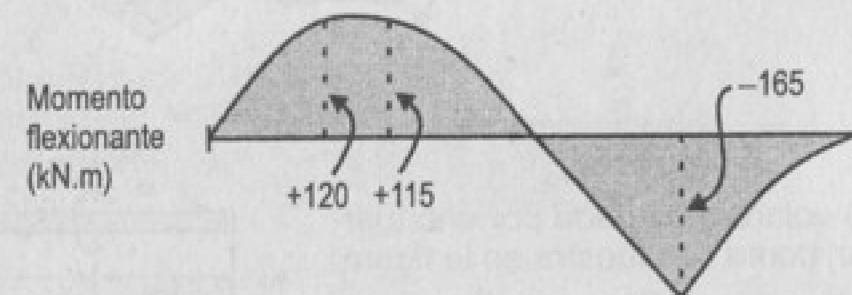
(c) Momento flexionante

$M_A = 0 \Rightarrow \Delta M_{AB} = (+70 + 50)(2/2) = 120;\ M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 120$ kN.m

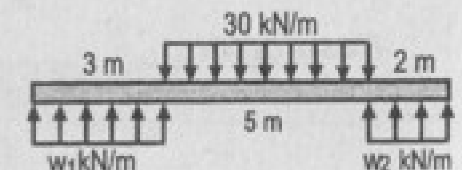
$\Delta M_{BC} = (0 - 10)(1/2) = -5;\ M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 120 - 5 = 115$ kN.m

$\Delta M_{CD} = (-10 - 130)(4/2) = -280;\ M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 115 - 280 = -165$

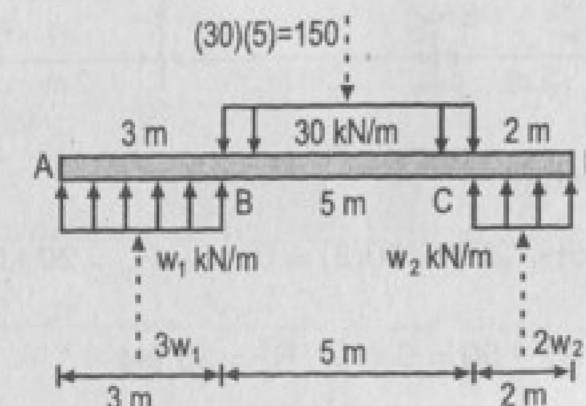
$\Delta M_{DE} = (70 + 40)(3/2) = 165;\ M_E = M_D + \Delta M_{DE} = -165 + 165 = 0$



432. Una carga distribuida está sostenida por dos cargas repartidas como se muestra en la figura.



Resolución:



(a) Reacciones:

$\circlearrowleft + \Sigma M_2 = 0$: $(3w_1)(7,5) + 150(3,5) = 0 \Rightarrow w_1 = 70/3 \approx 23,3$ kN/m

$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $70 - 150 + 2w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 40$ kN/m

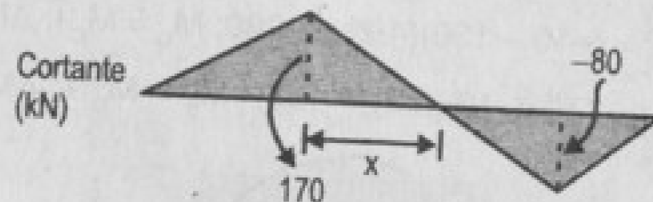
(b) Cortante:

$V_A = 0,\ \Delta V_{AB} = (70/3)(3) = 70 \Rightarrow V_B^- = V_A + \Delta V_{AB} = 0 + 70 = 70$

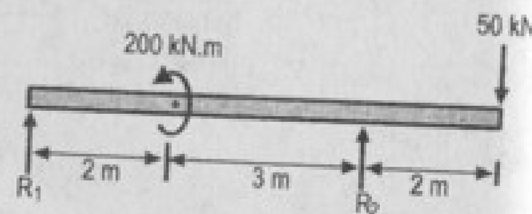
$V_B^+ = V_B^- = 70,\ \Delta V_{BC} = (-30)(5) = -150 \Rightarrow V_C^- = V_B^+ + \Delta V_{BC} = 70 - 150 = -80$

$V_C^+ = V_C^- = 80,\ \Delta V_{CD} = (40)(2) = 80 \Rightarrow V_B^+ = V_C^+ + \Delta V_{CD} = -80 + 80 = 0$

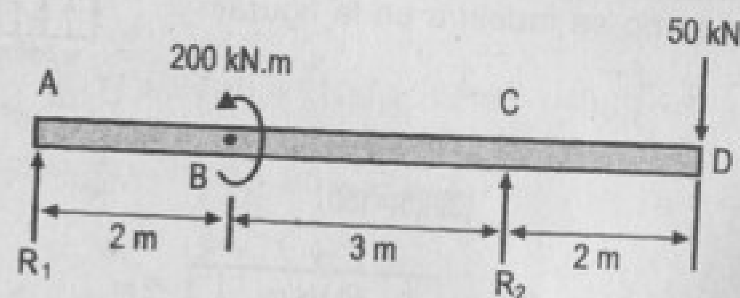
$x = \dfrac{70}{150}(5) = \dfrac{7}{3} \approx 2,33$ m



433. Viga como voladizo cargada por una fuerza y un par, como se muestra en la figura.



Resolución:



(a) Reacciones: equilibrio

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0$: $-R_1(5) + 200 - 50(2) = 0 \Rightarrow R_1 = 20$ kN

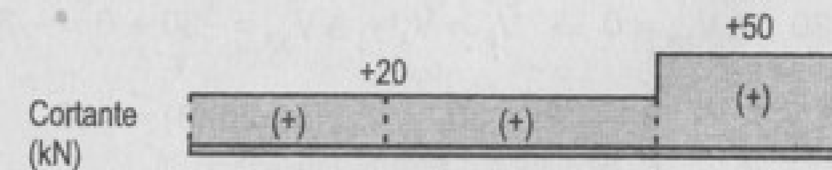
$+\uparrow \Sigma F_V = 0$: $20 + R_2 - 50 = 0 \Rightarrow R_2 = 30$ kN

(b) Cortante

$V_A = R_1 = 20 \Rightarrow \Delta V_{AB} = 0 \Rightarrow V_B^- = V_A + \Delta V_{AB} = 20 + 0 = 20$ kN

$V_B^+ = V_B^- = 20 \Rightarrow \Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow V_C^- = V_B^+ + \Delta V_{BC} = 20 + 0 = 20$ kN

$V_C^+ = V_C^- + R_2 = 20 + 30 = 50 \Rightarrow \Delta V_{CD} = 0 \rightarrow V_D = V_C^+ + \Delta V_{CD} = 50 + 0 = 50$ kN

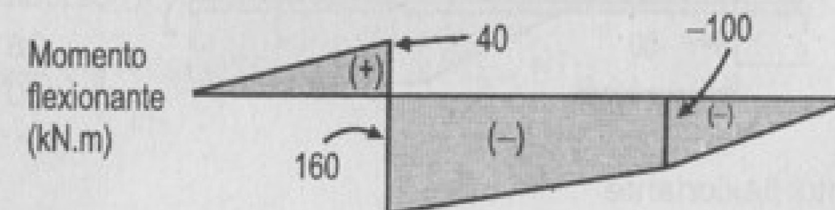


(c) Momento flexionante

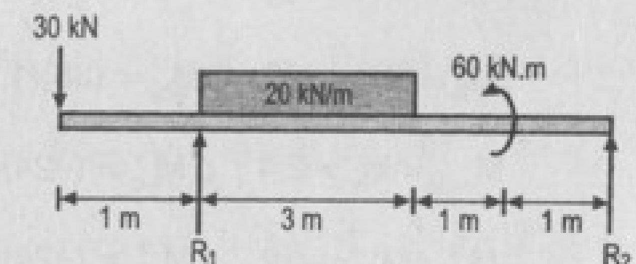
$M_A = 0 \Rightarrow \Delta M_{AB} = (20)(2) = 40,\ M_B^- = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 40 = 40$ kN.m.

$M_B^+ = M_B^- - 200 = 40 - 200 = -160,\ \Delta M_{BC} = (20)(3) = 60,\ M_C^- = -160 + 60 = -100$ kN.m

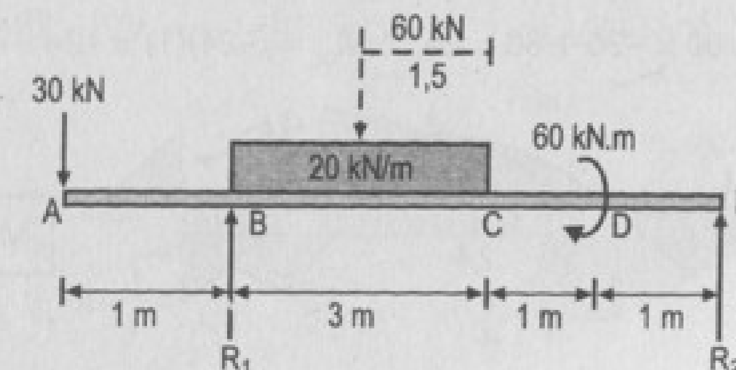
$M_C^+ = M_C^- = -100 \Rightarrow \Delta M_{CD} = 50(2) = 100 \Rightarrow M_D = M_C^+ + \Delta M_{CD} = -100 + 100 = 0$ kN.m



434. Viga cargada como se muestra en la figura.



Resolución:



(a) Reacciones

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_E = 0: 30(6) - R_1(5) + 60(3,5) - 60 = 0 \ \Rightarrow \ R_1 = 66 \text{ kN}$

$+\uparrow \ \Sigma F_V = 0: -30 + 66 - 60 + R_2 = 0 \ \Rightarrow \ R_2 = 24 \text{ kN}$

(b) Cortante

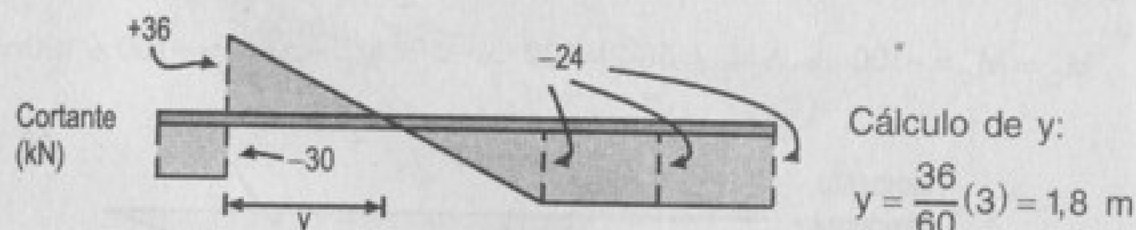
$V_A = -30 \ , \ \Delta V_{AB} = 0 \Rightarrow V_B^- = V_A + \Delta V_{AB} = -30 + 0 = -30 \text{ kN}$

$V_B^+ = V_B^- + R_1 = -30 + 66 = 36, \ \Delta V_{BC} = (-20)(3) = -60$

$\Rightarrow \ V_C^- = V_B^+ + \Delta V_{BC} = -24 \text{ kN}$

$V_C^+ = V_C^- = -24, \ \Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_D^- = V_C^+ + \Delta V_{CD} = 24 + 0 = -24 \text{ kN}$

$V_D^+ = V_D^- = -24, \ \Delta V_{DE} = 0 \Rightarrow V_E = -24 \text{ kN}$



Cálculo de y:

$y = \frac{36}{60}(3) = 1{,}8 \text{ m}$

c) Momento flexionante

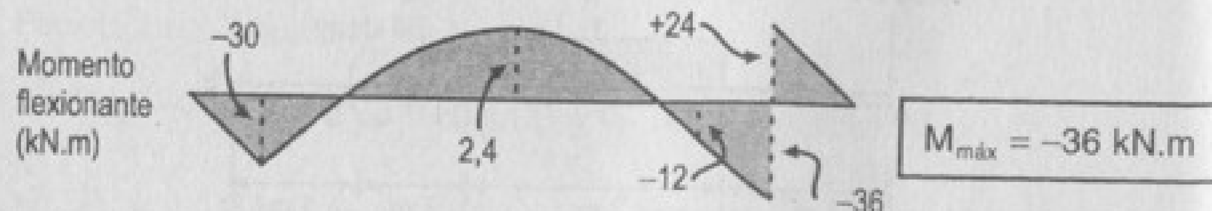
$M_A = 0, \ \Delta M_{AB} = (-30)(1) = -30, \ M_B^i = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 30 = -30 \text{ kN.m}$

$M_B^d = M_B^- = -30, \ \Delta M_{By} = (36)(1{,}8/2) = 32{,}4 \ , \ M_y^i = -30 + 32{,}4 = 2{,}4 \text{ kN.m}$

$M_{máx} = M_y = 2{,}4 \ , \ \Delta M_{yC} = (-24)(1{,}2/2) = -14{,}4, \ M_C^i = 2{,}4 - 14{,}4 = -12 \text{ kN.m}$

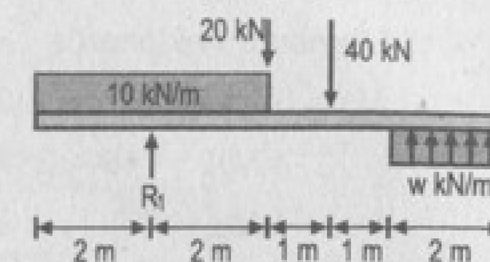
$M_C^d = M_C^i = -12 \ , \ \Delta M_{CD} = (-24)(1) = -24 \Rightarrow M_D^i = -12 - 24 = -36 \text{ kN.m}$

$M_D^d = M_D^i + 60 = -36 + 60 = 24, \ \Delta M_{DE} = (-24)(1) = -24 \rightarrow M_E = -24 = 0 \text{ kN.m}$

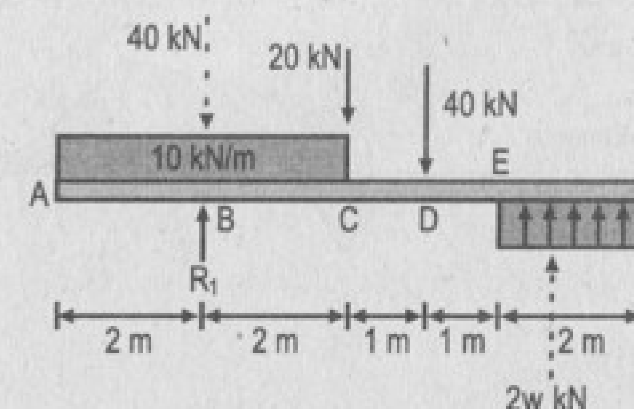


$M_{máx} = -36 \text{ kN.m}$

435. Viga cargada como se muestra en la figura.



Resolución:



a) Reacciones

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_B = 0: -20(2) - 40(3) + 2w(5) = 0 \quad \Rightarrow \ w = 16 \text{ kN/m}$

$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0: R_1 - 40 - 20 - 40 + 2(16) = 0 \quad \Rightarrow \ R_1 = 68 \text{ kN}$

b) Cortante

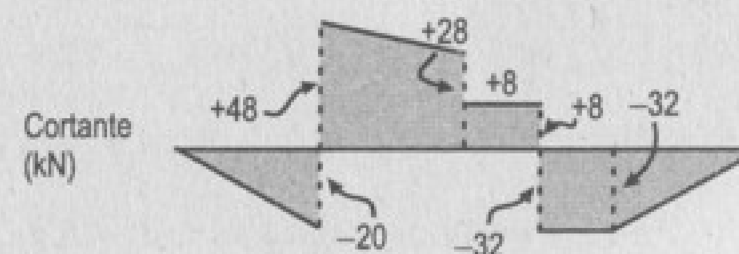
$V_A = 0, \ \Delta V_{AB} = (-10)(2) = -20 \Rightarrow V_B^i = V_A + \Delta V_{AB} = 0 - 20 = -20 \text{ kN}$

$V_B^d = V_B^i + R_1 = -20 + 68 = 48, \ \Delta V_{BC} = (-10)(2) = -20 \Rightarrow V_C^i = 48 - 20 = 28 \text{ kN}$

$V_C^d = V_C^i - 20 = 28 - 20 = 8 \ , \ \Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_E^i = 8 + 0 = 8 \text{ kN}$

$V_D^d = V_D^i - 40 = 8 - 40 = -32, \ \Delta V_{DE} = 0 \Rightarrow V_E^i = V_D^d + \Delta V_{DE} = -32 + 0 = -32 \text{ kN}$

$V_E^d = V_E^i = -32 \ , \ \Delta V_{EF} = (16)(2) = 32 \Rightarrow V_F = V_E^d + \Delta V_{EF} = -32 + 32 = 0 \text{ kN}$



c) Momento flexionante

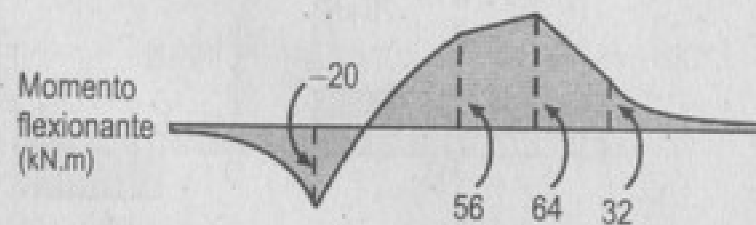
$M_A = 0,\ \Delta M_{AB} = (-20)(2/2) = -20,\ M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 20 = -20$ kN.m

$\Delta M_{BC} = (48 + 28)(2/2) = +76,\ M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -20 + 76 = 56$ kN.m

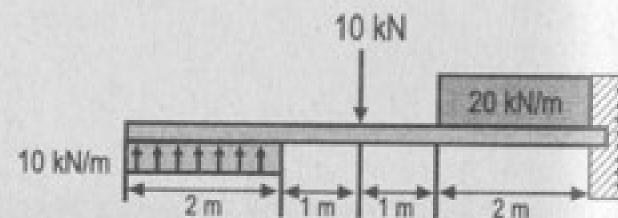
$\Delta M_{CD} = (8)(1) = 8,\ M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 8 + 56 = 64$ kN.m

$\Delta M_{DE} = (-32)(1) = -32,\ M_E = M_D + \Delta M_{DE} = 64 - 32 = 32$ kN.m

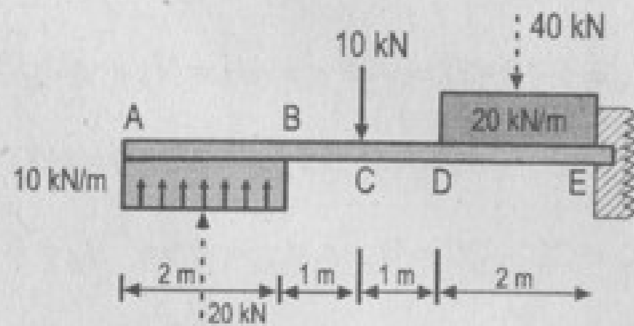
$\Delta M_{EF} = (-32)(2/2) = -32,\ M_F = M_E + \Delta M_{EF} = 32 - 32 = 0$ kN.m



436. Viga en voladizo cargada como se indica en la figura.



Resolución:



a) Cortante

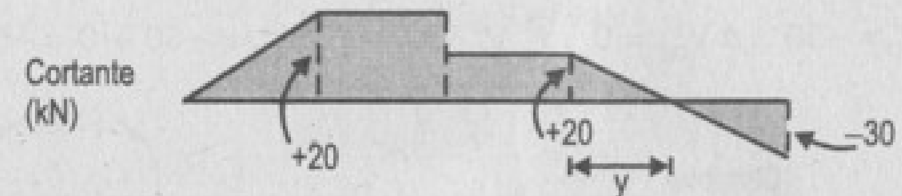
$V_A = 0\ ,\ \Delta V_{AB} = (10)(2) = 20$ kN $\Rightarrow V_B^i = V_A + \Delta V_{AB} = 0 + 20 = 20$ kN

$V_B^d = V_B^i = 20\ ,\ \Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow + \ V_C^i = V_B^d + \Delta V_{BC} = 20 + 0 = 20$

$V_C^d = V_C^i - 10 = 20 - 10 = 10\ ,\ \Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_D^i = V_C^d + \Delta V_{CD} = 10 + 0 = 10$ kN

$V_D^d = V_D^i = 10\ ,\ \Delta V_{DE} = (-20)(2) = -40 \Rightarrow V_E = V_D^d + \Delta V_{DE} = 10 - 40 = -30$ kN

Cálculo de y: $y = \frac{10}{40} \times 2 = 0{,}5$ m



b) Momento flexionante

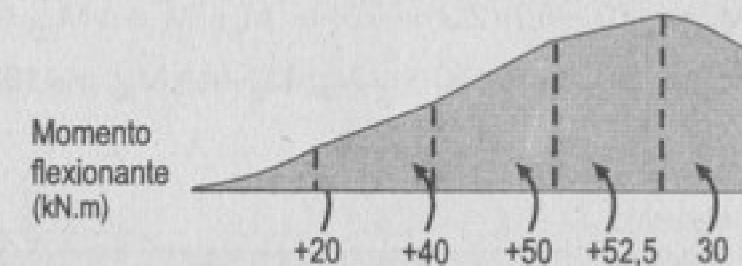
$M_A = 0, \Delta M_{AB} = (20)(2/2) = 20 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 20 = 20$ kN.m

$\Delta M_{BC} = (+20)(1) = 20 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 20 + 20 = 40$ kN.m

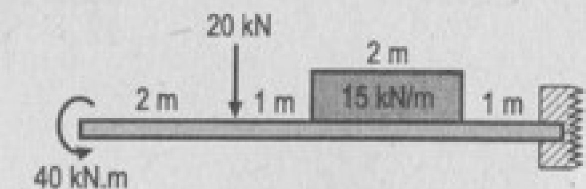
$\Delta M_{CD} = (+10)(1) = 10 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 40 + 10 = 50$ kN.m

$\Delta M_{Dy} = (10)(0{,}5/2) = 2{,}5 \Rightarrow M_y = M_D + \Delta M_{Dy} = 50 + 2{,}5 = 52{,}5$ kN.m

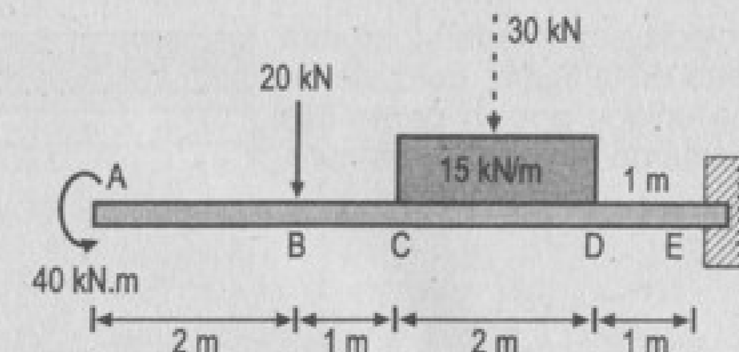
$\Delta M_{yE} = (-30)(1{,}5/2) = -22{,}5 \Rightarrow M_E = M_y + \Delta M_{yE} = 52{,}5 - 22{,}5 = 30$ kN.m



437. Viga en voladizo cargada como se muestra en la figura.



Resolución:



a) Cortante

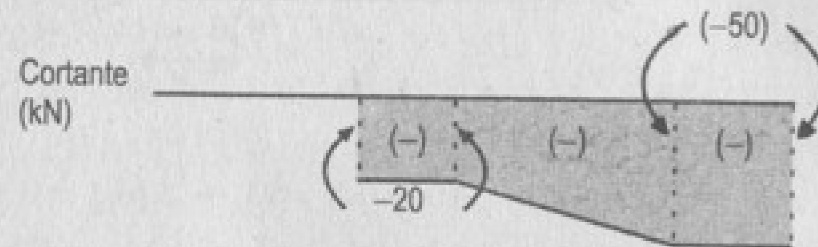
$V_A = 0\ ,\ \Delta V_{AB} = 0,\ V_B^i = 0$

$V_B^d = V_B^i - 20 = 0 - 20 = -20$ kN

$\Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow = V_C^i = -20$ kN

$V_C^d = V_C^i = -20,\ \Delta V_{CD} = (-15)(2) = -30\ ,\ V_D^i = V_C^d + \Delta V_{CD} = -20 - 30 = -50$

$V_D^d = V_D^i = -50\ ,\ \Delta V_{DE} = 0 \Rightarrow V_E^i = V_D^d + \Delta V_{DE} = -50 + 0 = -50$ kN



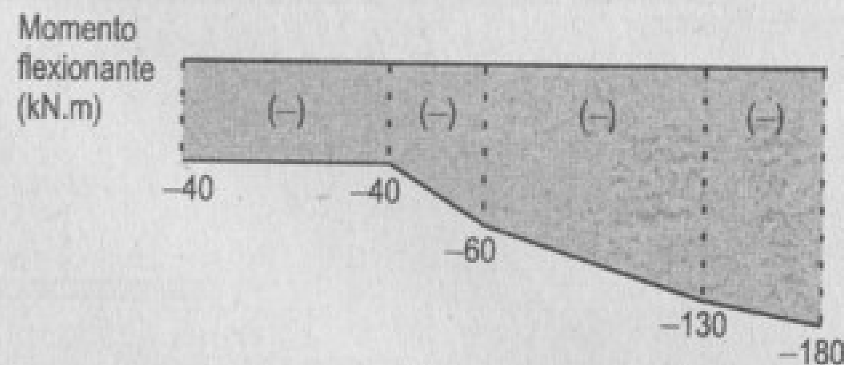
b) Momento flexionante

$M_A = -40,\ \Delta M_{AB} = 0 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -40 + 0 = 40$ kN.m

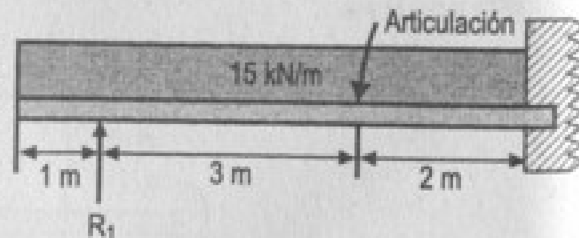
$\Delta M_{BC} = (-20)(1) = -20 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -40 - 20 = -60$ kN.m

$\Delta M_{CA} = (-20 - 50)(2/2) = -70 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -60 - 70 = -130$ kN.m

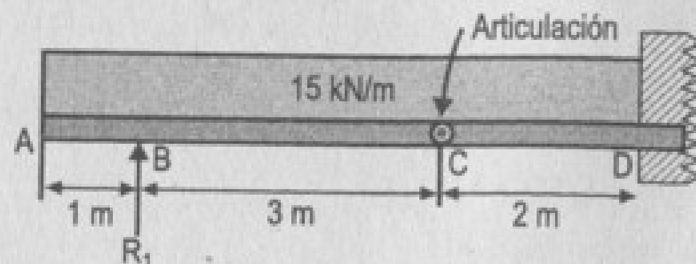
$\Delta M_{DE} = (-50)(1) = -50 \Rightarrow M_E = M_D + \Delta M_{DE} = -130 - 50 = -180$ kN.m



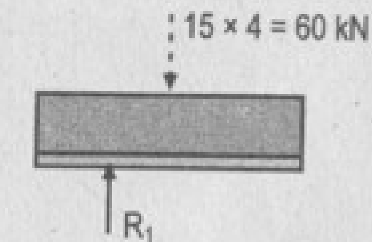
438. Una viga en voladizo apuntada y cargada como se muestra en la figura consiste de dos segmentos unidos por un perno liso en el que el momento flexionante es nulo.



Resolución:



(a) Reacciones



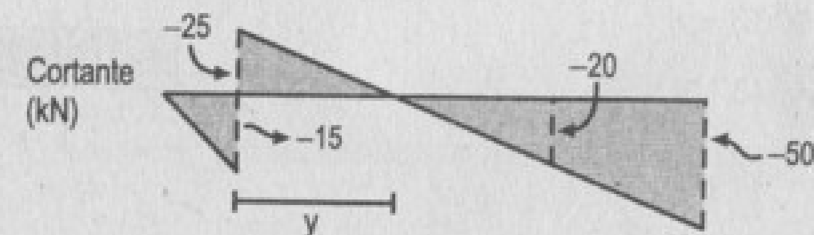
$\overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_c = 0:\ 60(2) - R_1(3) = 0 \Rightarrow R_1 = 40$ kN

a) Cortante

$V_A = 0,\ \Delta V_{AB} = (-15)(1) = -15 \Rightarrow V_B^i = V_A + \Delta V_{AB} = 0 - 15 = -15$ kN

$V_B^d = V_B^i + R_1 = -15 + 40 = 25,\ \Delta V_{BC} = (-15)(3) = -45 \Rightarrow V_C^i = 25 - 45 = -20$ kN

$V_C^d = V_C^i = -20$ kN, $\Delta V_{CD} = (-15)(2) = -30 \Rightarrow V_D = V_C^d + \Delta V_{CD} = -20 - 30 = -50$ kN



Cálculo de y: ?

$y = \frac{25}{45}(3) = \frac{5}{3} = 1{,}67$m

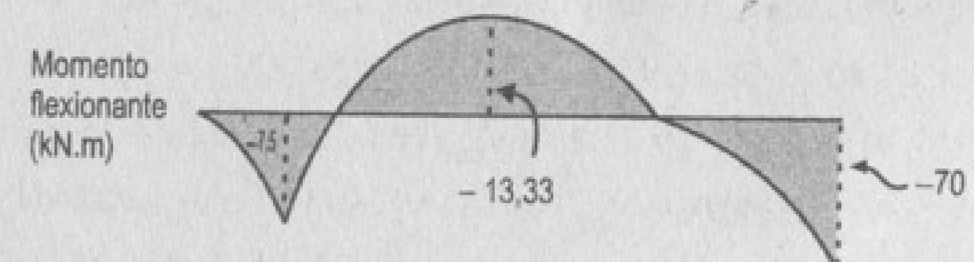
b) Momento flexionante

$M_A = 0,\ \Delta M_{AB} = (-15)(1/2) = -7{,}5 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 7{,}5 = -7{,}5$ kN.m

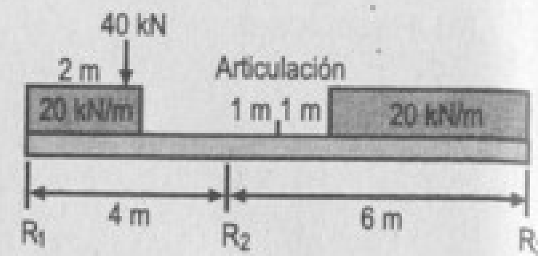
$\Delta M_{By} = (25)(5/3)/2 = 20{,}83 \Rightarrow M_y = M_B + \Delta M_{By} = -7{,}5 + 20{,}83 = 13{,}33$ kN.m

$\Delta M_{yC} = (-20)(4/3)/2 = -13{,}33 \Rightarrow M_C = M_y + \Delta M_{yC} = 0$ kN.m

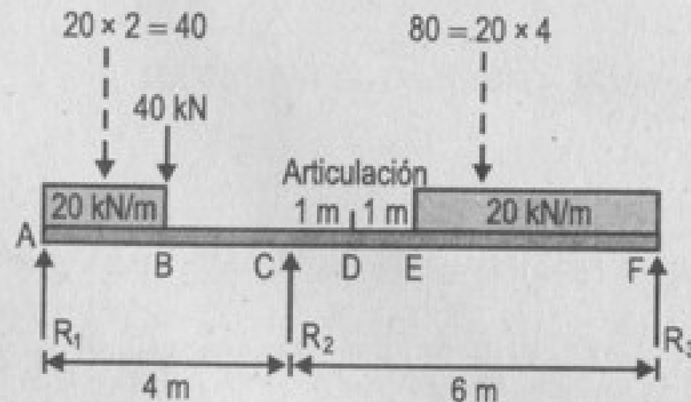
$\Delta M_{CD} = (-20-50)(2/2) = -70 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 0 - 70 = -70$ kN.m



439. Una viga apoyada en tres puntos como se muestra en la figura consiste en dos segmentos unidos en un perno liso en el que el momento flexionante es nulo.



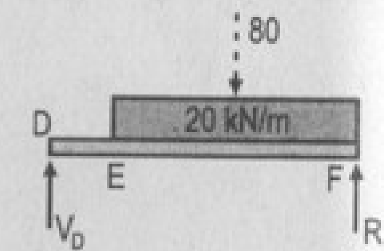
Resolución:



a) Cálculo de las reacciones

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_D' = 0:\ R_3(5) - 80(3) = 0$

$R_3 = 48$ kN

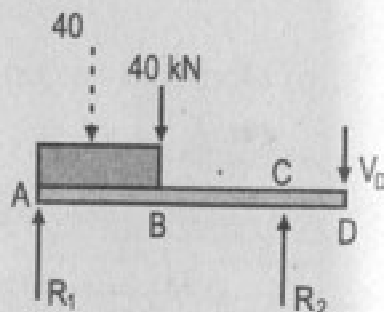


$+\uparrow\ \Sigma F_V' = 0:\ V_D - 80 + 48 = 0$

$V_D = 32$ kN

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma F_C' = 0:\ (-32)(1) + 40(2) + 40(3) - R_1(4) = 0$

$R_1 = 42$ kN



$+\uparrow\ \Sigma F_V' = 0:\ 42 - 40 - 40 + R_2 - 32 = 0$

$R_2 = 70$ kN

b) Cortante

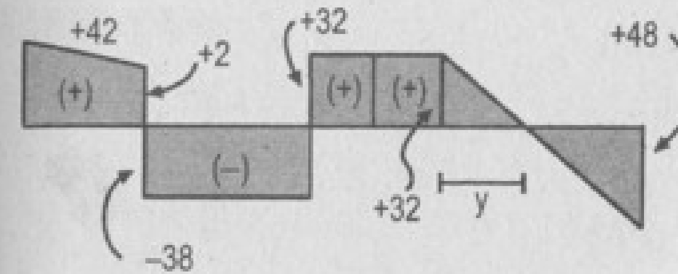
$V_A = R_1 = 42\ ,\ \Delta V_{AB} = (-20)(2) = -40 \Rightarrow V_B^i = \Delta V_{AB} = 42 - 40 = 2$ kN

$V_B^d = V_B^i = -40 = -38,\ \Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow V_C^i = V_B^d + \Delta V_{BC} = -38$ kN

$V_C^d = V_C^i + R_2 = -38 + 70 = 32,\ \Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_D^i = V_C^d + \Delta V_{CD} = 32$ kN

$V_D^d = V_D^i \pm V_D = 32$ kN $,\ \Delta V_{DE} = 0 \Rightarrow V_E^i = V_D^d + \Delta V_{DE} = 32$ kN

$V_E^d = V_E^i = 32$ kN $,\ \Delta V_{EF} = (-20)(4) = -80 \Rightarrow V_F^i = V_E^d + \Delta V_{EF} = -48$ kN



Cálculo de y:

$$y = \frac{32}{(32+48)}(4) = 1{,}6\ \text{m}$$

c) Momento flexionante:

$M_A = 0;\ \Delta M_{AB} = (42 + 2)(2)/2 = 44 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 44 = 44$ kN.m

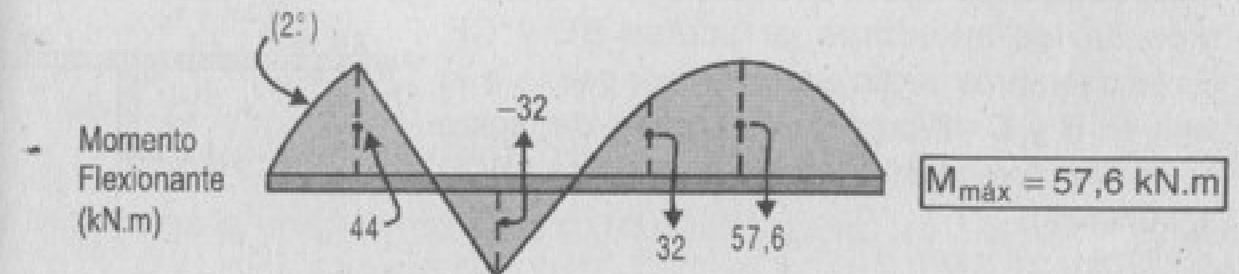
$\Delta M_{BC} = (-38)(2) = -76 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 44 - 76 = -32$ kN.m

$\Delta M_{CD} = (32)(1) = 32 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -32 + 32 = 0$ kN.m

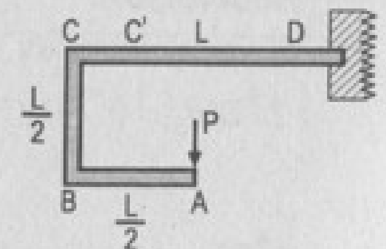
$\Delta M_{DE} = (32)(1) = 32 \Rightarrow M_E = M_D + \Delta M_{DE} = 0 + 32 = 32$ kN.m

$\Delta M_{EY} = (32)(1{,}6)/2 = 25{,}6 \Rightarrow M_Y = M_E + \Delta M_{EY} = 32 + 25{,}6 = 57{,}6$ kN.m

$\Delta M_{YF} = (-48)(2{,}4)/2 = -57{,}6 \Rightarrow M_F = M_Y + \Delta M_{YF} = 0$ kN.m

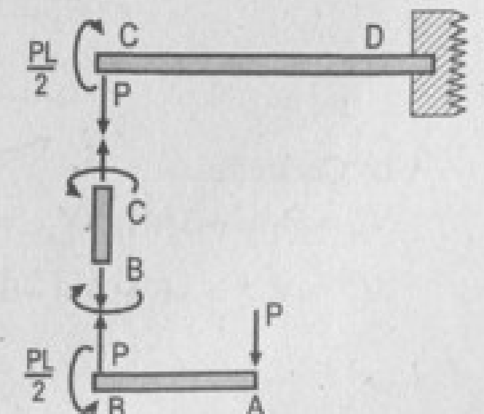


440. Un marco ABCD, con esquinas rígidas en B y C, sostiene la carga concentrada P como se muestra en la figura. (Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada una de las tres partes del marco).



Resolución:

a) Cortante



$V_B = P\ ,\ \Delta V_{BA} = 0,\ V_A = V_B + \Delta V_{BA} = P$

$V_C = -P\ ,\ \Delta V_{CD} = 0,\ V_D = V_C + \Delta V_{CD} = -P$

b) Momento flexionante

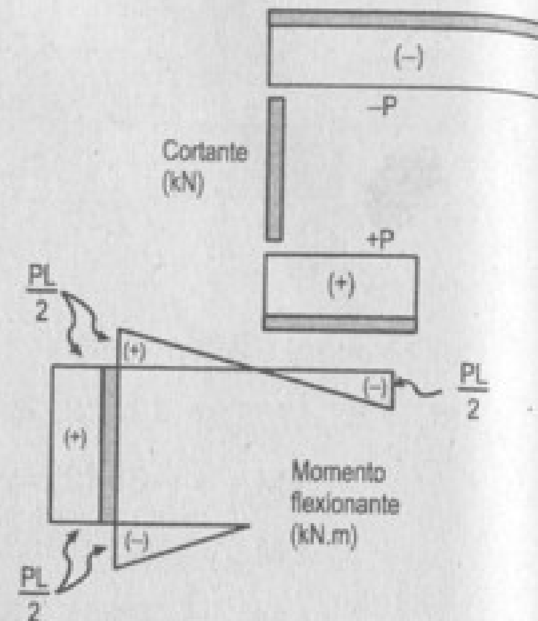
$M_B = -\frac{PL}{2}$, $\Delta M_{BA} = (+P)(L/2) = PL/2$

$\Rightarrow M_A = M_B + \Delta M_{BA} = -\frac{PL}{2} + \frac{PL}{2} = 0$

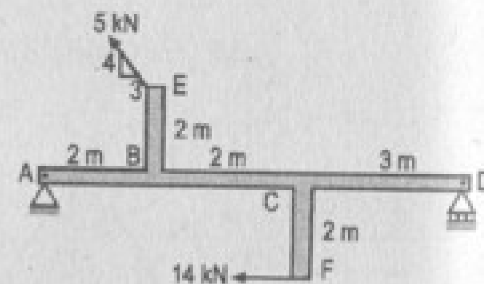
$M_C = \frac{PL}{2}$, $\Delta M_{CD} = (-P)(L) = -PL$

$\Rightarrow M_D = \frac{PL}{2} - PL = \frac{PL}{2}$

$M_B^{\overline{BC}} = \frac{PL}{2}$, $\Delta M_{BC} = 0 \Rightarrow M_C^{\overline{BC}} = \frac{PL}{2}$



441. Una viga ABCD está sostenida por un perno en A y un apoyo libre en D, sujeta a las cargas mostradas en la figura, que actúan en los extremos de los miembros verticales BE y CF. Estos miembros están unidos rígidamente a la viga en B y C. (Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ABCD solamente).



Resolución:

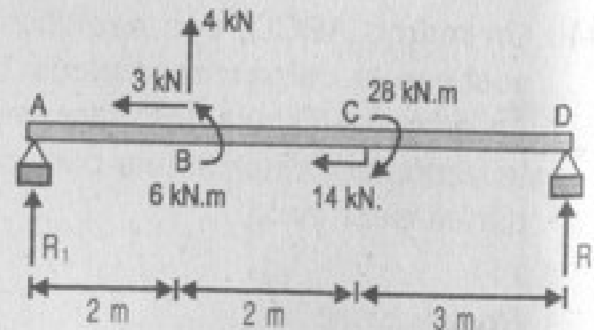
c) Cálculo de las reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: -R_1(7) - 4(5) + 6 - 28 = 0$

$\Rightarrow R_1 = -6$ kN

$\uparrow \Sigma F_V = 0: -6 + 4 + R_2 = 0$

$\Rightarrow R_2 = 2$ kN



b) Cortante

$V_A = R_1 = -6$ kN, $\Delta V_{AB} = 0 \Rightarrow = V_A + \Delta V_{AB} = -6 + 0 = -6$ kN

$V_B^{(+)} = V_B^{(-)} = -6 + 4 = -6 + 4 = -2$, $\Delta V_{BD} = 0 \Rightarrow V_D = V_B^{(+)} + \Delta V_{BD} = -2 + 0$

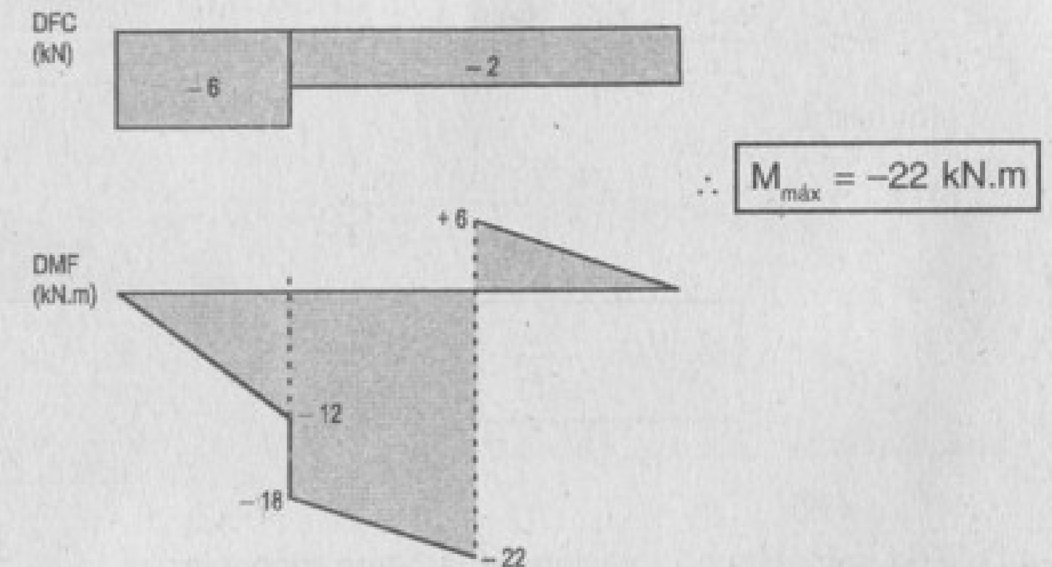
$= -2$ kN

c) Momentos

$M_A = 0$; $\Delta M_{AB} = 2(-6) = -12$; $M_B^{(-)} = M_D + \Delta M_{AB} = 0 - 12 = -12$ kN.m

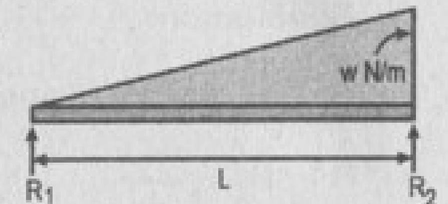
$M_B^{(+)} - M_B^{(-)}\ 6 = -18$ kN.m; $\Delta M_{BC} = 2(-2) = -4$, $M_C^{(-)} = M_C^{(+)} + \Delta M_{BC} = -22$

$M_C^{(+)} = M_C^{(-)} + 28 = -22 + 28 = 6$, $\Delta M_{CD} = 3(-2) = -6$, $M_D = M_C^{(+)} + \Delta M_{CD} = 0$

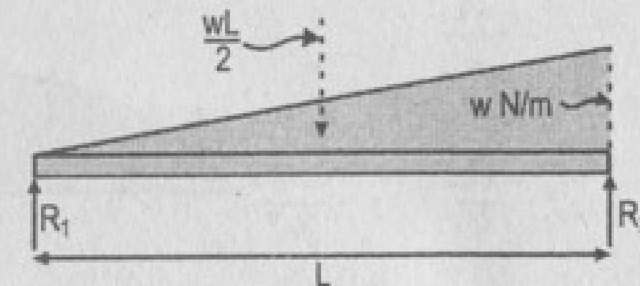


$\therefore$ $M_{máx} = -22$ kN.m

442. Viga cargada uniformemente, como indica la figura.



Resolución:



Reacciones:

$\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: -R_1(L) + \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{wL}{6}$

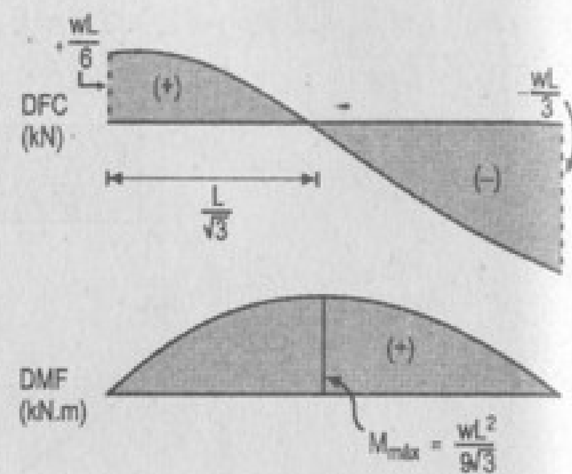
$+\uparrow \Sigma F_V = 0: \frac{wL}{6} - \frac{wL}{2} + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{wL}{3}$

Cortante:

$$V_1 = \frac{wL}{6};\ \Delta V_{1-2} = -\frac{wL}{2};\ V_2 = V_1 + \Delta V_{1-2} = -\frac{wL}{3}$$

Para el cortante cero:

$$\Delta V_{1-x} = \frac{wx^2}{2L} \Rightarrow \frac{wL}{6} = \frac{wx^2}{2L} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

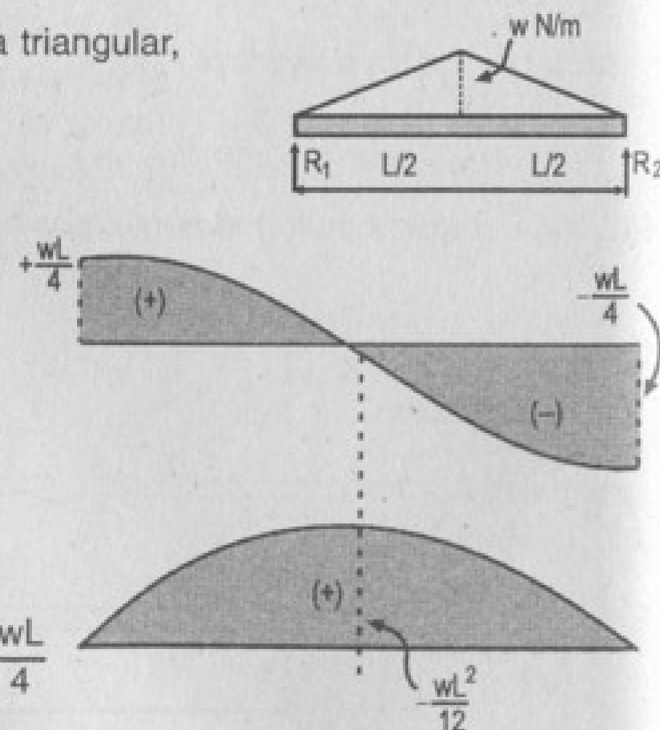


Momento:

$$M_1 = 0 : \Delta M_{1-x} = \frac{2}{3}\left(\frac{wL}{6}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$$

$$\therefore \boxed{M_{máx} = +\frac{wL^2}{9\sqrt{3}}}$$

443. Viga sometida a la acción de la carga triangular, como indica la figura.



Resolución:

Por equilibrio y simetría:

$$R_1 = R_2 = \frac{wL}{4}$$

$$V_1 = R_1 = \frac{wL}{4};\ \Delta V_{1-L/2} = -\frac{wL}{4}$$

$$V_{L/2}^{(-)} = 0$$

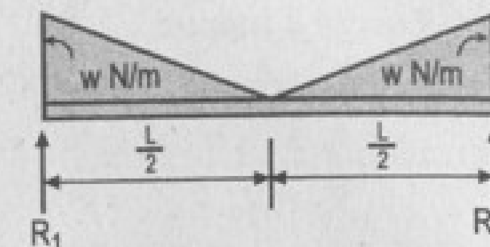
$$V_{L/2}^{(+)} = V_{L/2}^{(-)} = 0;\ \Delta V_{L/2-2} = -\frac{wL}{4},\ V_2 = -\frac{wL}{4}$$

Momento flexionante:

$$M_1 = 0:\ \Delta M_{1-L/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{wL}{4}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^2}{12}$$

$$\therefore \boxed{M_{máx} = \frac{wL^2}{12}}$$ Además el DMF debe ser simétrico.

444. Viga cargada como indica la figura.

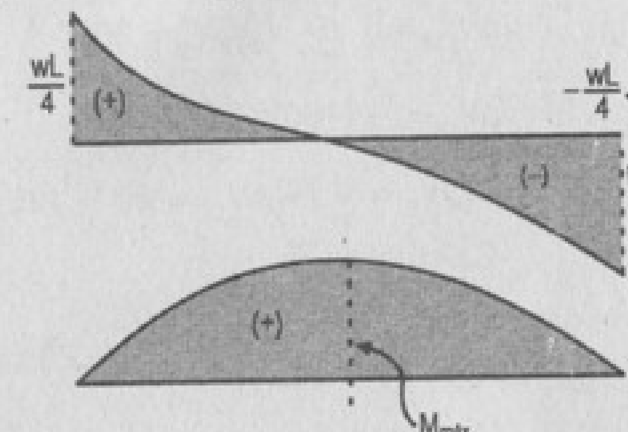


Resolución:

Este problema es similar al anterior y presenta lo siguiente:

Reacciones: ídem P-443

Cortante: ídem P-443

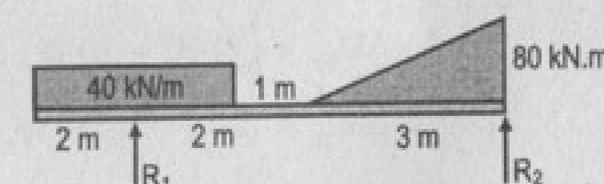


Momento flexionante:

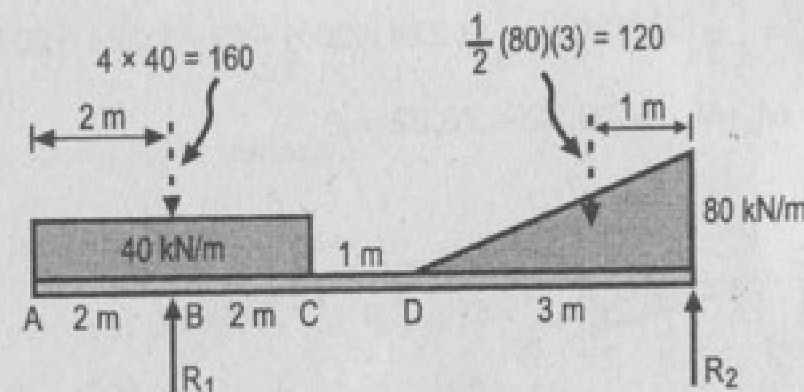
$$M_1 = 0 : \Delta M_{1-L/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{wL}{4}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^2}{24}$$

$$\therefore \boxed{M_{máx} = \frac{wL^2}{24}}$$

445. Viga cargada como indica la figura.



Resolución:



Cálculo de reacciones:

$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_E = 0:\ 120(1) + 160(6) - R_1(6) = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = 180 \text{ kN}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_V = 0 : R_1 + R_2 - 160 - 120 = 0$$

$$\Rightarrow R_2 = 100 \text{ kN}$$

Fuerza cortante:

$V_A = 0,\ \Delta V_{AB} = -40(2) = -80$

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 0 - 80 = -80$

$V_B^+ = V_B + R_1 = 100$

$\Delta V_{BC} = 40(2) = 80$

$V_C = V_B^+ + \Delta V_{BC} = 20$

$\Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_D = V_C = 20$

$\Delta V_{DE} = \frac{1}{2}(-80)(3) = -120$

$\Rightarrow V_E = V_D + \Delta V_{DE} = 20 - 120 = -100$

Cálculo de x:

$$\Delta V_{DX} = \frac{1}{2}\left(\frac{80}{3}x\right)(x) = 20 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1{,}224\,m$$

Momento flexionante:

$M_A = 0$: $\Delta M_{AB} = \frac{1}{2}(-80)(2) = -80$; $\quad M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -80$ kN.m

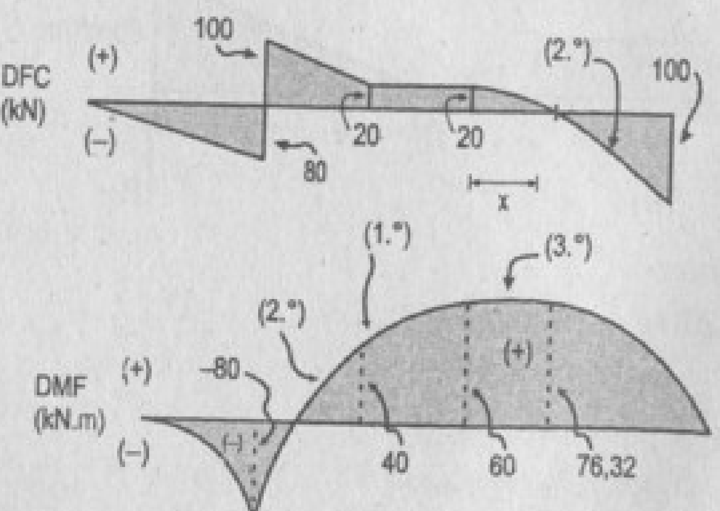
$\Delta M_{BC} = \frac{1}{2}(100 + 20)(2) = 120$; $M_C = M_A + \Delta M_{BC} = 40$ kN.m

$\Delta M_{CD} = (20)(1) = 20$; $M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 60$ kN.m

$\Delta M_{DX} = \frac{2}{3}(1{,}224)(20) = 16{,}82$, $M_X = M_D + \Delta M_{DX} = 76{,}32$ kN.m

$\Delta M_{XE} = \left[\frac{1}{3}(3)(120) - \frac{1}{3}(1{,}224)(20)\right] - (3 - 1{,}224)(20) = -76{,}32$ kN.m

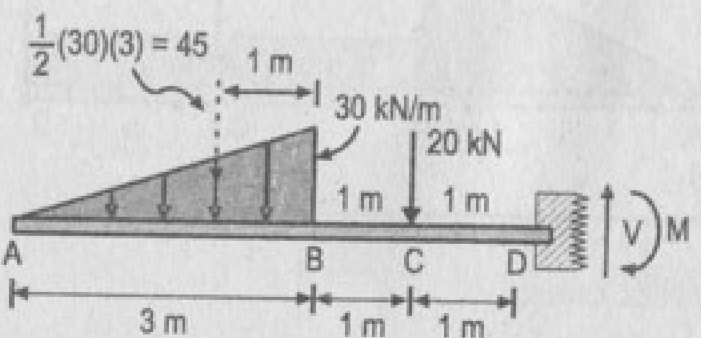
$M_E = M_X + M_{XE} = 76{,}32 - 76{,}32 = 0$



$M_{máx} = -80$ kN.m

446. Viga en voladizo, cargada como se muestra en la figura.

Resolución:



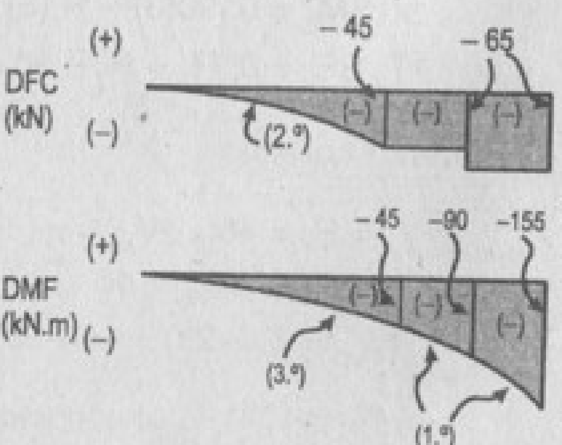
Cálculo de las reacciones:

$+\uparrow\ \Sigma F_x = 0$: $V - 45 - 20 = 0$

$V = 65$ kN

$\Sigma M_D = 0$: $20(1) + 45(3) - M = 0$

$M = 155$ kN.m



Cálculo de la fuerza cortante:

$V_A = 0$; $\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(3)(30) = 45$; $V_B = -45$

$V_B^d = V_B = -45$, $\Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow V_C = -45$

$V_C^d = V_C - 20 = -45 - 20 = -65$

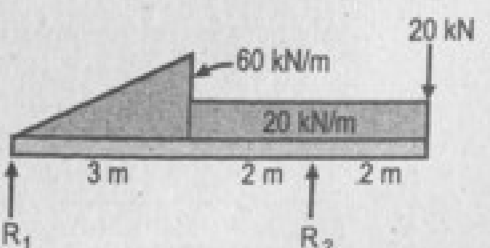
Cálculo del momento flexionante:

$M_A = 0$; $\Delta M_{AB} = \frac{1}{3}(3)(-45) = -45 \Rightarrow M_B = -45$

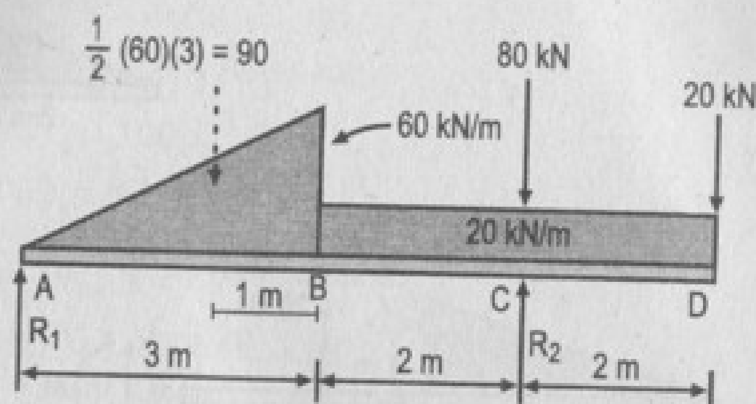
$\Delta M_{BC} = (1)(-45) = -45 \Rightarrow M_C = -90$

$\Delta M_{CD} = (1)(-65) = -65 \Rightarrow M_D = -155$

447. Viga cargada como se muestra en la figura.



Resolución:



Cálculo de las reacciones:

$\circlearrowleft^{+}$ $SM_C = 0: 90(3) - R_1(5) - 20(2) = 0 \Rightarrow R_1 = 46$ kN

$+\uparrow$ $SF_V = 0: R_1 + R_2 - 90 - 80 - 20 = 0 \Rightarrow R_2 = 144$ kN

Fuerza cortante:

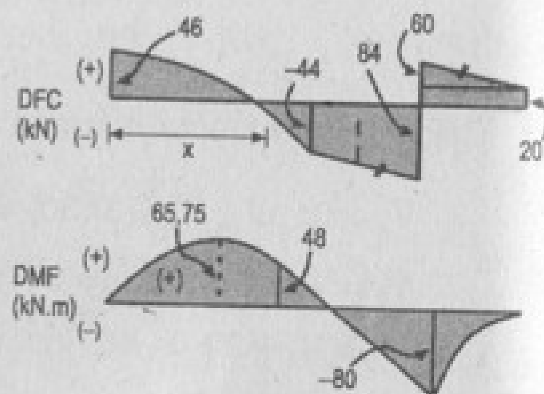
$V_A = R_1 = 46;\ \Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(3)(-60) = -90$ kN

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 46 - 90 = -44$ kN

$\Delta V_{BC} = (2)(-20) = -40 \Rightarrow V_C = -84$ kN

$V_C^d = V_C + R_2 = -84 + 144 = 60$ kN

$\Delta V_{CD} = (2)(-20) = -40 \Rightarrow V_D = 20$ kN



Cálculo de x:

$\frac{1}{2}(20x)(x) = 46 \Rightarrow x = 2{,}144$

Cálculo de momento flexionante:

$M_A = 0;\ \Delta M_{AX} = \frac{2}{3}(2{,}144)(46) = 65{,}75 \Rightarrow M_X = M_A + \Delta M_{AX} = 65{,}75$

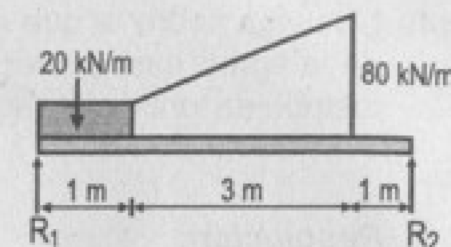
$\Delta M_{XB} = \left[\frac{1}{3}(90)(3) - \frac{1}{3}(46)(2{,}144) - (46)(3 - 2{,}144)\right] = -17{,}75 \Rightarrow M_B = 48$

$\Delta M_{BC} = \frac{1}{2}(-44 - 84)(2) = -128 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 48 - 128 = -80$

$\Delta M_{CD} = \frac{1}{2}(60 + 20)(2) = 80 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -80 + 80 = 0$

$\boxed{M_{máx} = -80 \text{ kN.m}}$

448. Viga cargada como se indica en la figura.



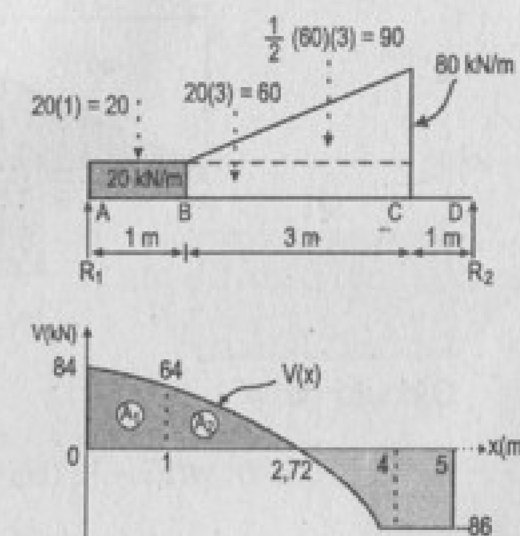
Resolución:

Cálculo de reacciones:

$\circlearrowleft^{+}$ $\Sigma M_D = 0 : 20(4{,}5) + 60(2{,}5) + 90(2) - R_1(5) = 0 \Rightarrow R_1 = 84$ kN

$+\uparrow$ $\Sigma F_V = 0 : R_1 + R_2 - 20 - 60 - 90 = 0$

$R_2 = 86$ kN



Fuerza cortante:

$V_A = R_1 = 84,\ \Delta V_{AB} = (-20)(1) = -20$

$V_B = V_A + DV_{AB} = 84 - 20 = 64$ kN

$\Delta V_{BC} = \frac{1}{2}(-80 - 20)(3) = -150$

$\Rightarrow V_C = V_B + \Delta V_{BC} = 64 - 150 = -86$ kN

Cálculo de x: (cortante cero)

$20x + 10x^2 = 64 \Rightarrow x^2 + 2x - 6{,}4 = 0 \Rightarrow x = 1{,}72$

Momento flexionante:

El momento máximo será la suma de las áreas A_1 y A_2:

$M_{máx.} = A_1 + A_2$

$A_1 = \frac{1}{2}(84 + 64)(1)\ \text{kN.m} = 74\ \text{kN.m}$ ...(1)

Para A_2 es generada por una curva de segundo grado:

$V_{(x)} = 84 - 20x - 10(x-1)^2 = 74 - 10x^2$

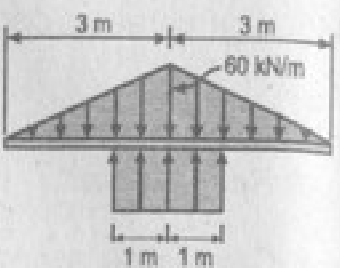
Así: $A_2 = \int_1^{2,72}(74 - 10x^2)dx = 74x - \frac{10}{3}x^3 \Big|_1^{2,72}$

$\Rightarrow A_2 = 63{,}54$ kN.m ...(2)

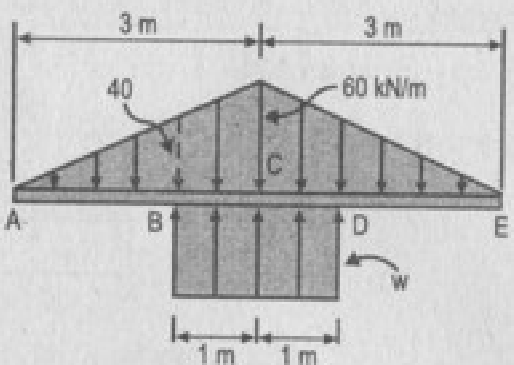
Por lo tanto: $M_{máx} = 74$ kN.m + 63,54 kN.m

$\boxed{M_{máx} = 137{,}5 \text{ kN.m}}$

449. Una viga sobre la que actúa la carga triangular de la figura está sostenida por una reacción distribuida uniformemente.



Resolución:



Cálculo de w:

$$\Sigma F_V = 0\text{: } w(2) - \frac{1}{2}(6)(60) = 0$$

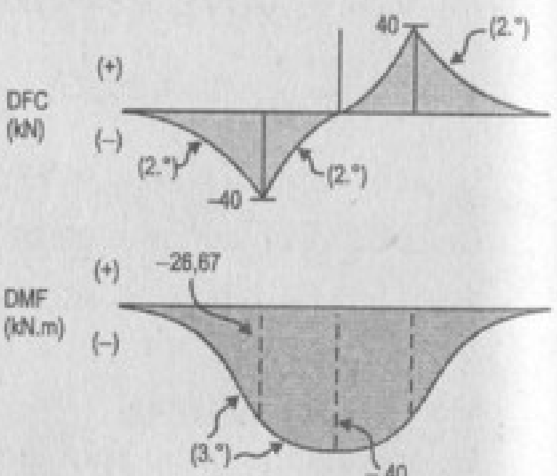
$$w = 90 \text{ kN/m}$$

Fuerza cortante:

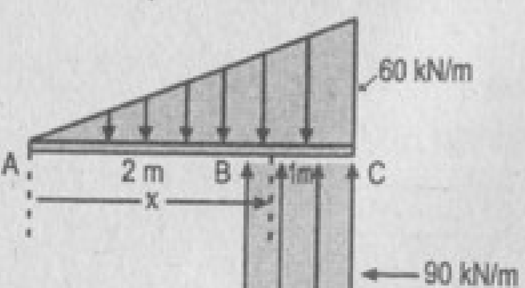
$$V_A = 0 \text{ ; } \Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(40)(2) = -40 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{BC} = \frac{1}{2}(-40-60)(1) + 90(1) = 40 \text{ kN}$$

$$V_B = -40 \Rightarrow V_C = V_B + \Delta V_{BC} = 0$$



Momento flexionante:
De la ecuación que genera el momento flector respecto a una variable "x" genérica:
Graficando solo hasta el punto medio "C" por ser simétrico.



Donde:

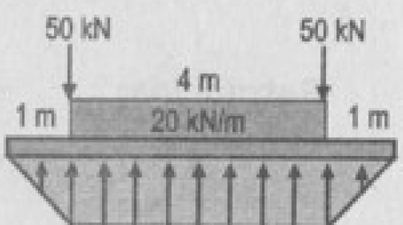
$$M_{(x)} = -\frac{20}{2}x^2\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{90}{2}(x-2)^2 = -\frac{10}{3}x^3 + 45(x-2)^2$$

Obtenemos $M_{máx}$ para x = 3:

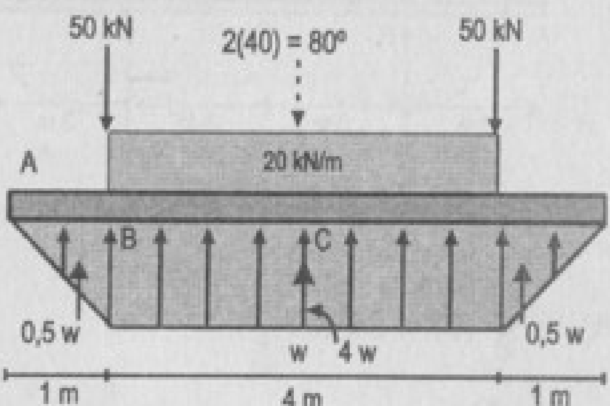
$$M_{max} = \left(-\frac{10}{3}(3)^3 + 45(3-2)^2\right) \text{ kNm} = -45 \text{ kN.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{máx} = -45 \text{ kN.m}}$$

450. Viga cargada y apoyada como se muestra en la figura.



Resolución:



Cálculo de w:

$$+\uparrow \Sigma F_v = 0 : 5w - 80 - 2(50) = 0$$

$$w = 36 \text{ kN/m}$$

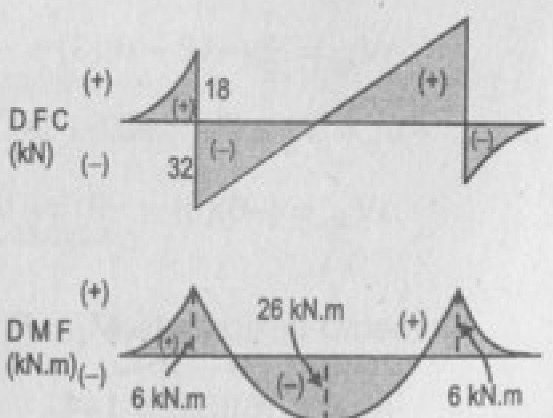
Fuerza cortante: $V_A = 0$

$$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(36)(1) = 18 \text{ kN} \Rightarrow V_B = 18 \text{ kN}$$

$$V_B^d = V_B - 50 = 18 - 50 = -32 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{BC} = (36 - 10)(2) = 32 \text{ kN} \Rightarrow V_C = 0$$

$\Rightarrow$ resto antisimétrico

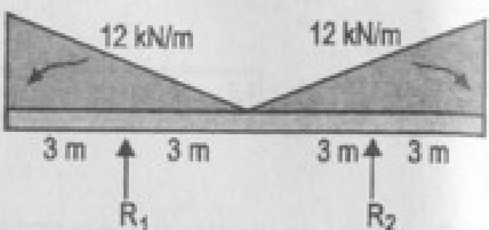


Momento flexionante: $M_A = 0$

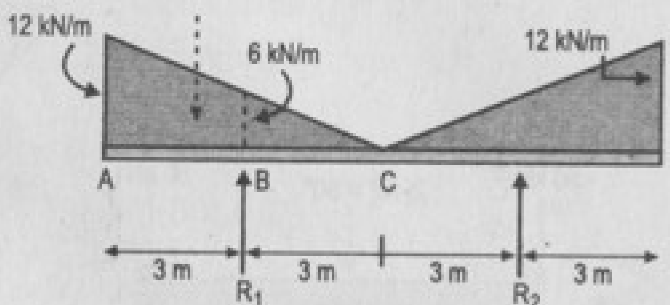
$$\Delta M_{AB} = \frac{1}{3}(18)(1) = 6 \text{ kN.m} \Rightarrow M_B = 6 \text{ kN.m}$$

$$\Delta M_{BC} = \frac{1}{2}(-32)(2) = -32 \text{ kN.m} \Rightarrow M_C = -26 \text{ kN.m} \Rightarrow \text{resto simétrico}$$

451. Viga cargada como se muestra en la figura.



Resolución:



Cálculo de reacciones:

Simétrico $\Rightarrow R_1 - R_2 = \frac{12}{2}(6) = 36$ kN

Fuerza cortante: $V_A = 0$

$$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(-12-6)(3) = -27 \Rightarrow V_B = 0 - 27 = -27$$

$$V_B^d = V_B + R_1 = -27 + 36 = 9 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{BC} = (-6)(3) = -9 \Rightarrow V_C = 9 - 9 = 0 \Rightarrow \text{resto antisimétrico}$$

Momento flexionante $M_A = 0$

$$A_T = \frac{2}{3}(6)(36) = 144$$

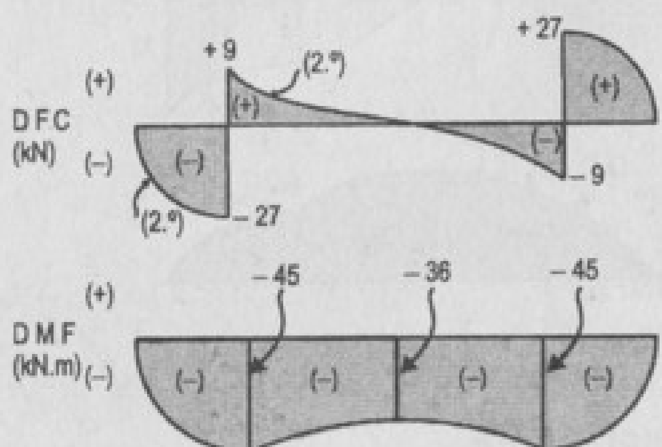
$$A_1 = \frac{2}{3}(3)(9) = 18 \Rightarrow A_2 = 81$$

$$\Delta M_{AB} = -(A_T - A_1 - A_2) = -(144 - 18 - 81) = -45$$

$$M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 45 = -45 \text{ kN.m}$$

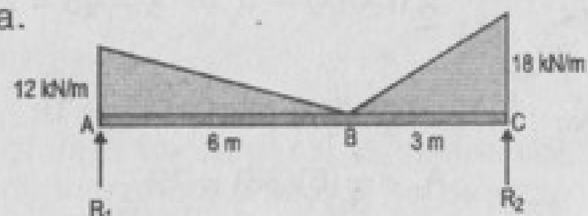
$$\Delta M_{BC} = \frac{1}{3}(3)(9) = 9 \text{ kN.m}$$

$$M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -45 + 9 = -36 \text{ kN.m}$$

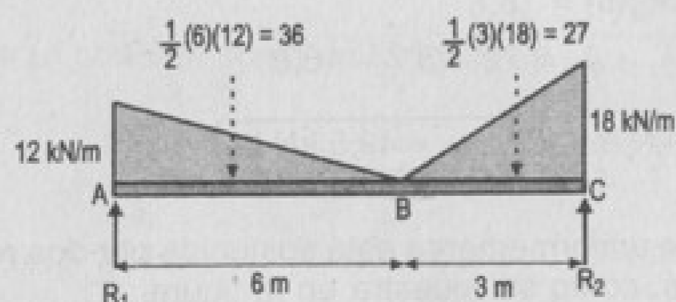


$M_{máx} = -45$ kN.m

452. Viga cargada cómo se muestra en la figura.



Resolución:



Cálculo de reacciones:

$\circlearrowleft+$ $\Sigma M_C = 0$: $27(1) + 36(7) - R_1(9) = 0 \Rightarrow R_1 = 31$ kN

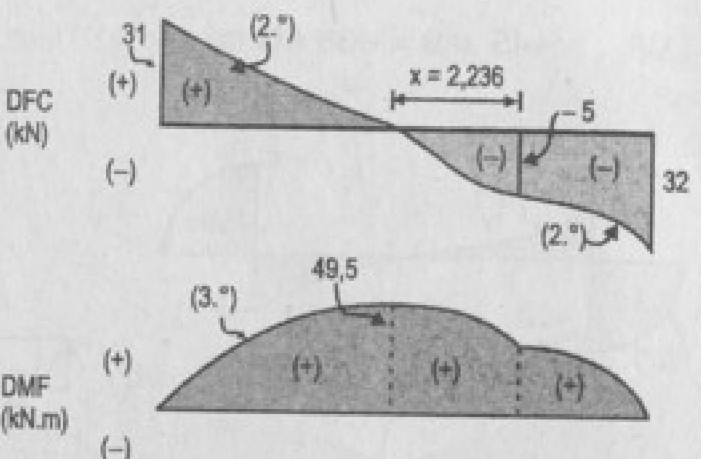
$+\uparrow$ $\Sigma F_v = 0$: $R_1 + R_2 - 36 \,.\, 27 = 0 \Rightarrow R_2 = 32$ kN

Fuerzas cortantes:

$V_A = R_1 = 31$ kN

$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(6)(-12) = -36$ kN

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 31 - 36 = -5$ kN

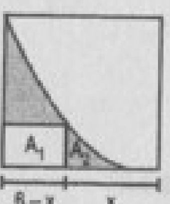


Cálculo de x: (cortante cero)

$\frac{1}{2}(2x)(x) = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} = 2{,}236$ m

Momento flexionante: $M_A = 0$

$A_T = \frac{1}{3}(6)(36) = 72$



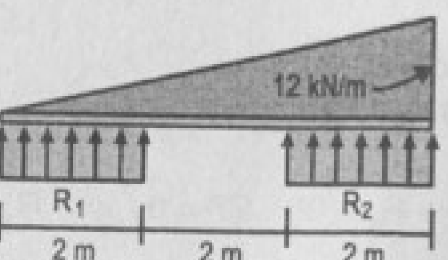
$A_2 = \frac{1}{3}(2{,}236)(5) = 3{,}7$

$A_1 = (6 - 2{,}236)(5) = 18{,}8$

$\Delta M_{AX} = A_T - A_1 - A_2 = 72 - 3{,}7 - 18{,}8$

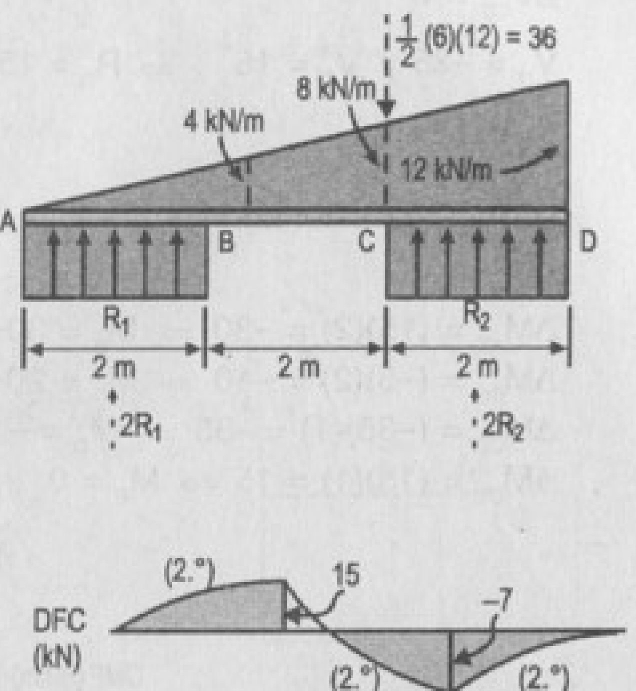
$\Delta M_{AX} = 49{,}5$ kN.m $\Rightarrow$ $\boxed{M_{máx} = 49{,}5 \text{ kN.m}}$

453. Una carga variable uniformemente está sostenida por dos reacciones uniformemente distribuidas, como se muestra en la figura.



Resolución:

Cálculo de las reacciones:



$\circlearrowleft + \; \Sigma M_X = 0$: $36(1) - 2R_1(4) = 0$

$R_1 = 4{,}5$ kN/m

$+\uparrow \; \Sigma F_V = 0$: $2R_1 + 2R_2 - 36 = 0$

$R_2 = 13{,}5$ kN/m

Fuerzas cortantes: $V_A = 0$

$\Delta V_{AB} = +2R_1 + \frac{1}{2}(2)(-4) = 5$ kN

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 0 + 5 = 5$ kN

$\Delta V_{BC} = \frac{1}{2}(2)(-4 - 8) = -12$ kN

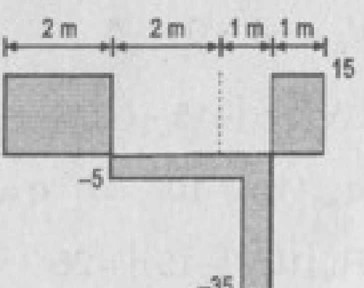
$V_C = V_B + \Delta V_{BC} = 5 - 12 = -7$ kN

$\Delta V_{CD} = 2R_2 + \frac{1}{2}(2)(-8 - 12) = 7$ kN

$V_D = V_C + DV_{CD} = -7 + 7 = 0$

En los problemas siguientes, trazar los diagramas de cargas y de momentos flexionantes correspondientes al diagrama de fuerza cortante que se da y cuyos valores están expresados en kN. Especificar los valores numéricos en todos los puntos de discontinuidad y en los de fuerza cortante nula.

454. Diagrama de fuerza cortante como en la figura.



Resolución:

Cargas:

$V_A = 15$

$\Delta V_{AB} = 0$

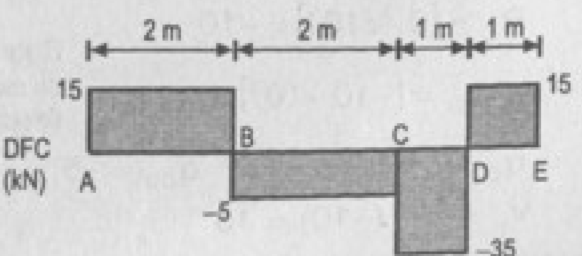
$V_B = 15 \Rightarrow V_B^d = -5$

$\Rightarrow R_B = -5 - 15 = -20$

$\Delta V_{EC} = 0$

$V_C = -5$ y $V_C^d = -35$

$\Rightarrow R_C = -35 - (-5) = -30$



$\Delta V_{CD} = 0$

$V_D = -35$ y $V_D^d = 15 \quad \Rightarrow R_D = 15 - (-35) = 50$

$V_E = 15$

Momento flexionante:

$M_A = 0$

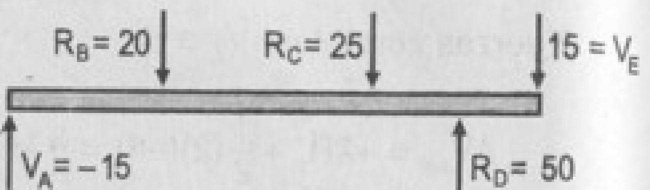
$\Delta M_{AB} = (15)(2) = -30 \Rightarrow M_B = 30$

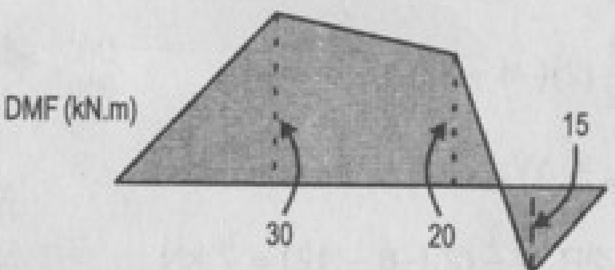
$\Delta M_{BC} = (-5)(2) = -10 \Rightarrow M_C = 20$

$\Delta M_{CD} = (-35)(1) = -35 \Rightarrow M_D = -15$

$\Delta M_{DE} = (15)(1) = 15 \Rightarrow M_E = 0$

Diagrama de cargas:





$M_{máx} = 30$ kN.m

455. Diagrama de fuerza cortante mostrado en la figura.

10 1 m 2 m -5 2 m - 15 - 10

Resolución:

$V_A = -5 - 0 = -5$

$\Delta V_{AB} = [-15 - (-5)] = -10$

$q_{AB}(1) = -10 \quad \Rightarrow \quad q = -10$

$R_B[10 - (-15)] = 25$

$\Delta V_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{BC} = 0$

$R_C = [0 - (10)] = -10$

$\Delta V_{CD} = [-10 - (0)] = -10$

$q_{CD}(2) = -10 \quad \Rightarrow \quad q_{CD} = -5$

$V_D = 0 - (-10) = 10$

Diagrama de fuerzas

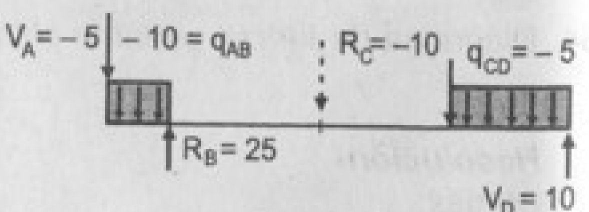
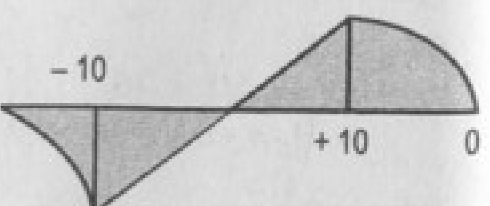


Diagrama de momento flexionante



Calculando el diagrama de momentos flexionante:

$M_A = 0\ ;\ \Delta M_{AB} = \frac{1}{2}(1)(-5-15) = -10 \quad \Rightarrow \quad M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -10$

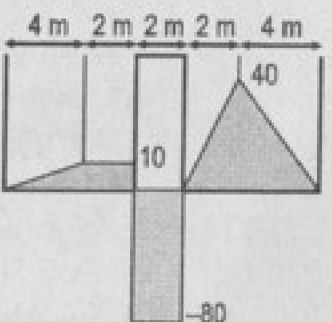
$\Delta M_{BC} = (2)(10) = 20 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -10 + 20 = 10$

$\Delta M_{CD} = \frac{1}{2}(2)(-10+0) = -10 \quad \Rightarrow \quad M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 0$

Verificando el equilibrio:

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_A = 0{:}\ -10\left(\frac{1}{2}\right) + 25(1) - 10(3) - 10(4) + 10(5) = 0$

456. Diagrama de fuerza cortante como en la figura.



Resolución:

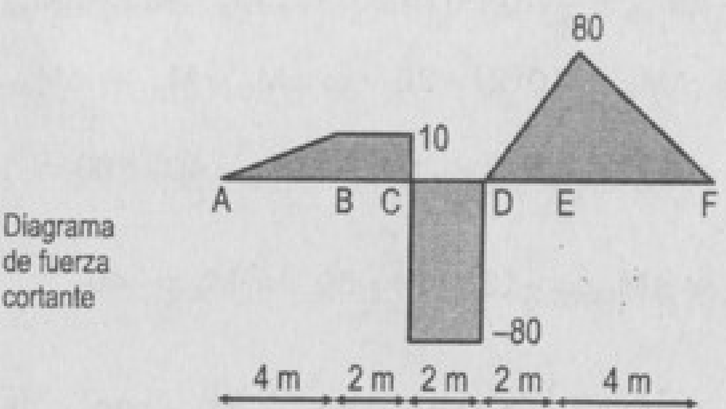


Diagrama de fuerza cortante

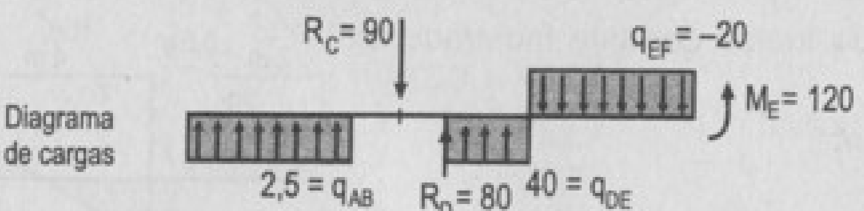


Diagrama de cargas

$V_A = 0 \Rightarrow \Delta V_{AB} = (10 - 0) = 10 \Rightarrow q_{AB}(4) = \Delta V_{AB} = 10 \Rightarrow q_{AB} = 2{,}5$

$V_B = 10 \Rightarrow \Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow q_{BC}(2) = 0 \Rightarrow q_{BC} = 0$

$R_C = -80 - (10) = -90$

$V_C = -80 \Rightarrow \Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow q_{CD}(2)20 \Rightarrow q_{CD} = 0$

$R_D = 0-(-80) = 80$

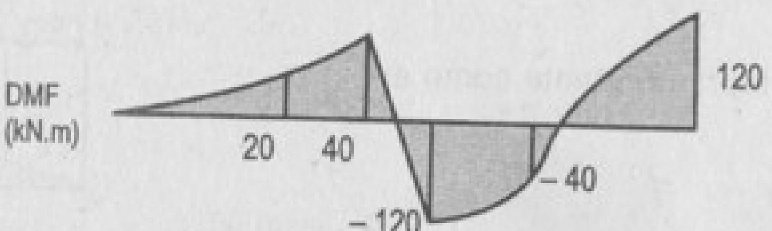
$V_D = -80 \Rightarrow \Delta V_{DE} = (80-0) = 80 \Rightarrow q_{DE}(2) = 80 \Rightarrow q_{DE} = 40$

$V_E = 80 \Rightarrow \Delta V_{EF} = (0-80) = -80 \Rightarrow q_{EF}(4) = -80 \Rightarrow q_{EF} = -20$

Verificando equilibrio:

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_A = 10(2) - 90(6) + 80(8) + 80(9) - 80(12) = -120 \neq 0$

Dibujando el diagrama de momento flexionante:



$M_A = 0 \Rightarrow \Delta M_{AB} = \frac{4}{2}(10+0) = 20 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 20$

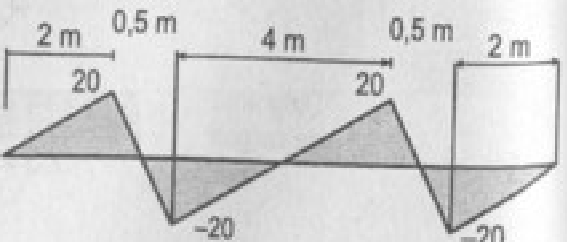
$M_B = 20 \Rightarrow \Delta M_{BC} = 10(2) = 20 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC'} = 40$

$M_C = 40 \Rightarrow \Delta M_{CD} = -80(2) = -160 \Rightarrow M_D = 40 - 160 = -120$

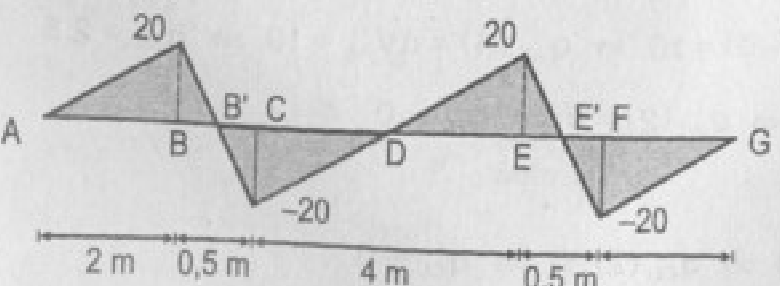
$M_D = -120 \Rightarrow \Delta M_{DE} = \frac{1}{2}(2)(80) = 80 \Rightarrow M_E = -40$

$M_E = -40 \Rightarrow \Delta M_{EF} = \frac{1}{2}(4)(80) = 160 \Rightarrow M_F = 120 \;\therefore\;$ $\boxed{M_{máx.} = -120 \text{ kN.m}}$

457. Diagrama de fuerza cortante mostrado en la figura.



Resolución:



Tramo AB: carga uniforme $q_{AB}(2) = 20 \Rightarrow q_{AB} = 10$

Tramo BC: $\Delta V_{BC} = -20-(20) = -40$ kN

También es carga uniforme:

$q_{BC}(0,5) = \Delta V_{BC} = -40 \Rightarrow q_{BC} = -80$ kN/m

Tramo CD: carga uniforme, $q_{CD} = $ cte.

$\Delta V_{CD} = 0-(-20) = 20 \Rightarrow q_{CD}(2) = \Delta V_{CD} = 20 \Rightarrow q_{CD} = 10$ kN/m

Este diagrama es antisimétrico, entonces el diagrama de cargas será simétrico como sigue.



En el diagrama:

$q_{AB} = q_{CD} = 10$ kN/m

$q_{BC} = -90 + 10 = -80$ kN/m

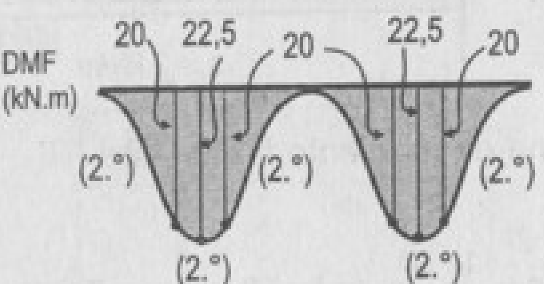
Dibujando el diagrama de momento flexionante (simétrico) del DFC

$M_A = 0,\; \Delta M_{AB} = \frac{1}{2}(20)(2) = 20 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 20$ kN.m

$\Delta M_{BB'} = \frac{1}{2}(20)(0,25) = 2,5 \Rightarrow M_{B'} = M_B + \Delta M_{BB'} = 22,5$ kN.m

$\Delta M_{B'B} = \frac{1}{2}(-20)(0,25) = 2,5 \Rightarrow M_C = M_{B'} + \Delta M_{B'C} = 20$ kN.m

$\Delta M_{CD} = \frac{1}{2}(-20)(2) = -20 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 0$ kN.m

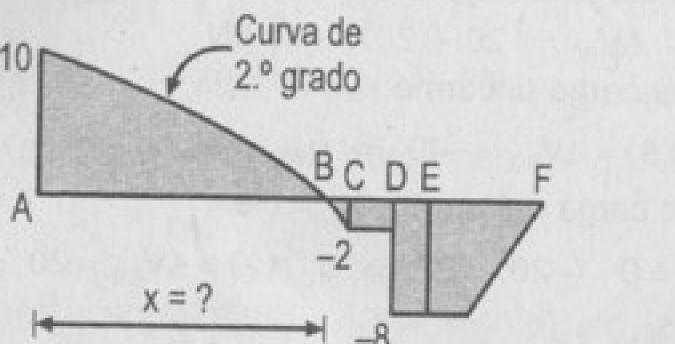


$\therefore \; \boxed{M_{máx} = 22,5 \text{ kN.m}}$

458. Diagrama de fuerza cortante como el de la figura.



Resolución:



Del diagrama de cargas tenemos:

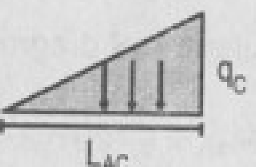
$V_A = 10$ kN

$V_D = -8-(-2) = -6$ kN

Tramo EF: carga uniforme

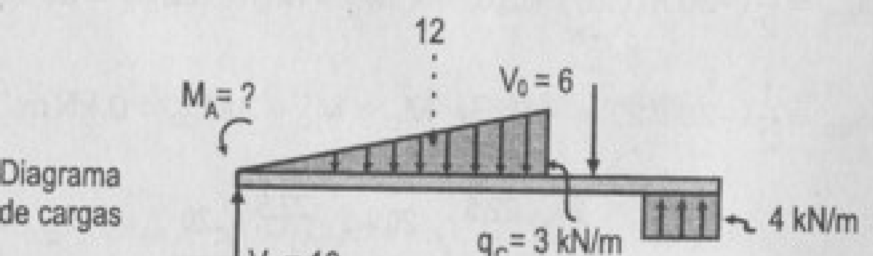
$q_{EF} = \frac{8}{2} = 4$ kN/m (pendiente positiva)

Tramo AC: carga triangular



Además: $\Delta V_{AC} = -2-(10) = -12$

Área triangular: $\frac{1}{2}(q_C)(L_{AC}) = 4q_C = -12 \Rightarrow q_C = -3$ kN.m



Dibujando el diagrama de momento flexionante.
Calculando x:

$$q_x = \frac{3}{8}x \Rightarrow \text{área} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}x\right)(x) = 10 \Rightarrow x = 7{,}3 \text{ m}$$

$$\Delta M_{AB} = \text{área}(DFC_{AB}) = \frac{2}{3}(7{,}3)(10) = 48{,}67 \Rightarrow M_B = 18{,}67$$

$$\Delta M_{BC} = \left[\frac{1}{3}(8)(12) - \frac{1}{3}(7{,}3)(10) - (0{,}7)(10)\right] = -0{,}67 \Rightarrow M_C = 18$$

$$\Delta M_{CD} = 1(-2) = -2 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 16$$

$$\Delta M_{DE} = 1(-8) = -8 \Rightarrow M_E = M_D + \Delta M_{DE} = 8$$

$$\Delta M_{EF} = \frac{1}{2}(2)(-8) = -8 \Rightarrow M_F = M_E + \Delta M_{EF} = 0$$

$$\circlearrowleft + \; \Sigma M_A = 0: M_A - 12\left(\frac{16}{3}\right) - 6(9) + 8(11) = 0 \Rightarrow M_A = 30$$

459. Problema ilustrativo.

460. Un camión con cargas de 40 kN y 60 kN por eje, con una distancia entre ellos de 5 m, rueda sobre una viga de 10 m. Calcular el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante.

Resolución:

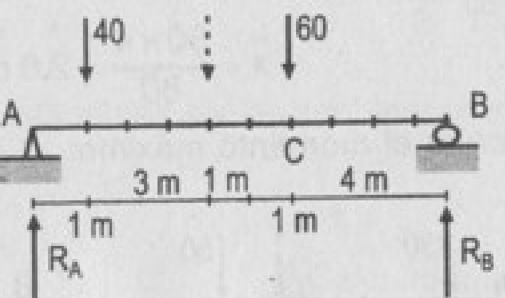
(I) Para el momento flexionante.

Calculamos el centro de carga:

$R = 40 + 60 = 100$

$$\bar{x} = \frac{60 \times 5}{100} = 3 \text{ m}$$

Posición para calcular el momento máximo:

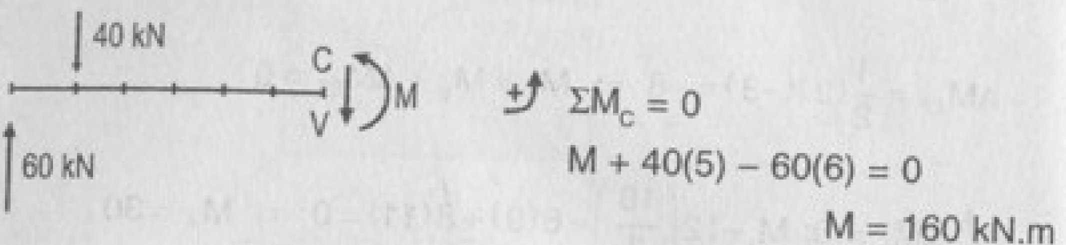


Calculamos la reacción (R_A):

$$\circlearrowleft + \; \Sigma M_B = 0: 60(4) + 40(9) - R_A(10) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 60 \text{ kN}$$

Luego tomamos momento en el punto "C".

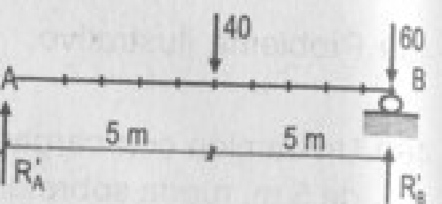


$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_C = 0$

$M + 40(5) - 60(6) = 0$

$M = 160$ kN.m

(II) Para la fuerza cortante.
Posición para el cortante máximo:



Equilibrio:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_A = 0 : R_B(10) - 60(10) - 40(5) = 0$

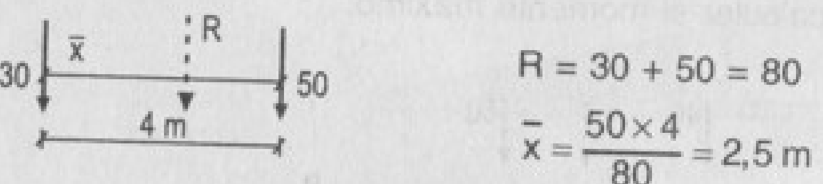
$R_B = 80$ kN

$\therefore$ $\boxed{M_{máx.} = 160 \text{ kN.m}}$ $\wedge$ $\boxed{V_{máx.} = 80 \text{ kN}}$

461. Repetir el problema anterior si las cargas por eje son de 30 kN y 50 kN, su distancia de 4 m y la longitud de la viga de 8 m.

Resolución:

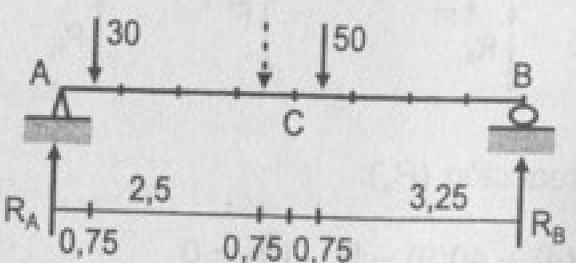
(I) Calculamos el centro de cargas:



$R = 30 + 50 = 80$

$\bar{x} = \dfrac{50 \times 4}{80} = 2{,}5$ m

Posición para calcular el momento máximo:

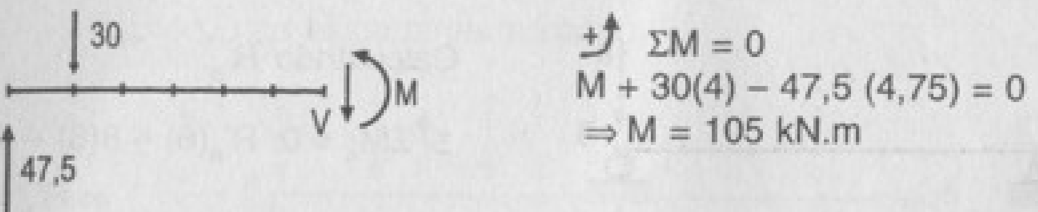


Calculamos la reacción en A (R_A):

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B = 0$: $50(3{,}25) + 30(7{,}25) - R_A(8) = 0$

$\Rightarrow R_A = 47{,}5$

Calculamos el momento en el corte:

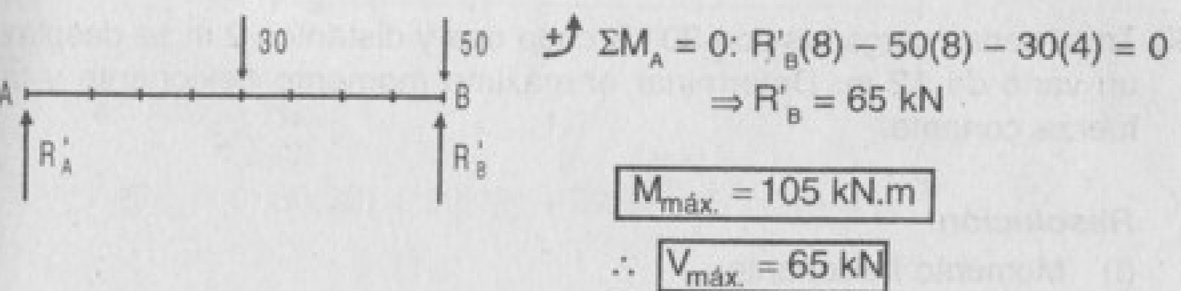


$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M = 0$

$M + 30(4) - 47{,}5\,(4{,}75) = 0$

$\Rightarrow M = 105$ kN.m

(II) Para la fuerza cortante tenemos:



$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_A = 0$: $R'_B(8) - 50(8) - 30(4) = 0$

$\Rightarrow R'_B = 65$ kN

$\boxed{M_{máx.} = 105 \text{ kN.m}}$

$\therefore$ $\boxed{V_{máx.} = 65 \text{ kN}}$

462. Un tractor con cargas sobre sus ejes, de 4 y 8 kN, tiene una distancia entre ejes de 3 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante al cruzar un vano de 6 m.

Resolución:

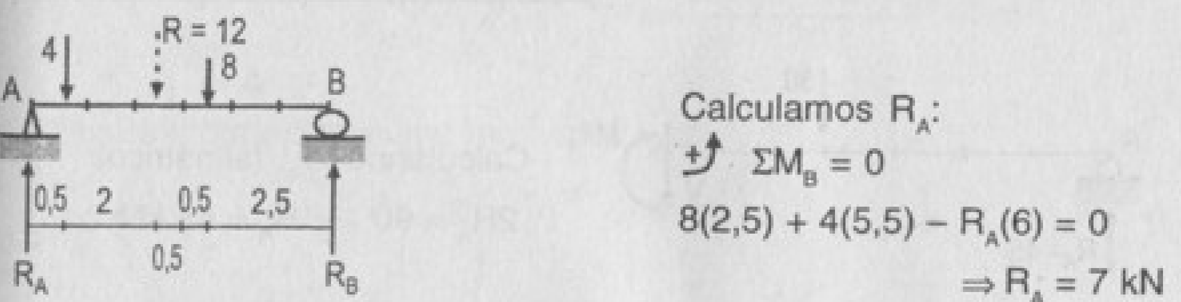
Calculamos la resultante y su posición:



$R = 4 + 8 = 12$

$\bar{x} = \dfrac{8 \times 3}{12} = 2$ m

Siguiendo los pasos y esquemas de los problemas anteriores tenemos que:



Calculamos R_A:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B = 0$

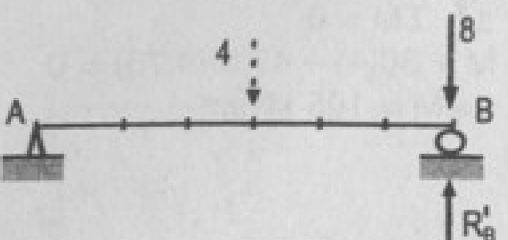
$8(2{,}5) + 4(5{,}5) - R_A(6) = 0$

$\Rightarrow R_A = 7$ kN

Luego:

$M_{máx.} = 7(3{,}5) - 4(3) \Rightarrow$ $\boxed{M_{máx.} = 12{,}5 \text{ kN.m}}$

Posición para el cortante máximo:



Calculando R'_B:

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0$: $R'_B(6) - 8(6) - 4(3) = 0$

$\Rightarrow R'_B = 10$ kN

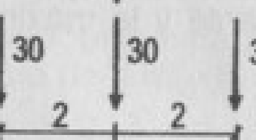
$\boxed{V_{máx.} = R'_B = 10 \text{ kN}}$

463. Tres ruedas cargadas con 30 kN cada una y distantes 2 m se desplazan sobre un vano de 12 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante.

Resolución:

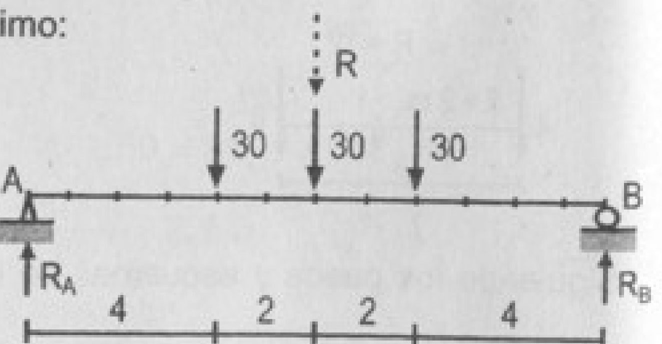
(I) Momento flexionante

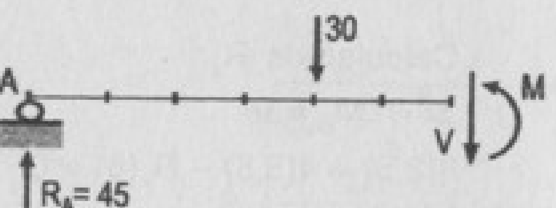
Calculando la resultante de las cargas y su posición:



$R = 30 + 30 + 30 = 90$ kN

Posición para el momento máximo:





Calculando R_A: (simétrico)

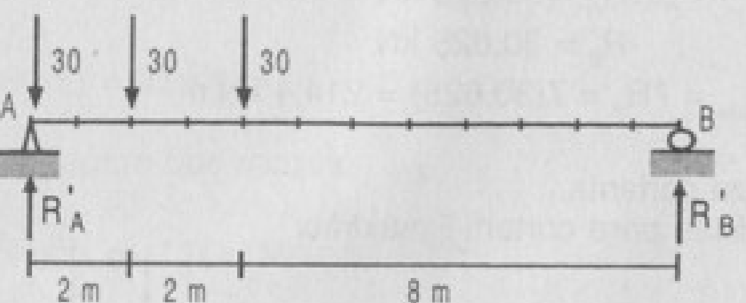
$2R_A = 90 \Rightarrow R_A = 45$ kN

Calculando M ($M_{máx.}$):

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_V = 0$: $M + 30(2) - 45(6) = 0 \Rightarrow M = 210$ kN.m

(II) Cortante

Posición para el cortante máximo:



Calculando R'_A:

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$: $30(12) + 30(10) + 30(8) - R'_A(12) = 0$

$R'_A = 75$ kN

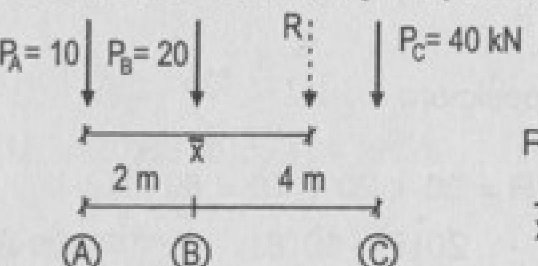
$\therefore \boxed{M_{máx.} = 210 \text{ kN.m}} \wedge \boxed{V_{máx.} = 75 \text{ kN}}$

464. Tres cargas, que actúan sobre sendas ruedas, se desplazan solidariamente sobre un claro de 16 m. Las cargas son A = 10 kN; B = 20 kN, 2 m a la derecha de A; y C=40 kN, 4 m a la derecha de B. Determine el máximo momento flexionante y el máximo esfuerzo cortante sobre la viga simplemente apoyada.

Resolución:

(I) Momento flexionante:

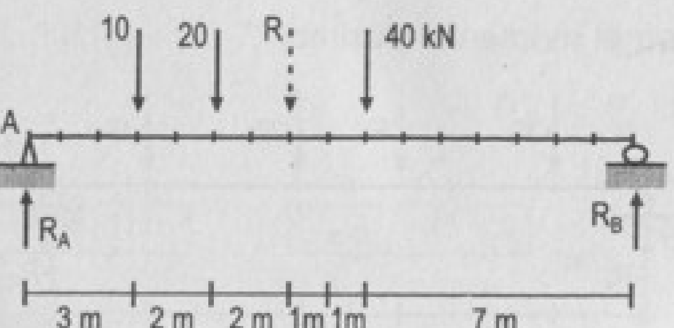
Calculando la resultante y su posición:



$R = 10 + 20 + 40 = 70$ kN

$\bar{x} = \dfrac{20(2) + 40(6)}{70} = 4$ m

Posición para el máximo momento:



Calculando R_A:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B = 0$: $40(7) + 20(11) + 10(13) - R_A(16) = 0$

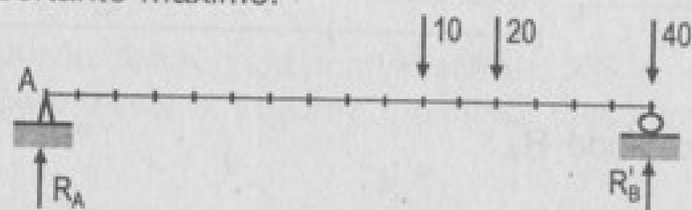
$\Rightarrow R_A = 39{,}375$ kN

$R_B = 30{,}625$ kN

$\therefore M_{máx} = 7R_B = 7(30{,}625) = 214{,}4$ kN.m

(II) Fuerza cortante.

Posición para cortante máximo:



Cálculo de R'_B:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_A = 0$: $R'_B(16) - 40(16) - 20(12) - 10(10) = 0$

$R'_B = 61{,}25$ kN

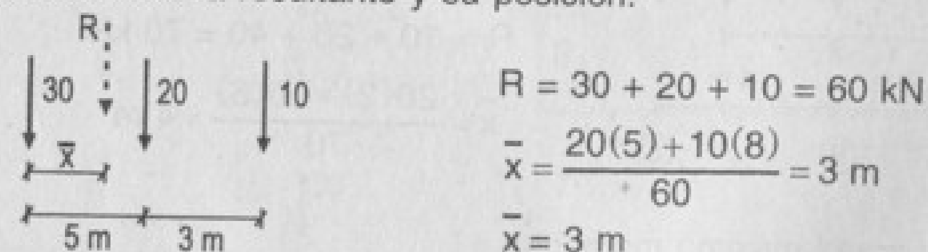
$\therefore$ $\boxed{M_{máx} = 214{,}4 \text{ kN.m}}$ $\boxed{V_{máx} = R'_B = 61{,}25 \text{ kN}}$

465. Un camión con remolque que rueda sobre una viga de 12 m tiene cargas por eje de 10; 20 y 30 kN separadas, respectivamente, por distancias de 3 y 5 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante sobre el claro.

Resolución:

(I) Momento flexionante.

Calculando la resultante y su posición:

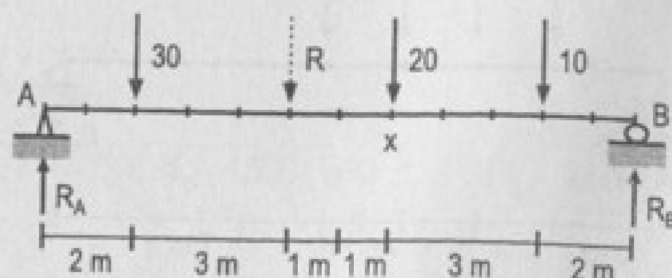


$R = 30 + 20 + 10 = 60$ kN

$\bar{x} = \dfrac{20(5) + 10(8)}{60} = 3$ m

$\bar{x} = 3$ m

Posición para el momento máximo:



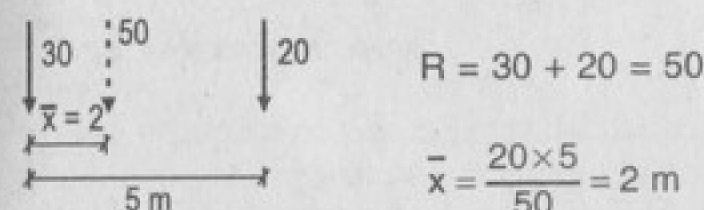
Calculando R_A:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B = 0$: $30(10) + 20(5) + 10(2) - R_A(12) = 0$

$\Rightarrow R_A = 35$ kN

$M_x = 35(7) - 30(5) = 95$ kN.m

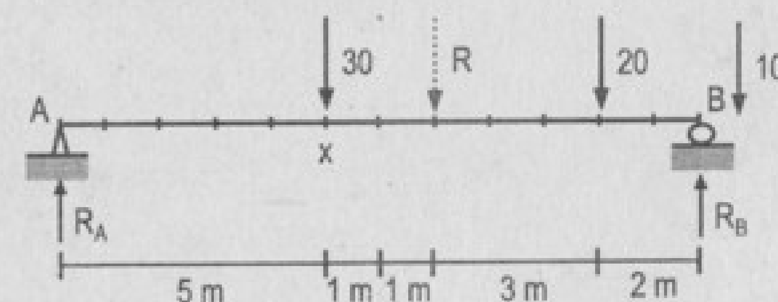
Resolviendo solo para dos cargas:



$R = 30 + 20 = 50$

$\bar{x} = \dfrac{20 \times 5}{50} = 2$ m

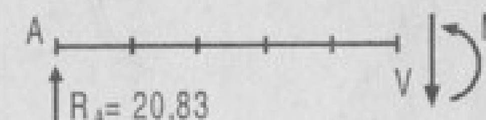
Posición para estas dos cargas y la otra fuera del tramo:



Calculando R_A:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B = 0$: $20(2) + 30(7) - R_A(12) = 0$

$\Rightarrow R_A = 20{,}83$



$M_x = 20{,}83\,(5) = 104$ kN.m

(II) Cortante:

Posición para el cortante máximo:

Calculando R'_A:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B = 0$: $30(12) + 20(7) + 10(4) - R'_A(12) = 0$

$\Rightarrow R'_A = 45$ kN

$\therefore$ $\boxed{M_{máx.} = 104 \text{ kN.m}}$ $\wedge$ $\boxed{V_{máx.} = 45 \text{ kN}}$

CAPÍTULO 5

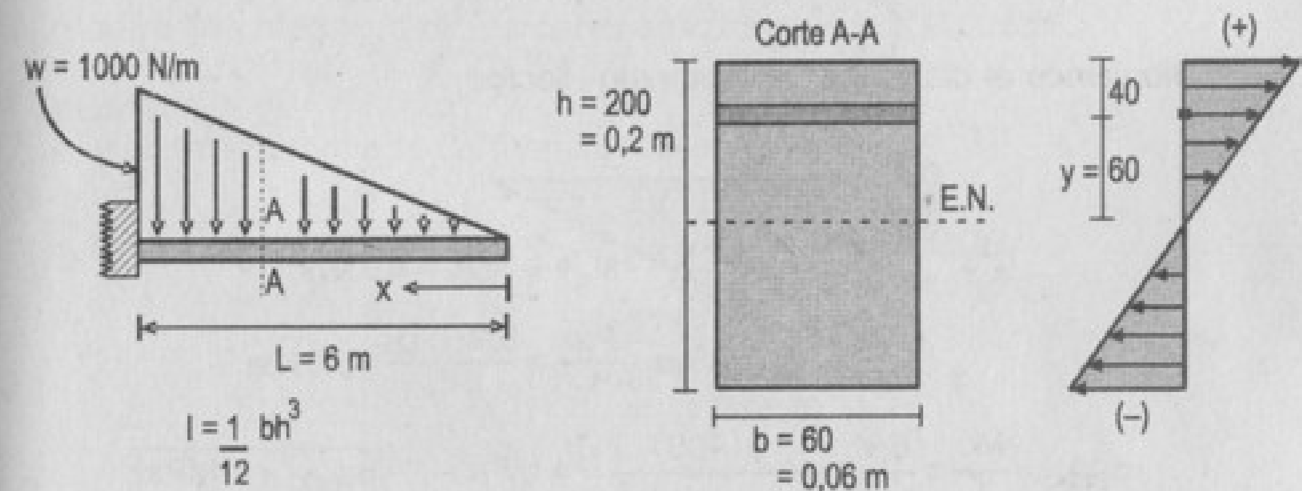
ESFUERZOS EN VIGAS

501; 502: Problemas ilustrativos.

503. Una viga en voladizo, de 60 mm de ancho por 200 mm de canto y 6 m de longitud, soporta una carga que varía uniformemente desde cero en el extremo libre hasta 1000 N/m en el empotramiento. Determinar el valor y el signo del esfuerzo en una fibra situada a 40 mm del extremo superior de la viga en una sección a 3 m del extremo libre.

Resolución:

Del enunciado tenemos:



Calculamos el momento a una distancia de 3 m.

$$M_{x=3}\frac{(w_x)x^2}{2\times 3}=\frac{500(3)^2}{6}=750\ \text{N.m}$$

Podemos apreciar que las fibras superiores al E.N. de la sección, están en fracción.

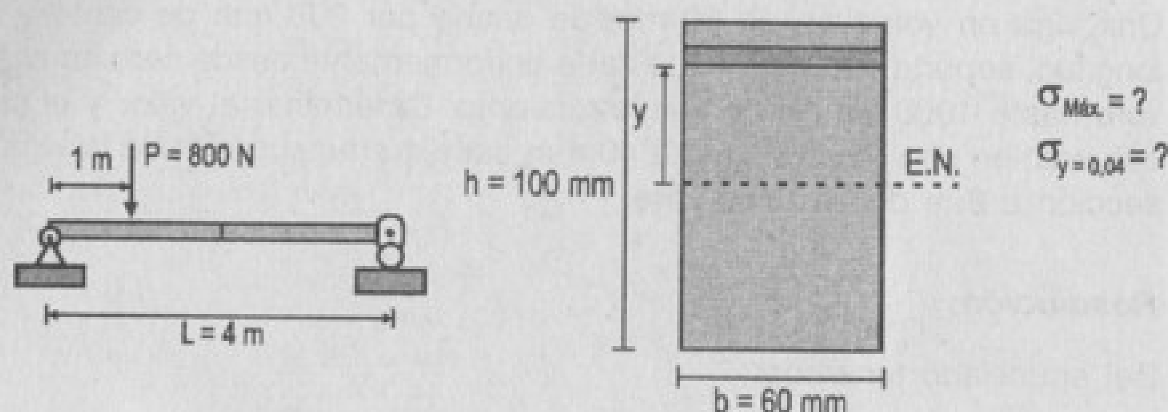
Sabemos que:

$$\sigma=\frac{My}{I}=\frac{750(0{,}06)}{\frac{1}{12}(0{,}06)(0{,}2)^3}=1{,}13\ \text{MPa}\ \therefore\ \boxed{\sigma=1{,}13}$$

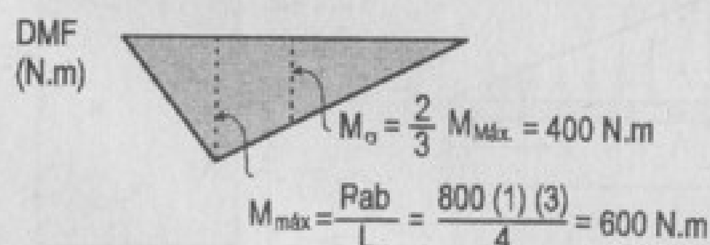
504. Una viga simple o simplemente apoyada, de sección rectangular de 60 mm de ancho por 100 mm de altura, y 4 m de longitud, está sometida a una carga concentrada de 800 N en un punto situado a 1 m de uno de los apoyos. Determine el esfuerzo máximo así como el esfuerzo en una fibra situada a 10 mm de la parte superior de la sección, para una sección situada a la mitad del claro.

Resolución:

Del enunciado tenemos el siguiente esquema:



Dibujamos el diagrama de momento flector:



$$\sigma_{máx.} = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(400)}{(0,06)(0,1)^2} = 4\ \text{MPa} \quad \therefore \boxed{\sigma_{máx.} = 4\ \text{MPa}}$$

$$\sigma_{y=0,04} = \frac{My}{I} = \frac{400(0,04)}{\frac{1}{12}(0,06)(0,1)^3} = 3,2\ \text{MPa} \quad \therefore \boxed{\sigma_{y=0,04} = 3,2\ \text{MPa}}$$

505. Una sierra de cinta de acero de alta resistencia, que tiene 20 mm de ancho y 0,8 mm de espesor, pasa por unas poleas de 600 mm de diámetro. ¿Qué esfuerzo máximo se desarrolla por la flexión al rodear las poleas? ¿Qué diámetro mínimo pueden tener las mismas sin que sobrepase el esfuerzo de 400 MPa?
E = 200 GPa.

Resolución:

Sabemos que:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \sigma = E\varepsilon = E\left(\frac{y}{\rho}\right)$$

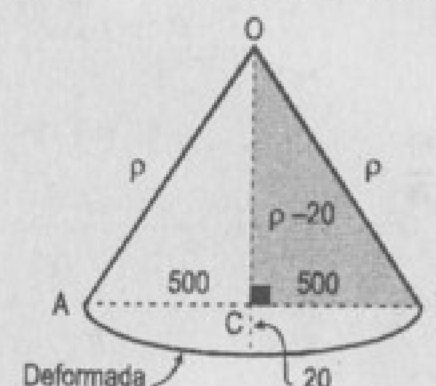
$$\sigma = 200\times10^9\left(\frac{0,4\times10^{-3}\text{m}}{300\times10^{-3}\text{m}}\right) = 267\ \text{MPa} \quad \therefore \boxed{\sigma = 267\ \text{MPa}}$$

$$\sigma = 200\times10^9\left(\frac{0,4\times10^{-3}\text{m}}{\frac{D}{2}\times10^{-3}\text{m}}\right) \le 400\times10^6 \quad \therefore \boxed{D \ge 400\ \text{mm}}$$

506. Una barra de acero, de 25 mm de ancho, 6 mm de espesor y 1 m de longitud se flexiona por la acción de pares aplicados en sus extremos, de manera que en el centro adquiere una deflexión de 20 mm. Determinar el esfuerzo máximo en la barra y la magnitud de los pares aplicados; E = 200 GN/m².

Resolución:

Asumimos una deformada de forma circular.



En el triángulo OCB, tenemos por Pitágoras:
$\rho^2 = (\rho - 20)^2 + 500^2$
Resolviendo:
$\rho = 6260$ mm

Para el esfuerzo máximo:

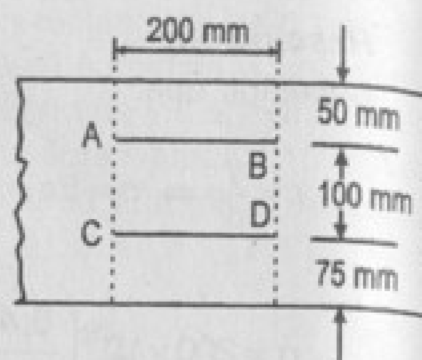
$$\sigma_{máx.} = E\frac{y}{\rho} = 200\times10^9\frac{(3\ \text{mm})}{(6260\ \text{mm})} = 95,8\ \text{MPa} \quad \therefore \boxed{\sigma_{máx.} = 95,8\ \text{MPa}}$$

El momento es:

$$M = \sigma_{máx.}\frac{bh^2}{6} = 95,8\times10^6\ \frac{(0,025)(0,006)^2}{6}$$

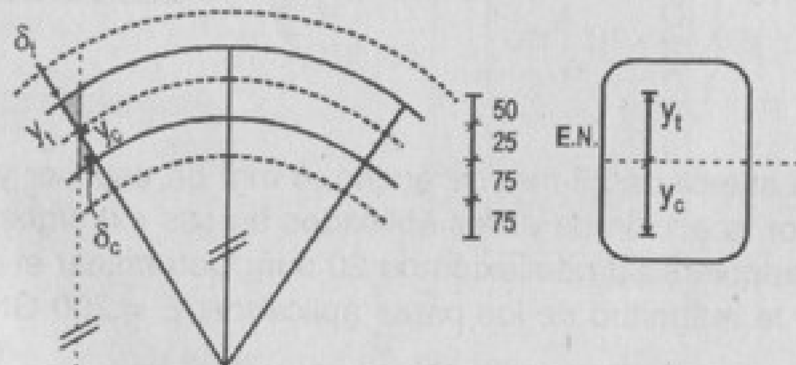
$$\therefore \boxed{M = 14,4\ \text{N.m}}$$

507. En un ensayo de laboratorio, sobre una viga cargada con pares en sus extremos, se encontró que las fibras tales como las AB de la figura, tuvieron un alargamiento de 0,03 mm, mientras que las CD se habían acortado 0,09 mm en la longitud de 200 mm entre puntos. Calcular los esfuerzos que han debido de aparecer en las fibras superior e inferior de la viga; E = 100 GPa.



Resolución:

Tenemos el siguiente esquema de deformación:



Del gráfico (sección):

$y_t + y_c = 100$ ...(I)

De los triángulos: $\frac{\delta_t}{y_t} = \frac{\delta_c}{y_c} \Rightarrow \frac{0,03}{y_t} = \frac{0,09}{y_c}$

$y_c = 3y_t$ ...(II)

De (I) y (II), obtenemos:

$y_t = 25$ mm; $y_c = 75$ mm

Para calcular el radio de curvatura:

$$\frac{\delta_t}{y_t} = \frac{L}{\rho} \Rightarrow \frac{0,03}{25} = \frac{200}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = 6\times10^{-6}\times\frac{1}{mm} = 6\times10^{-3}\times\frac{1}{m}$$

Luego:

$$M = EI\left(\frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{M}{I} = \frac{E}{\rho}$$

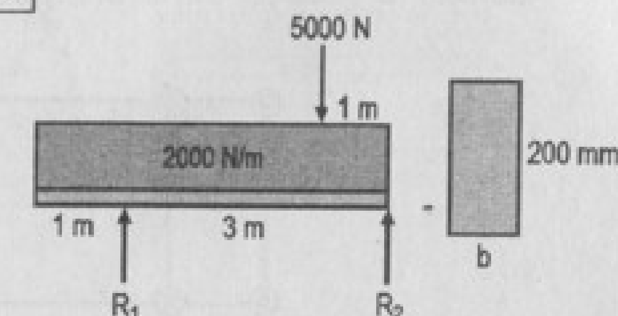
$$\frac{M}{I} = 100\times10^{9}(6\times10^{-3}) = 600\times10^{6}$$

$$\sigma^c_{máx.} = \frac{M}{I}c = 600\times10^6(0,15) = 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma^t_{máx.} = \frac{M}{I}t = 600\times10^6\ (0,075) = 45 \text{ MPa}$$

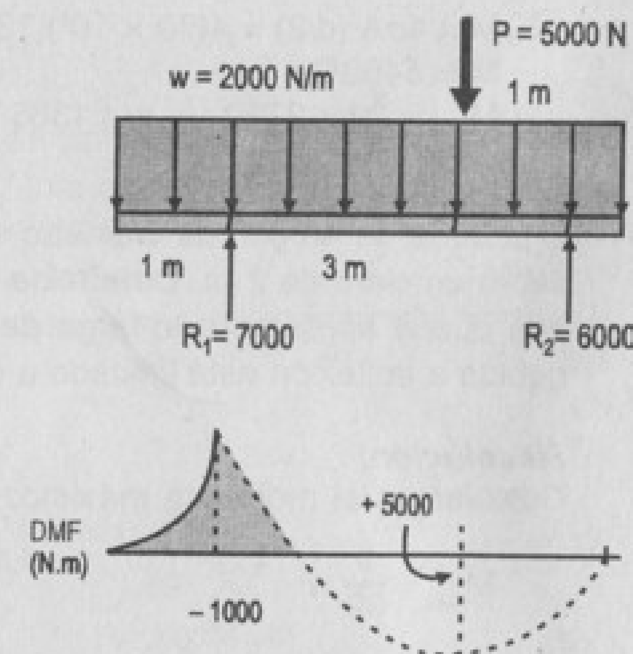
$\therefore$ $\boxed{\sigma^c_{máx.} = 90 \text{ MPa}}$; $\boxed{\sigma^t_{máx.} = 45 \text{ MPa}}$

508. Determinar el espesor mínimo b de la viga de la figura, de manera que el máximo esfuerzo normal no exceda de 10 MPa.



Resolución:

Calculamos las Rx:



$\Sigma M_2 = 0$:

$5000(1) + 2000(4)(2)$

$-R_1(3) = 0$

$\Rightarrow R_1 = 7000$ N

$\Rightarrow R_2 = 6000$ N

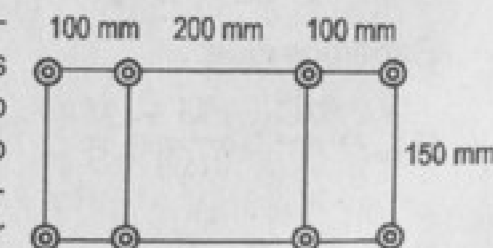
$\Rightarrow M_{máx.} = 5000$ N. m

Sabemos que:

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6\times5000}{b(0,2)^2} \leq 10\times10^6$$

$\Rightarrow b \geq 75$ mm $\therefore$ $\boxed{b_{mín.} = 75 \text{ mm}}$

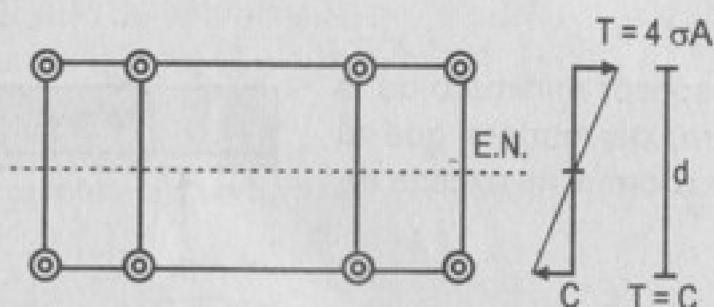
509. Una viga de tipo caja muy usada en construcciones aeronáuticas consta de una serie de tubos unidos mediante unas almas muy delgadas como se indica, en sección, en la figura. Cada tubo tiene una sección recta de 130 mm². Si el esfuerzo medio en estos tubos no puede exceder de 70 MPa, determinar la carga total uniformemente distribuida que puede soportar esta viga sobre un claro de 4 m. Despreciar el efecto resistente de las almas de unión.



Resolución:
Para un tramo simple, tenemos que:

$$M^{+}_{máx.} = \frac{wL^2}{8} = \frac{w(4)^2}{8} = 2w \quad [N.m]$$

Además la sección transversal es:

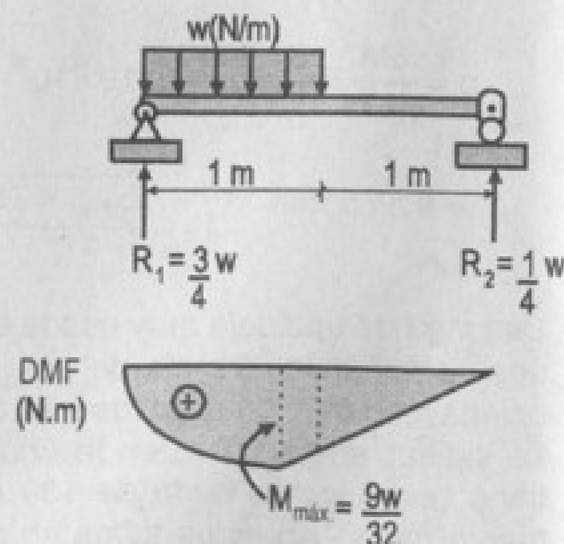


M = Td/2
M = 4σA (d/2) = 4(70 × 10⁶)(130 × 10⁻⁶)(0,15)/2
M = 5460/2
$M_{máx} = 2w \leq 2730 \Rightarrow w \leq 1365$ N/m ∴ $\boxed{w_{máx} = 1365 \text{ N/m}}$

510. Una barra de 40 mm de diámetro se emplea como viga simplemente apoyada sobre un claro de 2 m. Determine la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a lo largo de la mitad derecha de la viga si el esfuerzo debido a la flexión está limitado a un valor de 60 MN/m².

Resolución:
Calculamos el momento máximo:

$$M_{máx.} = \frac{9}{32} w$$



$$S_D = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{I}{C}$$

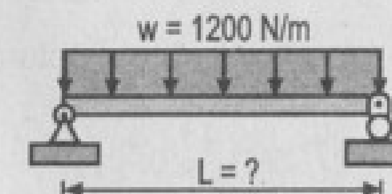
Sabemos que:

$$\sigma_{máx.} = \frac{MC}{I} = \frac{M}{(I/C)} = \frac{M}{S}$$

$$\sigma_{máx.} = \frac{\left(\frac{9}{32}w\right)}{\frac{\pi}{32}(0{,}04)^3} \leq 60\times10^6 \Rightarrow w \leq 1340 \text{ N/m} \qquad \therefore \boxed{w_{máx.} = 1340 \text{ N/m}}$$

511. Una barra rectangular simplemente apoyada, de 50 mm de ancho por 100 mm de espesor, soporta una carga de 1200 N/m uniformemente distribuida sobre toda su longitud. ¿Cuál es la longitud máxima de la barra si el esfuerzo flexionante está restringido a 20 MPa?

Resolución:
Para una barra simplemente apoyada:



$$M_{máx.} = \frac{wL^2}{8} = 150 L^2$$

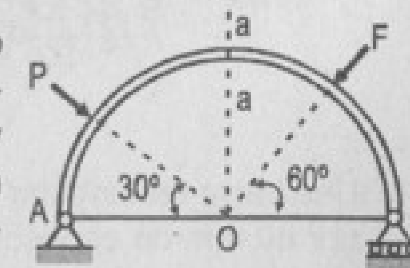
b = 50 mm = 0,05 m

h = 100 mm = 0,10 m

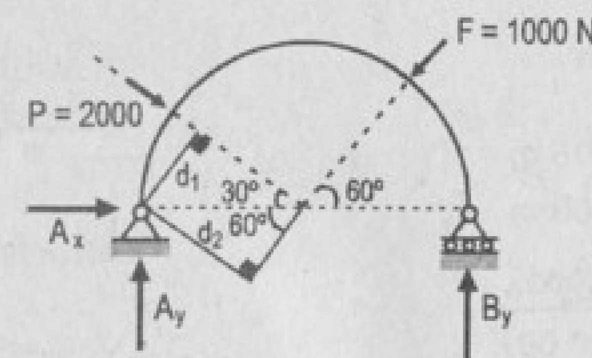
$$\sigma_{máx.} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(150 L^2)}{(0{,}05)(0{,}10)^2} \leq 20\times10^6$$

$\Rightarrow L \leq 3{,}33$ m ∴ $\boxed{L_{máx.} = 3{,}33 \text{ m}}$

512. Una barra de sección circular de 20 mm de diámetro tiene una línea axial semicircular de 600 mm de radio medio, como indica la figura. Si P = 2000 N y F = 1000 N, calcular el esfuerzo máximo de flexión en la sección a-a. Se desprecia la deformación general de la barra.



Resolución:
Calculamos el momento en la sección a-a:



Del gráfico:

$$d_1 = R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{R}{2} \quad y \quad d_2 = R\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

Equilibrio:

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_A = 0$: $B_y(2R) - F(d_2) - P(d_1) = 0$

$$B_y(2\not{R}) - 1000\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\not{R}\right) - 2000\left(\frac{\not{R}}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow \ B_y = 933\text{ N}$$

De la parte de la estructura:

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_{a\text{-}a} = 0$:

$$933(R) - 1000\left(\frac{R}{2}\right) - M = 0$$

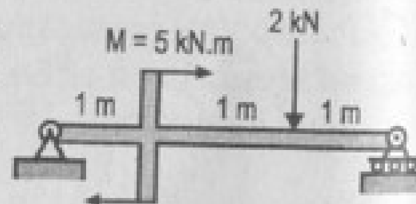
$M = 433\,R$

$M = 259{,}8$ N.m

Además:

$$\sigma_{máx.} = \left(\frac{M}{S}\right) = \frac{M}{\frac{\pi}{32}d^3} = \frac{259{,}8}{\frac{\pi}{32}(0{,}02)^3} \quad \therefore \ \boxed{\sigma_{máx.} = 331\text{ MPa}}$$

513. Una barra rectangular de acero de 50 mm de ancho por 80 mm de espesor, es cargada como se muestra en la figura. Determine la magnitud y ubicación del máximo esfuerzo flexionante.



Resolución:

Dibujamos el diagrama de momento flexionante:

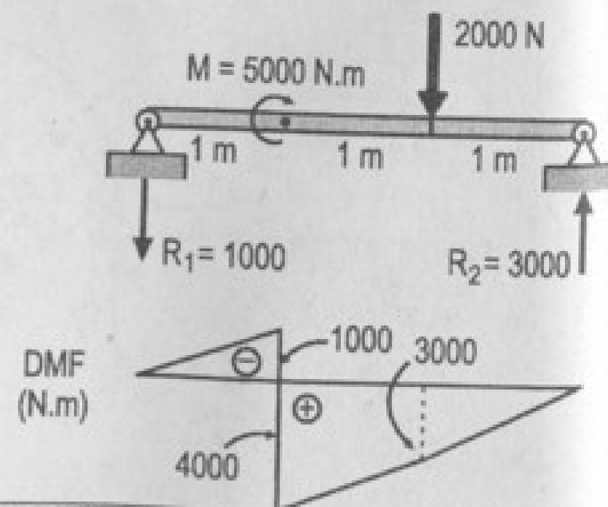
$M_{máx} = 4000$ N.m

$b = 50\text{ mm} = 0{,}05\text{ m}$

$h = 80\text{ mm} = 0{,}08\text{ m}$

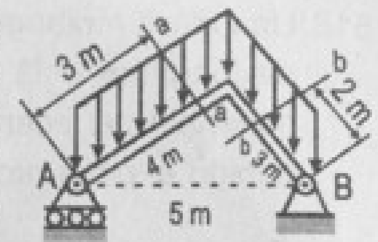
$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(4000)}{0{,}05(0{,}08)^2}$$

$\therefore \ \boxed{\sigma = 75\text{ MPa}}$



Ubicación: a la derecha del punto de aplicación de M

514. El marco de la figura, de ángulo recto en C, soporta una carga uniformemente repartida equivalente a 200 N de proyección horizontal, es decir, una carga total de 1000 N. Determinar el máximo esfuerzo normal de flexión en la sección a-a si esta es un cuadrado de 50 mm de lado.



Resolución:

Calculamos el momento en a-a.

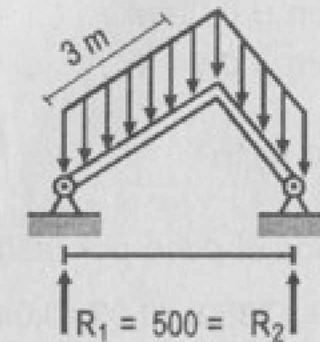
Cálculo de R_1 y R_2:

$R_1 = R_2 = 500$ N

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_{a\text{-}a} = 0$:

$$200\frac{(2{,}4)^2}{2} - 500(2{,}4) + 1\,M = 0$$

$M = 624$ N.m



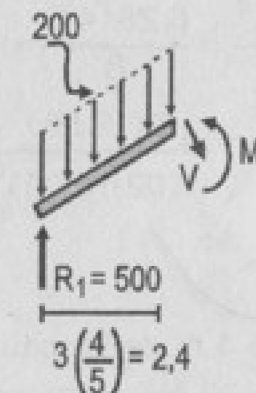
Además:

$b = 50\text{ mm} = 0{,}05\text{ m}$

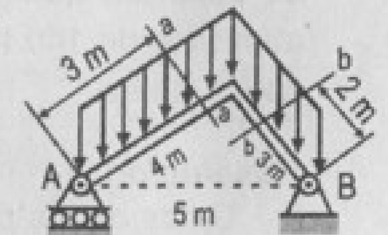
Luego:

$$\sigma_{máx.} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(624)}{(0{,}05)(0{,}05)^2}$$

$\therefore \ \boxed{\sigma_{máx.} = 30\text{ MPa}}$



515. Repita el problema, hallando el máximo esfuerzo debido a la flexión en la sección b-b.



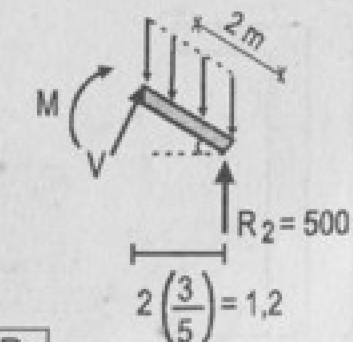
Resolución:

Calculamos el momento en b-b:

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_{b\text{-}b} = 0$:

$$500(1{,}2) - 200\frac{(1{,}2)^2}{2} - M = 0$$

$\Rightarrow M = 456$ N.m



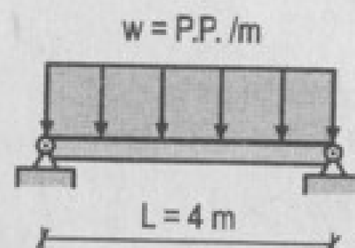
Luego:

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(456)}{0{,}05(0{,}05)^2} \quad \therefore \ \boxed{\sigma_{máx.} = 21{,}9\text{ MPa}}$$

516. Una barra rectangular de acero, de 20 mm de ancho por 40 mm de altura y 4 m de longitud, está simplemente apoyada en sus extremos. Sabiendo que la densidad del acero es 7850 kg/m³, determine el máximo esfuerzo por flexión debido al peso propio de la barra.

Resolución:

$b = 20$ mm $= 0{,}02$ m
$h = 40$ mm $= 0{,}04$ m
$L = 4$ m
$\gamma = 7850$ kg/m³



Calculamos el peso por unidad de longitud debido al peso propio:

$w = \gamma bh = (7850)\,(0{,}02)(0{,}04) = 6{,}28$ kgf/m

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{6{,}28(4)^2}{8} = 12{,}56 \text{ kgf/m}$$

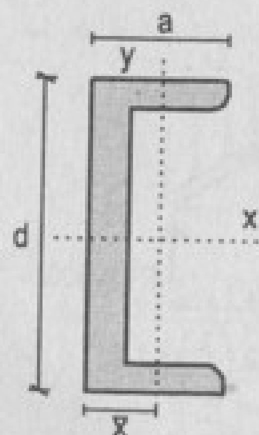
$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(12{,}56)}{(0{,}02)(0{,}04)^2} = 235{,}5 \text{ kgf/cm}^2 \quad \therefore \quad \boxed{\sigma_{máx} = 235{,}5 \text{ kgf/cm}^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\sigma_{máx} = 23{,}1 \text{ MPa}}$$

517. Una viga de 4 m de longitud simplemente apoyada, está formada por dos perfiles C230 × 30 remachados formando una I. Hallar la carga uniforme que puede soportar, además de su propio peso, sin que se sobrepase el esfuerzo admisible de 140 MN/m², si (a) las almas son verticales, y (b) las almas están horizontales.

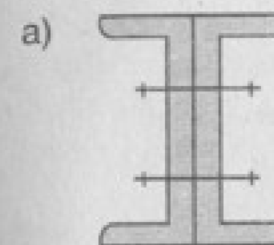
Resolución:

I. Datos de los perfiles



C230 × 30
$A = 3800 \text{ mm}^2$
$w = 29{,}8 \text{ kg/m} = 292 \text{ N/m}$
$I_x = 25{,}5\times10^6 \text{ mm}^4$
$I_y = 1{,}01\times10^6 \text{ mm}^4$
$a = 67$ mm, $d = 229$ mm
$\bar{x} = 14{,}8$ mm

a)



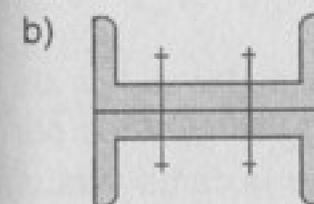
$$S_x = \frac{2I_x}{(d/2)} = 445\times10^3 \text{ mm}^3$$

Calculando el momento:

$$M = \frac{(2\times292 + w)(4)^2}{8} = 1168 + 2w$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M}{S_x} = \frac{1168 + 2w}{445\times10^3\times10^{-9}} \le 140\times10^6 \Rightarrow \boxed{w \le 30{,}5 \text{ kN/m}}$$

b)



Calculando S_y:
$I = I_y + A\bar{x}^2$
$= 1{,}01\times10^6 + 3800\,(14{,}8)^2$
$I = 1{,}84\times10^6 \text{ mm}^4$

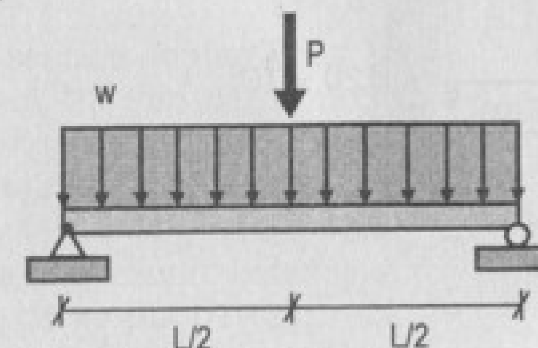
$$S_y = \frac{2I}{a} = \frac{2(1{,}84\times10^6)}{67} \Rightarrow S_y = 55\times10^3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{máx} = \frac{1168 + 2w}{55\times10^3\times10^{-9}} \le 140\times10^6 \Rightarrow \boxed{w \le 32{,}7 \text{ kN/m}}$$

518. Una viga de sección S380 × 74 está simplemente apoyada en sus extremos; soporta una carga concentrada central de 40 kN y una uniformemente distribuida de 15 kN/m, incluido su peso propio. Calcular la máxima longitud que puede tener si el esfuerzo admisible es de 140 MPa.

Resolución:

Sección S380 × 74



De acuerdo a las tablas:

$$S = \frac{I}{C} = 1060 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{4} = 1875\ L^2 + 10\ 000L$$

Sabemos que:

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{S} = \frac{1875L^2 + 10\ 000\ L}{1060 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 140 \times 10^6$$

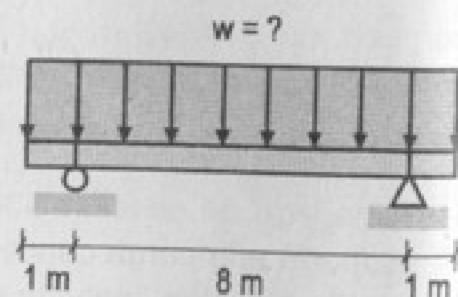
$$\Rightarrow 1875\ L^2 + 10\ 000\ L \leq 148\ 400 \quad \therefore \boxed{L = 6{,}62\ m}$$

519. Una viga de 10 m está colocada sobre dos apoyos situados a 1 m de sus extremos. Se ha construido de dos perfiles C380 × 50 remachados por sus almas y colocadas estas en posición vertical. Determinar la carga total uniformemente distribuida en toda su longitud, que puede soportar sin exceder el esfuerzo máximo de 120 MPa.

Resolución:

Calculamos los momentos:

$$M_{máx.} = \frac{w(8)^2}{8} - w(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 7{,}5\ w$$

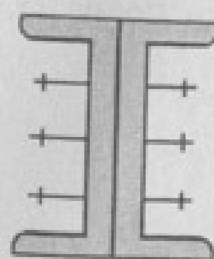


Datos del perfil C380 × 50 remachado:

$S = 687 \times 10^3\ mm^3 \times 2 = 1374 \times 10^3\ mm^3$

Luego:

$$\sigma = \frac{M}{S}$$



$$\sigma_{máx.} = \frac{7{,}5\ w}{1374 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 120 \times 10^6$$

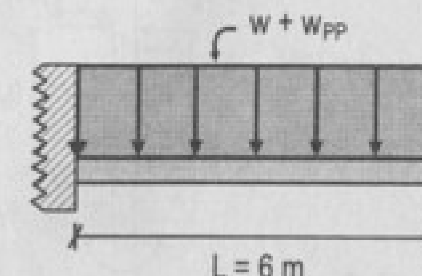
$\Rightarrow w \leq 22$ kN/m

$\therefore \boxed{w = 22\ kN/m}$

520. Una viga de sección W200 × 27 se usa como viga en voladizo de 6 m de longitud. Calcule la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo lo largo de la viga, además de su propio peso, si el esfuerzo por flexión no ha de exceder el valor de 140 MN/m².

Resolución:

Datos de la sección W200×27:



wpp = 26,6 kg/m = 261 N/m

$S = 249 \times 10^3\ mm^3$

$w_T = w + 261$

$$M = w_T \frac{L^2}{2} = (w + 261)\frac{(6)^2}{2} = 18w + 4698$$

$$\text{Luego: } \sigma = \frac{M}{S} = \frac{18w + 4698}{249 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 140 \times 10^6 \quad \therefore \boxed{w \leq 1676\ N/m}$$

521. Repetir el problema anterior empleando una viga de 4 m con una sección W250 × 67.

Resolución:

Datos de la sección W250 × 67:

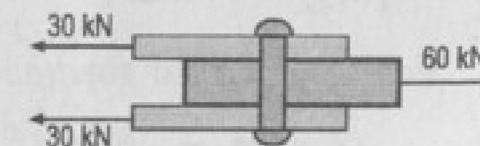
wpp = 67,1 kg/m = 658 N/m; $S = 806 \times 10^3\ mm^3$

$w_T = w + 658$

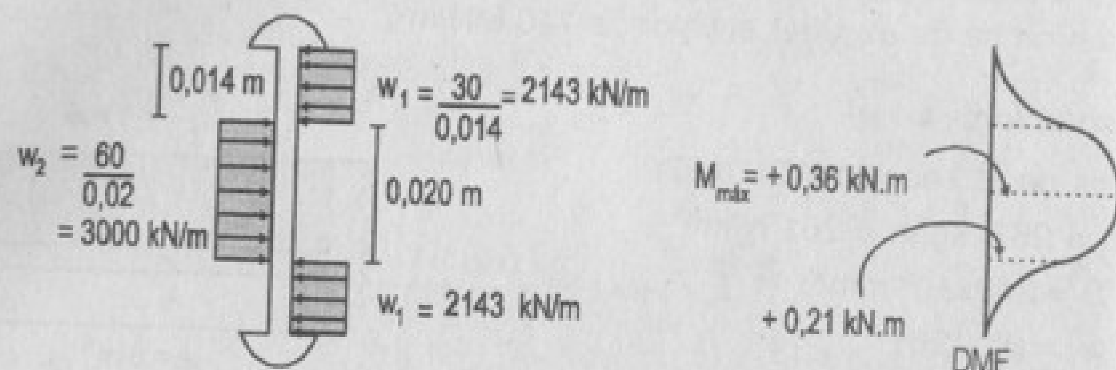
$$M = w_T \frac{L^2}{2} = (w + 658)\frac{(4)^2}{2} = 8w + 5264$$

$$\text{Luego: } \sigma_{máx.} = \frac{M}{S} = \frac{8w + 5264}{806 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 140 \times 10^6 \quad \therefore \boxed{w \leq 13{,}45\ kN/m}$$

522. La figura muestra la sección de una junta, en la que un remache de 28 mm de diámetro une dos placas de 14 mm a una de 20 mm. Suponiendo que las fuerzas indicadas se distribuyen uniformemente a lo largo de la parte del remache sobre la que actúan, determinar el máximo esfuerzo de flexión que aparece en el remache.

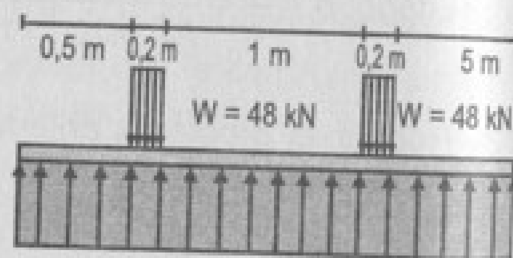


Resolución:
Hacemos un esquema de cómo actúan los esfuerzos sobre el remache y luego su DMF



$$\sigma_{máx.} = \frac{M}{S} = \frac{0,36 \times 10^3}{\frac{\pi}{32}(0,028)^3} = 167 \text{ MPa} \qquad \therefore \boxed{\sigma_{máx.} = 167 \text{ MPa}}$$

523. Una viga de madera de sección cuadrada que se emplea como durmiente de ferrocarril, está sostenida por una reacción uniformemente distribuida y soporta las dos cargas distribuidas de 48 kN cada una como indica la figura. Determinar el tamaño de la sección del durmiente si la tensión admisible es de 8 MPa.



Resolución:
Calculamos el momento máximo del DMF
Por equilibrio:

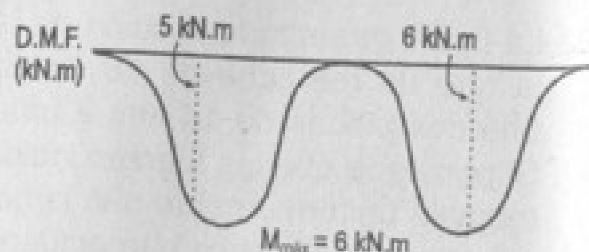
$+\uparrow \; \Sigma F_v = 0$:

$-2W + w(L) = 0$

$\Rightarrow w = \frac{2w}{L} = \frac{2(48)}{2,4}$

$w = 40$ kN/m

Del D.M.F.
$M_{máx.} = 6$ kN.m

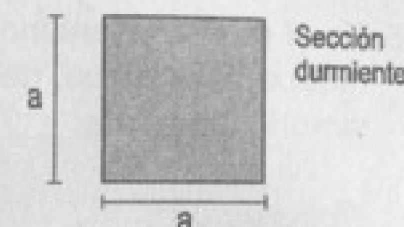


Para una sección cuadrada, tenemos:

$I = \frac{1}{12}a^4; \; C = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow S = a^3/6$

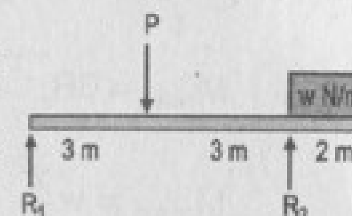
Luego: $\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{S} = \frac{6 \times 10^3}{\frac{1}{6}a^3} \leq 8 \times 10^6$



$a \geq 0,165$ m

$\therefore \boxed{a = 165 \text{ mm}}$

524. Una viga de madera de 150 mm de ancho y de 300 mm de altura está cargada como indica la figura. Si el máximo esfuerzo admisible es de 8 MN/m², determinar los valores máximos de w y P que pueden aplicarse simultáneamente.



Resolución:
Para que P y w sean máximos simultáneamente, haremos que el momento positivo sea igual al negativo.

$M^+_{máx} = 3R_1$

$M^-_{máx} = 2w$

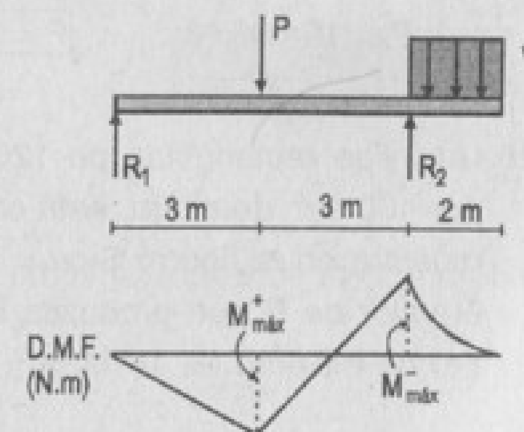
$\therefore 3R_1 = 2w$ ...(1)

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_2 = 0$: $3P - 6R_1 - 2w = 0$ ...(2)

Además: $b = 150$ mm
$h = 300$ mm
$\sigma_{máx.} = 8$ MN/m²

Sabemos que:

$$\sigma_{máx.} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(2w)}{0,15(0,3)^2} \leq 8 \times 10^6$$



Obtenemos:

$w \leq 9000$ N/m

$\therefore w = 9000 \text{ N/m} \Rightarrow R_1 = \frac{2}{3}w = 6000$ N

Para calcular P en (2):

$P = 2R_1 + \frac{2}{3}w = 3R_1 = 3(6000) = 18\,000$ N

$\therefore \boxed{w = 9 \text{ kN/m}}$ y $\boxed{P = 18 \text{ kN}}$

525. En el problema anterior, si la carga en el voladizo es de 10 kN/m y éste tiene x metros de longitud, determinar los máximos valores de x y P que puede tener simultáneamente.

Resolución:
Para este caso las incógnitas son P y x; sabemos ya que:

$$M^{+}_{máx} = 3R_1$$

$$M^{-}_{máx} = w\frac{x^2}{2} = 10 \times 10^3 \frac{x^2}{2} = 5000\ x^2$$

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(5000x^2)}{0{,}15(0{,}3)^2} \leq 8 \times 10^6 \Rightarrow x \leq 1{,}897 \text{ m} \quad \therefore \boxed{x = 1{,}9 \text{ m}}$$

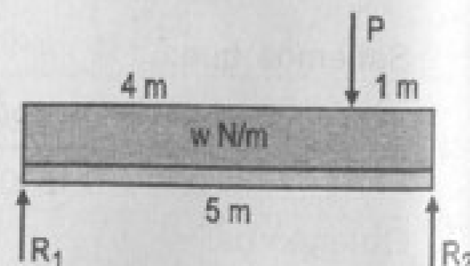
Además:

$$5000x^2 = 3R_1 \Rightarrow R_1 = 6000 \text{ N}$$

$$P = 2R_1 + \frac{5000}{3}x^2 = 2(6000) + \frac{5000}{3}(3{,}6)$$

$$P = 18\ 000 \text{ N} \quad \therefore \boxed{P = 18 \text{ kN}}$$

526. Una viga rectangular, de 120 mm de ancho por 400 mm de altura, está cargada como se muestra en la figura. Si w = 3 kN/m, calcule el valor de P que produzca un esfuerzo por flexión máximo de 10 MPa.



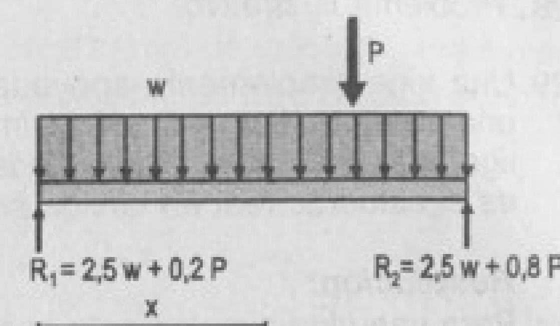
Resolución:
Para calcular el $M_{máx}$ hay dos posibilidades, que se encuentre entre centro de luz o justo debajo de la carga P.

Además sabemos:

$$\sigma_{máx} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6M}{0{,}12(0{,}4)^2} \leq 10 \times 10^6$$

Obtenemos $M \leq 32\ 000$ N.m

Aplicando equilibrio tenemos:



$$x_{V=0} = 2{,}5 + P/5w \leq 4 \text{ m} \quad ...(1)$$

$$M_{máx.} = \frac{(2{,}5w + 0{,}2P)^2}{2w} \quad ...(2)$$

$$\therefore \frac{[2{,}5(3000) + 0{,}2P]^2}{2(3000)} \leq 32\ 000$$

$$\Rightarrow P \leq 31{,}78 \text{ kN}$$

Si hacemos P = 31,78 kN ⇒ x = 4,6 > 4 ...No

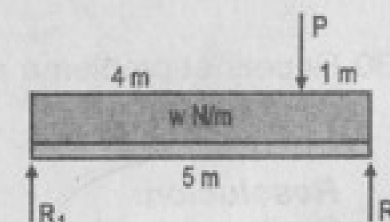
Concluimos que, para este caso, el momento máximo se presenta justo debajo de la carga P.

$$\therefore \quad M_{máx.} = R_1(4) - w\frac{(4)^2}{2} = 4(2{,}5\ w + 0{,}2P) - 8w$$

$$= 2w + 0{,}8P = 6000 + 0{,}8P \leq 32\ 000$$

$$\Rightarrow P \leq 32\ 500 \quad \therefore \boxed{P = 32{,}5 \text{ kN}}$$

527. Resolver el problema anterior con w = 6 kN/m.



Resolución:
Aplicaremos la expresión (2) y luego verificaremos la expresión (1) del problema anterior:

$$M_{máx} = \frac{[2{,}5(6000) + 0{,}2P]^2}{2(6000)} \leq 32\ 000$$

$$\Rightarrow P \leq 23 \text{ kN}$$

$$\text{En (1): } x = 2{,}5 + \frac{23\ 000}{5(6000)} = 3{,}27 \text{ m}$$

$$2{,}5 \leq x \leq 4 \ ...\text{Si} \quad \therefore \boxed{P = 23 \text{ kN}}$$

528. Problema ilustrativo.

529. Una viga simplemente apoyada en sus extremos, de 10 m de claro, soporta una carga uniforme de 16 kN/m sobre toda su longitud. ¿Cuál es la viga más ligera de perfil W que no excederá un esfuerzo por flexión de 120 MPa? ¿Cuál es el esfuerzo real en la viga seleccionada?

Resolución:
Para una viga simplemente apoyada: $M = \dfrac{wL^2}{8}$

Reemplazando los datos: $M = \dfrac{16\,000(10)^2}{8} = 200\,000$ N.m

Además: $S \geq \dfrac{M}{\sigma} = \dfrac{2\times10^5}{120\times10^6} = 1{,}67 \times 10^{-3}$ m³

Escogemos de la tabla: W610 × 82

masa = 81,9 kg/m = 803 N/m

S = 1,870 × 10⁻³ m³

$M_{real} = (16\,000 + 803)\dfrac{(10)^2}{8} = 2{,}1 \times 10^5$ N.m $\therefore$ $\boxed{M_{real} = 2{,}1\times10^5 \text{ N.m}}$

$\sigma_{real} = \dfrac{M}{S} = \dfrac{2{,}1\times10^5}{1{,}87\times10^{-3}} = 113$ MPa $\therefore$ $\boxed{\sigma_{real} = 113 \text{ MPa}}$

530. Repetir el problema anterior, si la carga distribuida es de 12 kN/m y la longitud de la viga es 8 m.

Resolución:
Similar al problema anterior:

$M = 12\,000\dfrac{(8)^2}{8} = 96\,000$ N.m

Luego: $S \geq \dfrac{M}{\sigma} = \dfrac{96\,000}{120\times10^6} = 0{,}80 \times 10^{-3}$ m³ (800 × 10³ mm³)

De la tabla de perfiles escogemos: W460 × 52

masa = 52,0 kg/m (510 N/m)

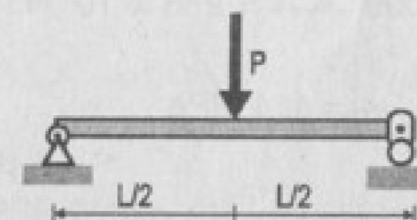
S = 943 × 10³ mm³

$M_{real} = (12\,000 + 510)\dfrac{(8)^2}{8} = 100\,008$ N.m $\therefore$ $\boxed{M_{real} = 100\,008 \text{ N.m}}$

$\sigma_{real} = \dfrac{100\,008}{0{,}943\times10^{-3}} = 106$ MPa $\therefore$ $\boxed{\sigma_{real} = 106 \text{ MPa}}$

531. Se aplica una carga concentrada de 90 kN en el centro de una viga simplemente apoyada de 8 m de claro. Si el esfuerzo admisible es de 120 MN/m², elegir la sección W más ligera.

Resolución:



El momento para este caso es:

$M_{máx.} = \dfrac{PL}{4}$

$M_{máx.} = \dfrac{90\times10^3(8)}{4} = 180$ kN.m

Luego: $S \geq \dfrac{180\times10^3}{120\times10^6} = 1{,}5 \times 10^{-3}$ m³ = 1500 × 10³ mm³

De la tabla de perfiles escogemos: $\boxed{\text{W530} \times 74}$

Datos del perfil:

masa = 74,7 kg/m = 733 N/m

S = 1550 × 10³ mm³

$M_{total} = 180\,000 + \dfrac{wL^2}{8} = 180\,000 + 733\dfrac{(8)^2}{8} = 185\,864$ N.m

$\sigma_{total} = \dfrac{M_{total}}{S} = \dfrac{185\,864}{1{,}55\times10^{-3}} = 120$ MPa

532. Resolver el problema anterior, si la longitud de la viga se cambia a 12 m.

Resolución:

Similar al problema anterior:

$M_{máx} = \dfrac{PL}{4} = 90\times10^3\dfrac{(12)}{4} = 270$ kN.m

Luego:

$S \geq \dfrac{270\times10^3}{120\times10^6} = 2{,}25 \times 10^{-3}$ m³ = 2250 × 10³ mm³

De la tabla que tenemos, escogemos: $\boxed{W610\times101}$
masa = 101,7 kg/cm² ≅ 1000 N/m
S = 2530 × 10³ mm³

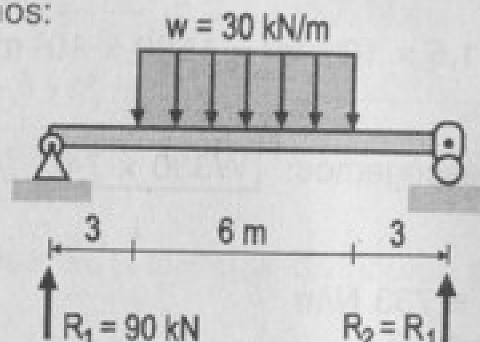
$$M_{total} = 270\times10^3 + 1000\frac{(12)^2}{8} = 288\times10^3\ \text{N.m}$$

$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{288\times10^3}{2{,}53\times10^{-3}} = 114\ \text{MPa}$$

Otra posibilidad hubiera sido W530 × 101 que tiene S = 2300 × 10³ > 2250 × 10³, pero en cuanto a esfuerzo hubiera salido: σ_{real} = 125 MPa, y esto no cumple con el esfuerzo admisible.

533. Una viga simplemente apoyada de 12 m de claro soporta una carga repartida de 30 kN/m en los 6 m centrales. Elegir la sección más ligera, si el esfuerzo admisible es de 140 MPa. Hallar el esfuerzo real máximo en la viga elegida.

Resolución:
Del enunciado tenemos:



Calculamos el momento máximo, que está en el centro de luz.

$$M_{máx} = 90(6) - 30\frac{(3)^2}{2}$$

$$M_{máx} = 405\ \text{kN.m}$$

$$\sigma_{adm.} = 140\ \text{MPa}$$

$$\therefore\ S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{405\times10^3}{140\times10^6} = 2{,}893\times10^{-3}\ \text{m}^3 = 2893\times10^3\ \text{mm}^3$$

Escogemos un: W610 × 125
Datos del perfil: m = 125,1 kg/m = 1227 N/m ; S = 3220 × 10³ mm³

$$M_{total} = 405 + 1{,}227\times\frac{12^2}{8} = 405 + 22 = 427\ \text{kN.m}$$

$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{427\times10^3}{3{,}22\times10^{-3}} = 133\ \text{MPa}\quad \therefore\ \boxed{\sigma_{real} = 133\ \text{MPa}}$$

534. Repetir el problema anterior, si la carga uniformemente distribuida se cambia a 80 kN/m.

Resolución:
Usando el mismo procedimiento anterior:

$$M_{máx.} = 240(6) - 80\frac{(3)^2}{2} = 1080\ \text{kN.m}$$

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{1080\times10^3}{140\times10^6} = 7{,}71\times10^{-3}\ \text{m}^3\quad (7710\times10^3\ \text{mm}^3)$$

De la tabla escogemos: W920x223
masa = 224,2 kg/m = 2,2 kN/m
S = 8270 × 10³ mm³

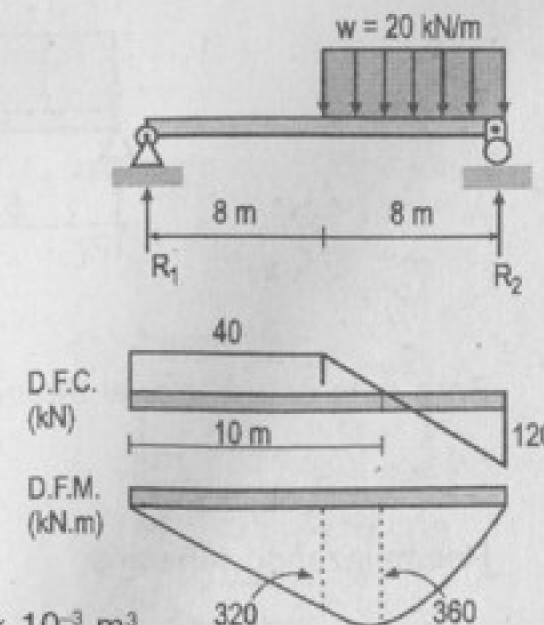
$$M_{total} = 1080 + 2{,}2\ \frac{(12)^2}{8} = 1080 + 40 = 1120\ \text{kN.m}$$

$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{1120\times10^3}{8{,}27\times10^{-3}} = 136\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{real} = 136\ \text{MPa} \leq 140\ \text{MPa}\ \ ...\text{Sí}\quad \therefore\ \boxed{\sigma_{real} = 136\ \text{MPa}}$$

535. Una viga apoyada en sus extremos de 16 m de claro, soporta una carga uniforme de 20 kN/m en toda su longitud sobre su mitad derecha. Si el esfuerzo admisible es de 120 MN/m², elegir la sección W más económica.

Resolución:
Del enunciado tenemos:
Calculamos las reacciones:



$$\overset{+}{\circlearrowleft}\ \Sigma M_A = 0:\ 16R_2 - 20(8)(12) = 0$$

$$\Rightarrow R_2 = 120\ \text{kN}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_v = 0:\ R_1 + R_2 - 20(8) = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = 40\ \text{kN}$$

Dibujamos los D.F.C. y
D.M.F. (no se presenta cálculos)

$$M_{máx} = 360\ \text{kN.m} \Rightarrow\ S \geq \frac{360\times10^3}{120\times10^6} = 3\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

De tabla escogemos: W690 × 125

masa = 125,6 kg/m = 1232 N/m

S = 3500 × 10³ mm³

Para calcular el momento adicional por peso propio, tenemos:

$$M = \left(\frac{wL}{2}\right)x - w\frac{x^2}{2}$$

$$M_{x=10} = \frac{(1232)(16)}{2}(10) - (1232)\frac{(10)^2}{2} = 37\text{ N.m}$$

$$M_{total} = 360 + 37 = 397\text{ kN.m}$$

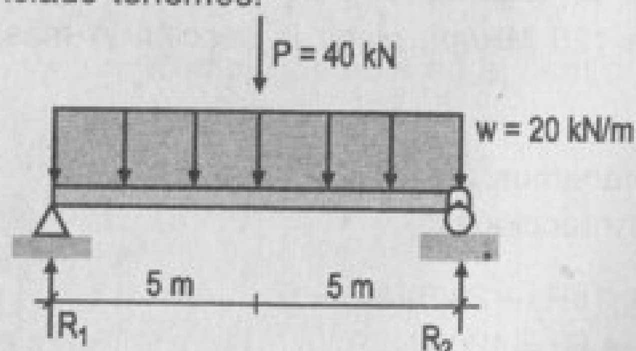
$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{397\times10^3}{3{,}5\times10^{-3}} = 114\text{ MPa}$$

∴ **El perfil más económico es: W690 × 125**

536. Una viga simplemente apoyada de 10 m de largo soporta una carga de 20 kN/m distribuida uniformemente en toda su longitud y una carga de 40 kN concentrada en su parte media. Si el esfuerzo permisible es de 120 MPa, determine la viga de forma W más ligera que pueda emplearse.

Resolución:

De acuerdo al enunciado tenemos:



$\sigma_{adm.} = 120$ MPa

Para esta estructura, el momento máximo vale:

$$M_{máx.} = \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{4}$$

Reemplazando tenemos:

$$M_{máx.} = 20\frac{(10)^2}{8} + 40\frac{(10)}{4} = 350\text{ kN.m}$$

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{350\times10^3}{120\times10^6} = 2{,}9\times10^{-3}\text{ m}^3$$

Escogemos un W610 × 125

masa = 125,1 kg/m = 1227 N/m

S = 3220 × 10³ mm³

Calculamos el momento adicional por P.P.

$$M = \frac{wL^2}{8} = 1{,}227\frac{(10)^2}{8} = 15{,}33\text{ kN.m}$$

$$\therefore\ M_{total} = 350 + 15{,}33 = 365{,}33\text{ kN.m}$$

$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{365{,}33\times10^3}{3{,}22\times10^{-3}} = 114\text{ MPa}$$

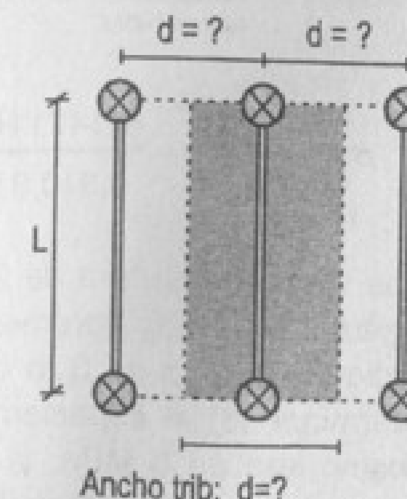
∴ **El perfil w más ligero es: W610 × 125**

537. Problema ilustrativo.

538. Unas viguetas de madera de 50 mm de ancho por 200 mm de altura de sección, simplemente apoyadas sobre un claro de 4 m, han de soportar un piso con carga total de 5 kN/m². Determinar la distancia entre ejes de las viguetas, de manera que el esfuerzo máximo sea de 8 MPa. ¿Qué carga total podrían soportar si la distancia entre ejes fuera de 0,40 m?

Resolución:

Del gráfico tenemos:



Ancho trib: d=?

w = 5d kN/m

$$M_{máx} = \frac{1}{8}wL^2 = \frac{1}{8}(5d)(4)^2 = 10d$$

Además:

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(10d\times10^3)}{0{,}05(0{,}2)^2} \leq 8\times10^6$$

∴ **$d \leq 0{,}267$ m**

Si $d = 0{,}4$ m

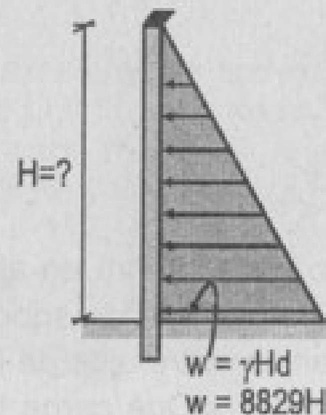
$w = w(0{,}4) = 0{,}4w$ kN/m

$$M_{máx} = \frac{1}{8}(0{,}4\ w)(4)^2 = 0{,}8w \text{ kN/m}$$

$$\sigma = \frac{6(0{,}8w)\times 10^3}{0{,}05(0{,}2)^2} \le 8\times 10^6 \Rightarrow w \le 3{,}34 \quad \therefore \boxed{w = 3{,}34 \text{ kN/m}^2}$$

539. Unas vigas de madera de 300 × 300 mm, espaciadas 0,90 m entre ejes, están hincadas en el terreno y actúan como vigas en voladizo, formando la estructura resistente de una ataguía para contención de agua cuya densidad es de 1000 kg/m³. Calcular la altura de seguridad del agua detrás de la represa si el esfuerzo admisible es de 8 MN/m².

Resolución:



Esquema de carga por la presión del agua.

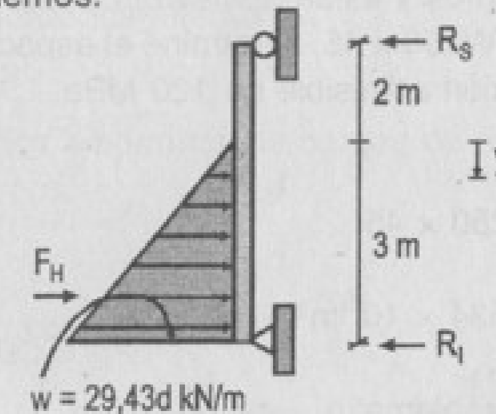
$$M_{máx} = \underbrace{\frac{1}{2}(bwH)}_{\text{fuerza hidro.}}\frac{H}{3} = \frac{1}{6}wH^2 \Rightarrow M_{máx} = \frac{1}{6}(8829H)(H^2) = 1471\ H^3$$

$$\sigma_{máx} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(1471\ H^3)}{0{,}3(0{,}3)^2} \le 8\times 10^6 \Rightarrow H \le 2{,}9 \text{ m} \therefore \boxed{H = 2{,}9 \text{ m}}$$

540. Unas vigas de madera de 200 mm de ancho y 300 mm de altura, con 5 m de longitud, apoyadas libremente en sus extremos inferior y superior, sostienen un dique o presa de 3 m de altura; la densidad del agua es de 1000 kg/m³. Determinar (a) el espaciamiento de los maderos de manera que el esfuerzo máximo sea de 8 MPa, y (b) el espaciamiento, si $\sigma_{máx}$ = 12 MPa y el agua alcanza su máxima altura de 5 m.

Resolución:

Para la parte (a) tenemos:



Calculamos las reacciones:

$$F_H = \frac{1}{2}wh = \frac{1}{2}(29{,}43d)\ (3) \Rightarrow F_H = 44{,}145d$$

$$R_s = F_H\frac{(1)}{5} = 8{,}83d \text{ kN}$$

$$V = -R_s + \left(\frac{29{,}43d}{3}\right)\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{6R_s}{29{,}43d} = 1{,}8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow M_{máx} = R_s\ (3{,}34) - \left(\frac{29{,}43d}{3}\right)\left(\frac{1{,}34}{6}\right)^3 = 25{,}56\ d \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{6M_{máx.}}{bh^2} = \frac{6(25{,}56d\times 10^3)}{0{,}2(0{,}3)^2} \le 8\times 10^6 \quad \therefore \boxed{d = 0{,}939 \text{ m}}$$

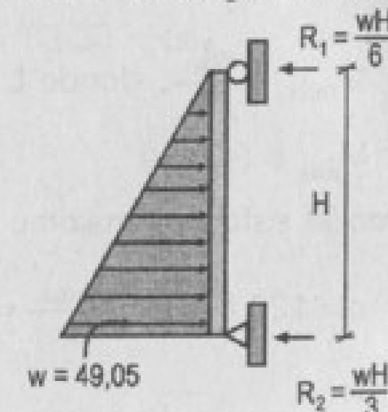
Para la parte (b) tenemos: podemos asumir un d = 1 m, luego relacionarlo.

$$M_{máx} = \frac{\sqrt{3}}{27}wH^2 = \frac{\sqrt{3}}{27}(49{,}05)(5)^2$$

$$= 78{,}66 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{6(78{,}66\times 10^3)}{0{,}2(0{,}3)^2}$$

$$\sigma_{máx} = 26{,}22 \text{ MPa}$$



Luego relacionamos los esfuerzos: $\therefore \boxed{d = \frac{12}{26{,}22} = 0{,}46 \text{ m}}$

541. Las vigas del piso de cierto edificio, de 6 m de longitud, están simplemente apoyadas en sus extremos y están sometidas a una carga de 4 kN/m². Si las vigas tienen secciones W250 × 45, determine el espaciamiento adecuado usando un esfuerzo por flexión admisible de 120 MPa.

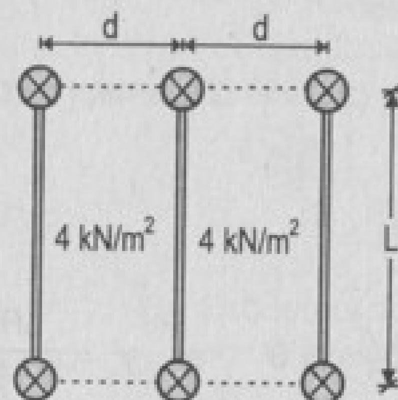
Resolución:

Datos para el perfil W250 × 45:

m = 44,9 kg/m

$S = 534 \times 10^3\ mm^3 = 534 \times 10^{-6} m^3$

Del esquema para el problema:



Carga por el piso:

$w_1 = 4d$ kN/m

Carga por el peso de la viga:

$w_2 = (44,9)(9,81)$ N/m = 0,44 kN/m

La carga total es: $w = w_1 + w_2$

El momento flector máximo para la viga es:

$$M_{máx.} = \frac{wL^2}{8}, \text{ donde } L = 6 \text{ m}$$

Así: $M_{máx.} = (4,5\ w)$

Como el esfuerzo máximo admisible es:

$$\sigma = 120\ MPa = \frac{M_{máx.}}{S} = \frac{4,5\ w}{534 \times 10^{-6} m^3}$$

Donde:

$$120 \times 10^3 \frac{kN}{m^2} = (4,5)\frac{(4d + 0,44)}{534 \times 10^{-6}}\frac{kN}{m^3} \Rightarrow \boxed{d = 3,45\ m}$$

542. Seleccione las secciones W más ligeras que puedan emplearse para las vigas y trabes del problema 537; si el esfuerzo admisible es de 120 MPa, despreciando el peso propio de los miembros.

Resolución:

Tomando en cuenta los diagramas de cargas de estos elementos, calculamos los momentos máximos:

Viga B-1

w = 10 kN/m
R_1
R_2
L = 4 m

$$M_{máx.} = \frac{wL^2}{8} = 10\frac{(4)^2}{8}$$

$M_{máx.} = 20$ kN.m

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{20 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 0,167 \times 10^{-3}\ m^3$$

$S \geq 167 \times 10^3\ mm^3$

De la tabla escogemos: $\boxed{W250 \times 18}$

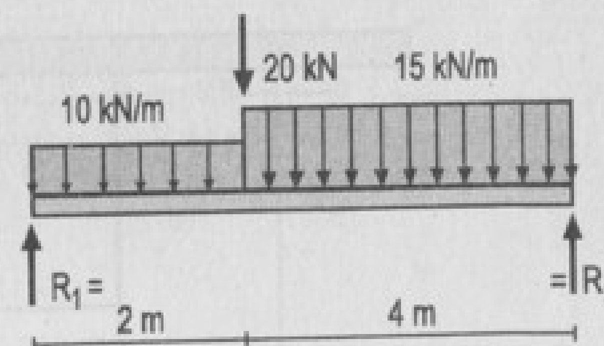
* Viga B-2

Calculamos R_2:

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_1 = 0$:

$6R_2 - 60(4) - 20(2)$
$- 20(1) = 0$

$\Rightarrow R_2 = 50$ kN



Posición para corte cero:

$V = 15x - 50 = 0$

$\Rightarrow x = 3,33$ m

$$M_{máx.} = 3,33R_2 - 15 \times \frac{3,33^2}{2} \Rightarrow M_{máx} = 83,33\ kN.m$$

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{83,33 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 0,694 \times 10^{-3}\ m^3$$

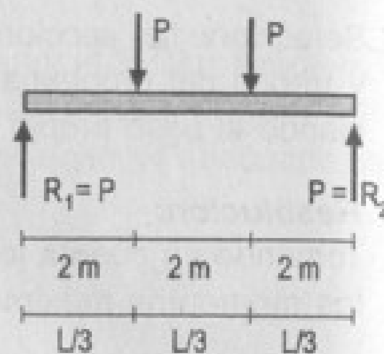
De la tabla escogemos: $\boxed{W410 \times 46}$

* Trabe C-1

$$M_{máx.} = \frac{PL}{3} = \frac{20(6)}{3}$$

$M_{máx} = 40$ kN.m

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{40\times10^3}{120\times10^6} = 0{,}333 \times 10^{-3}\ m^3$$



De la tabla escogemos: W310×28

- Trabe C–2

$$M_{máx.} = \frac{PL}{3} = 60\frac{(6)}{3} = 120\ \text{kN.m} \Rightarrow S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{120\times10^3}{120\times10^6} = 1 \times 10^{-3}\ m^3$$

De la tabla escogemos: W410×60

543. En la figura se muestra una parte de la planta del piso de un edificio, indicándose la carga que actúa sobre cada claro (carga aplicada y carga muerta). Seleccione los perfiles W adecuados más ligeros, si el esfuerzo por flexión admisible es de 120 MPa y las vigas están correctamente arriostradas.



Resolución:

Se hará un metrado, luego el esquema de cargas, para luego calcular el $M_{máx}$.

- Para (B-1)

$$M_{máx.} = \frac{1}{8}wL^2 = \frac{1}{8}(22{,}5)(5)^2$$

$M_{máx.} = 70{,}3$ kN.m

Luego:

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{70{,}3\times10^3}{120\times10^6} \Rightarrow S \geq 0{,}586 \times 10^{-3}\ m^3 = 586 \times 10^3\ mm^3$$

De la tabla de perfiles escogemos: W410×39

Tiene $S = 634 \times 10^3\ mm^3 > 586 \times 10^3\ mm^3$ ...Sí

- Para (B – 2)

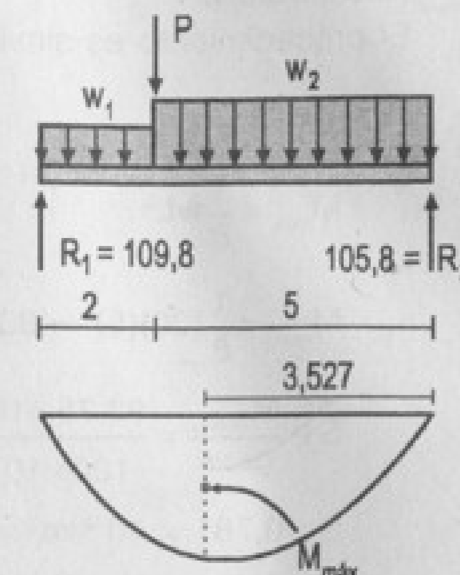
Tenemos:

$w_1 = 15(2{,}5/2) = 18{,}75$ kN/m

$w_2 = 15(2{,}5/2) + 9\ (2{,}5/2)$

$\Rightarrow w_2 = 30$ kN/m

$$P = 9 \times 2{,}5 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = 28{,}125$$



Del D.M.F. obtenemos:

$M_{máx} = 186{,}56$ kN.m

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{186{,}56\times10^3}{120\times10^6}$$

$S \geq 1{,}555 \times 10^{-3}\ m = 1555 \times 10^3\ mm^3$

De la tabla de perfiles escogemos: W460×82

Tiene: $S = 1610 \times 10^3\ mm^3 > 1555 \times 10^3\ mm^3$ ...Sí

- Viga (B–3) $\Rightarrow w = 15 \times 2{,}5 = 37{,}5$ kN/m

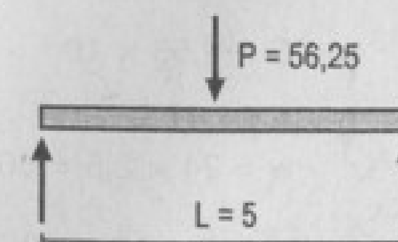
$$M_{máx.} = \frac{wL^2}{8} = 37{,}5\frac{(7)^2}{8} = 230\ \text{kN . m}$$

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{230\times10^3}{120\times10^6} = 1{,}917 \times 10^{-3}\ m^3$$

De la tabla de perfiles escogemos: W610×92

Tiene: $S = 2140 \times 10^3\ mm^3 > 1917 \times 10^3\ mm^3$ ...Sí

- Trabe (C-1)



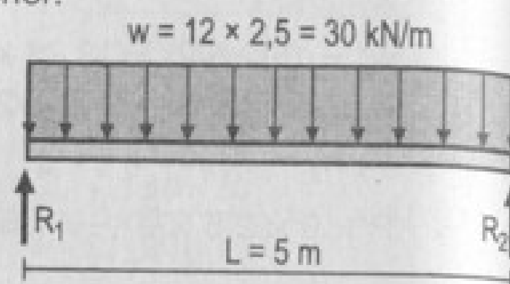
$$M_{máx.} = \frac{PL}{4} = \frac{56{,}25(5)}{4} = 70{,}3\ \text{kN.m}$$

$S \geq \dfrac{70{,}3\times10^3}{120\times10^6} = 0{,}59 \times 10^{-3}\ m^3$. De la tabla de perfiles escogemos:

W410×39

544. Repita el problema anterior, si la carga de 15 kN/m² se cambia a 24 kN/m² y la de 9 kN/m² a 12 kN/m².

Resolución:
El procedimiento es similar al problema anterior:



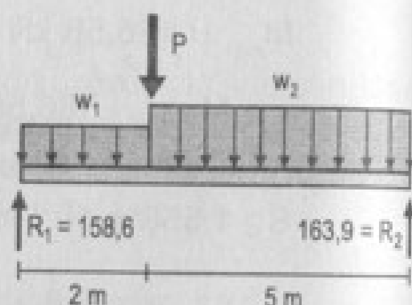
* Viga (B-1)

$$M_{máx} = \frac{1}{8}wL^2$$

$$M_{máx} = \frac{1}{8}(30)(5)^2 = 93,75$$

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{93,75\times10^3}{120\times10^6}$$

$S \geq 0,781 \times 10^{-3}$ m³ = 781 × 10³ mm³



De la tabla de perfiles escogemos: W360×51

con S = 796 × 10³ mm³ > 781 × 10³ mm³

* Viga (B-2)

w_1 = 24 (2,5/2) = 30 ⇒ w_1 = 30 kN/m

w_2 = 24 (2,5/2) + 12 (2,5/2) ⇒ w_2 = 45 kN/m

$$P = 12(2,5)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 37,5 \text{ kN} \Rightarrow M_{máx} = 298,48 \text{ kN.m}$$

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{298,48\times10^3}{120\times10^6} = 2,49 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

De la tabla de perfiles escogemos: W610×101

con S = 2,53 × 10⁻³ > 2,49 × 10⁻³ ...Sí

* Viga (B-3)

w = 24 × 2,5 = 60 kN/m

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} = \frac{60(7)^2}{8} = 367,5 \Rightarrow S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{367,5\times10^3}{120\times10^6} = 3,06 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

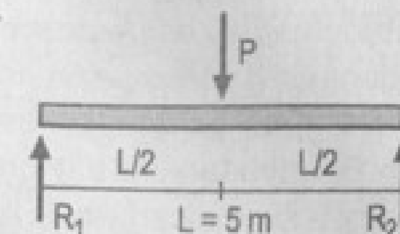
De la tabla de perfiles escogemos: W610×125

con S = 3,22 × 10⁻³ >3,06 × 10³ ...Sí

* Trabe (C-1):

P = 12 × 2,5 × 5/2 = 75 kN

$$M_{máx} = \frac{PL}{4} = 75\frac{(5)}{4} = 93,75$$



Luego:

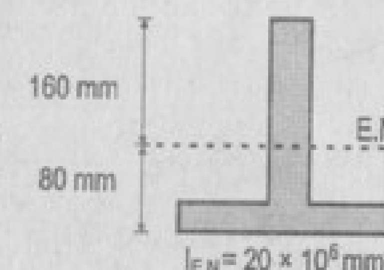
$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{93,75\times10^3}{120\times10^6} = 0,781 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

De la tabla de perfiles escogemos: W360 × 51

con S = 796 × 10³ mm³ > 781 × 10³ mm³ ...Sí

545, 546, 547: Problemas ilustrativos

548. Una viga simplemente apoyada, de 4 m de longitud, tiene la sección indicada en la figura. La carga repartida uniformemente vale w N/m. Calcular w si $\sigma_t \leq 30$ MN/m² y $\sigma_c \leq 70$ MN/m².



Resolución:
w en N

Para una viga simplemente apoyada tenemos: $M_{máx.} = \frac{wL^2}{8} = w\frac{(4)^2}{8} = 2w$

Un momento positivo genera compresión en la fibra superior y tracción en la fibra inferior.

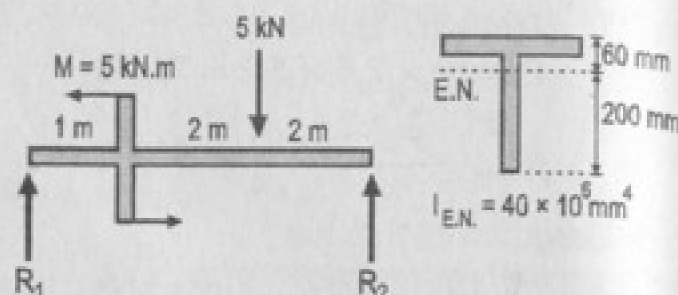
$$\sigma_c = \frac{M_{máx.}y_c}{I} = \frac{2w(0,16)}{2\times10^{-5}} \leq 70\times10^6 \Rightarrow w \leq 4375 \text{ N/m}$$

$$\sigma_t = \frac{M_{máx.}y_t}{I} = \frac{2w(0,08)}{2\times10^{-5}} \leq 30\times10^6 \Rightarrow w \leq 3750 \text{ N/m}$$

∴ w = 3750 N/m

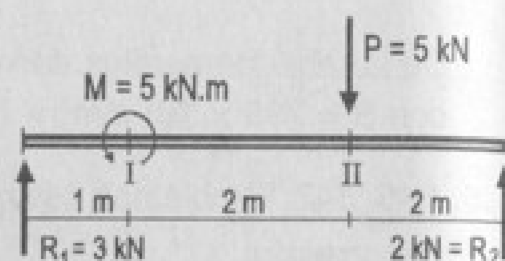
$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0,16}{0,08} = 2,00 \begin{cases} \sigma_c = 60,0 \text{ MPa} \\ \sigma_t = 30,0 \text{ MPa} \end{cases}$$

549. Determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga de la figura. La sección es una T, con las dimensiones y propiedades que se indican en la figura.



Resolución:

Dibujamos el diagrama de momentos a partir del diagrama de cargas:

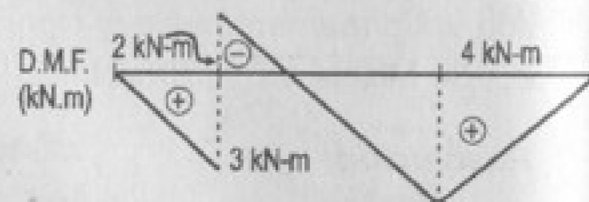


Cálculo de R_1 y R_2 :

$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_1 = 0: 5(R_2) + 5 - 3(5) = 0$$

$$R_2 = 2 \text{ kN}$$

$$R_1 = 3 \text{ kN}$$



En la sección II tenemos momento positivo, esto origina compresión en la fibra superior y tracción en la fibra inferior.

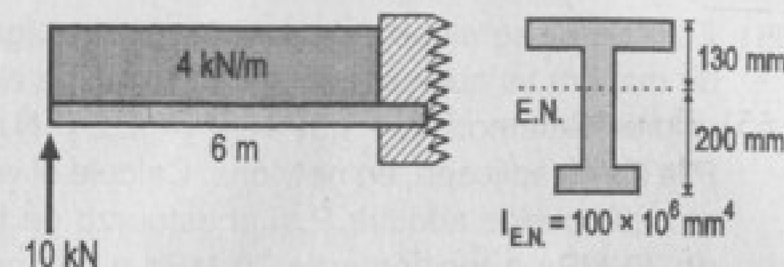
$$\sigma_c = \frac{(4\times10^3)(0{,}06)}{4\times10^{-5}} = 6 \text{ MPa} \ \wedge \ \sigma_t = \frac{(4\times10^3)(0{,}2)}{4\times10^{-5}} = 20 \text{ MPa}$$

En la sección I tenemos momento negativo, esto genera tracción en la fibra superior y compresión en la fibra inferior.

$$\sigma_t = \frac{(2\times10^3)(0{,}06)}{4\times10^{-5}} = 3 \text{ MPa} \ \wedge \ \sigma_c = \frac{(2\times10^3)(0{,}2)}{4\times10^{-5}} = 10 \text{ MPa}$$

$$\therefore \ \boxed{\sigma_t = 20 \text{ MPa}} \ \boxed{\sigma_c = 10 \text{ MPa}}$$

550. Calcule el valor máximo del esfuerzo por flexión, a tensión o a compresión, para la viga en voladizo mostrada en la figura.



Resolución:

Para calcular el valor máximo del esfuerzo por flexión, dibujamos el diagrama de momento flexionante.

Posición (x) de máximo momento positivo:

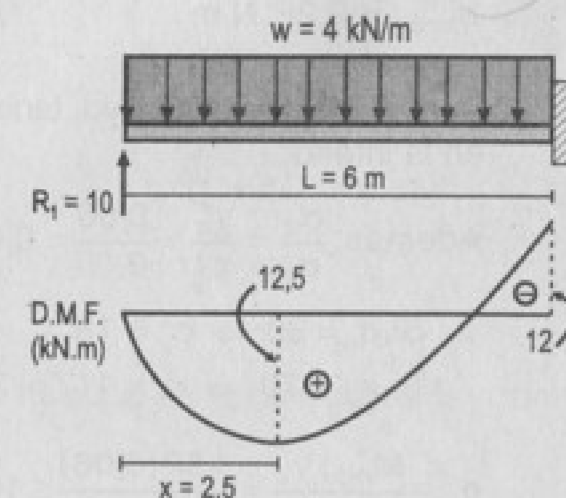
$$10 - 4(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 2{,}5$$

$$M^{(+)}_{máx.} = 10\,(2{,}5) - 4\,\frac{(2{,}5)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ M^{(+)}_{máx.} = 12{,}5 \text{ kN.m}$$

$$M^{(-)}_{máx.} = 10(6) - 4\frac{(6)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ M^{(-)}_{máx.} = -12 \text{ kN.m}$$



I. Para el M^+, tenemos compresión en la fibra superior

$$\sigma_c = \frac{M^+_{máx} y_c}{I} = \frac{(12{,}5\times10^3)(0{,}13)}{10^{-4}} = 16{,}25 \text{ MPa}$$

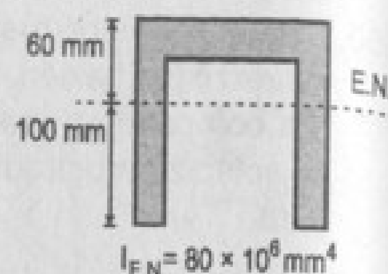
$$\sigma_t = \frac{M^+_{máx} y_t}{I} = \frac{(12{,}5\times10^3)(0{,}2)}{10^{-4}} = 25 \text{ MPa}$$

II. Para el $M^-_{máx}$ tenemos tracción en la fibra superior

$$\sigma_t = \frac{M^-_{máx} y_t}{I} = \frac{(12\times10^3)(0{,}13)}{10^{-4}} = 15{,}6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{M^-_{máx} y_c}{I} = \frac{(12\times10^3)(0{,}2)}{10^{-4}} = 24 \text{ MPa} \ \therefore \ \boxed{\sigma_c = 24 \text{ MPa}}, \boxed{\sigma_t = 25 \text{ MPa}}$$

551. En la figura se muestra la sección de una viga cargada de manera tal que su momento flexionante alcanza los valores extremos de + 1,5P N.m y – 2,2 P N.m, siendo P la carga aplicada, en newtons. Calcule el valor máximo que puede adquirir P si el esfuerzo de trabajo es de 30 MPa a tensión y de 70 MPa a compresión.



Resolución:
Tenemos los siguientes momentos:

$M^+_{máx.} = 1{,}5P$ N.m $\qquad P_{máx} = ?\quad \sigma_t=30,\ \sigma_c=70$

$M^-_{máx.} = 2{,}2P$ N.m

I. Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior.

Además: $\dfrac{\sigma_c}{\sigma_t} = \dfrac{y_c}{y_t} = \dfrac{0{,}06}{0{,}10} = 0{,}6$

$\therefore$ Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 18$ ...Sí

Si $\sigma_c = 70 \Rightarrow \sigma_t = 117 > 30$ ...No

$$\sigma_c = \frac{M^+_{máx.} y_c}{I} = \frac{1{,}5P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 18\times10^6$$

$$\sigma_t = \frac{M^+_{máx.} y_t}{I} = \frac{1{,}5P(0{,}10)}{8\times10^{-5}} \le 30\times10^6 \Rightarrow P \le 16\ 000\ \text{N}$$

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la fibra inferior, además:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$$

Si $\sigma_c = 70 \Rightarrow \sigma_t = 42 > 30$ ...No

Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 50 < 70$ ...Sí

$$\therefore\ \sigma_t = \frac{M^-_{máx.}\ y_t}{I} = \frac{2{,}2P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 30\times10^6$$

$P \le 18\ 182$ N $\Rightarrow \therefore \boxed{P_{máx.} = 16\ \text{kN}}$

552. Resuelva el problema anterior, suponiendo ahora que los momentos extremos son + 3,2P N.m y – 5,8P N.m.

Resolución:
Resolviendo de manera similar al problema anterior:

$M^+_{máx} = 3{,}2P$ N.m $\Rightarrow M^-_{máx} = 5{,}8P$ N.m

I. Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior.

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$$

Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 18$ ...Sí

$$\sigma_c = \frac{M^+_{máx.}\ y_c}{I} = \frac{3{,}2P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 18\times10^6 \Rightarrow P \le 7500\ \text{N}$$

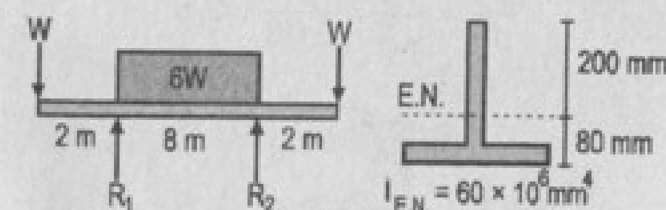
II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior.

Además: $\dfrac{\sigma_t}{\sigma_c} = \dfrac{y_t}{y_c} = \dfrac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$

Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 50 < 70$ ...Sí $\therefore\ \sigma_t = \dfrac{M^-_{máx.} y_t}{I} = \dfrac{5{,}8P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 30\times10^6$

$\Rightarrow P \le 6896{,}5 \quad \therefore \boxed{P = 6{,}9\ \text{kN}}$

553. Calcule el máximo valor de W que pueda resistir la viga de la figura, si $\sigma_t \le 20$ MN/m² y $\sigma_c \le 60$ MN/m²



Resolución:
Del enunciado tenemos el diagrama de cargas, dibujamos el D.M.F. para obtener el máximo momento.

Del enunciado tenemos el diagrama de cargas, dibujamos el D M F para obtener el máximo momento.

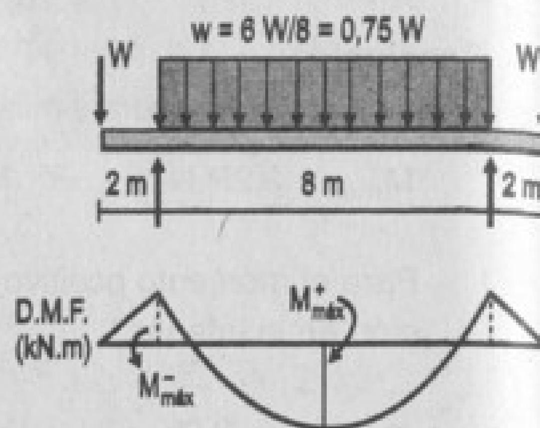
$\sigma_t \leq 20$ MN/m^2
$\sigma_c \leq 60$ MN/m^2

$M^-_{máx.} = 2W$ kN.m

$M^+_{máx.} = \frac{1}{8}\ wL^2 - M^-_{máx}$

$= \frac{1}{8}(0{,}75W)8^2 - 2W$

$M^+_{máx.} = 4W$ kN.m



I. Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior.
Además:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0{,}2}{0{,}08} = 2{,}5$$

$\therefore$ Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 50 < 60$ ...Sí

Si $\sigma_c = 60 \Rightarrow \sigma_t = 24 > 20$ ...No

$$\therefore\ \sigma_c = \frac{M^+_{máx.}y_c}{I} = \frac{(4W\times10^3)(0{,}2)}{6\times10^{-5}} \leq 50\times10^6 \Rightarrow W \leq 3{,}75 \text{ kN}$$

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior, además:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0{,}2}{0{,}08} = 2{,}5$$

$\therefore$ Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 8 < 60$ ...Sí

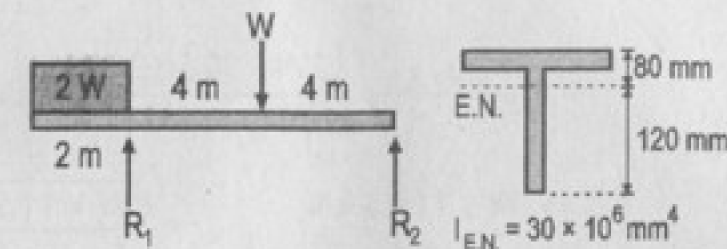
Luego:

$$\sigma_t = \frac{M^-_{máx.}y_t}{I} = \frac{(2W\times10^3)(0{,}2)}{6\times10^{-5}} \leq 20\times10^6$$

$\Rightarrow W \leq 3{,}0$ kN

$\therefore$ $\boxed{W = 3{,}0 \text{ kN}}$

554. ¿Cuál es el valor de W que pueda aplicarse a la viga mostrada en la figura si $\sigma_t \leq 60$ MPa y $\sigma_c \leq 100$ MPa?



Resolución:

Dibujamos el diagrama de momento flexionante para obtener los momentos máximos.

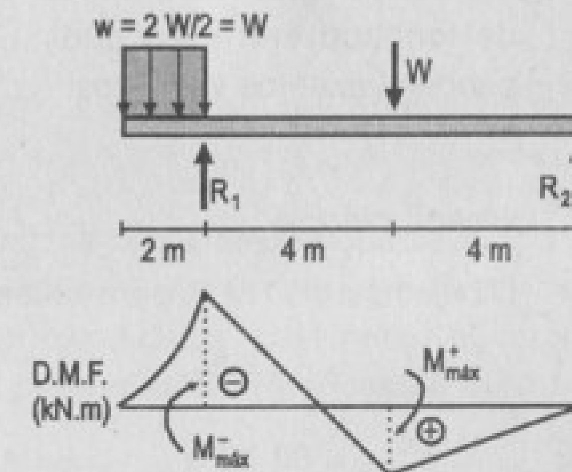
Cálculo de R_2:

$\Sigma M_1 = 0$: $8(R_2) - 4(W) + 2W(1) = 0$

$\Rightarrow R_2 = 0{,}25$ W

$M^+_{máx.} = 4R_2 = W$

$M^-_{máx.} = 1(2W) = 2W$



I. Para el momento positivo, tenemos:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0{,}08}{0{,}12} = \frac{2}{3}$$

Si $\sigma_t = 60 \Rightarrow \sigma_c = 40 < 100$ ...Sí

$$\sigma_c = \frac{M^+_{máx.}y_c}{I} = \frac{(W\times10^3)(0{,}08)}{3\times10^{-5}} \leq 40\times10^6$$

$\Rightarrow W \leq 15$ kN

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior.

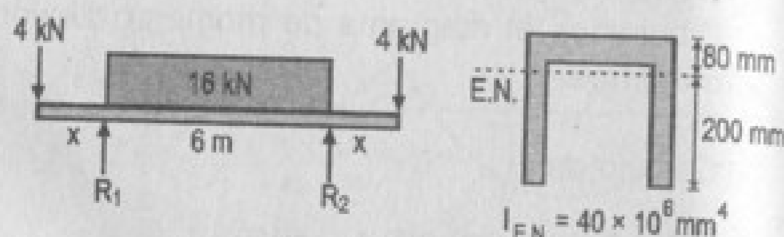
Además: $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0{,}08}{0{,}12} = \frac{2}{3}$

Si $\sigma_c = 100 \Rightarrow \sigma_t = 66{,}67 > 60$ ...No
Si $\sigma_t = 60 \Rightarrow \sigma_c = 90 < 100$ ...Sí

$$\sigma_t = \frac{M^-_{máx.} y_t}{I} = \frac{(2W \times 10^3)(0{,}08)}{3 \times 10^{-5}} \leq 60 \times 10^6$$

$$\Rightarrow W \leq 11{,}25 \text{ kN} \qquad \therefore \quad \boxed{W = 11{,}25 \text{ kN}}$$

555. Una viga de fundición soporta las cargas de la figura. Si los esfuerzos admisibles son de 20 y 80 MN/m² a tensión y a compresión, respectivamente, calcular los límites de longitud entre los que pueden variar los voladizos.



Resolución:

Dibujamos el D M F para obtener $M^{+/-}_{máx}$:

$$\sigma^t_{adm.} = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma^c_{adm.} = 80 \text{ MPa}$$

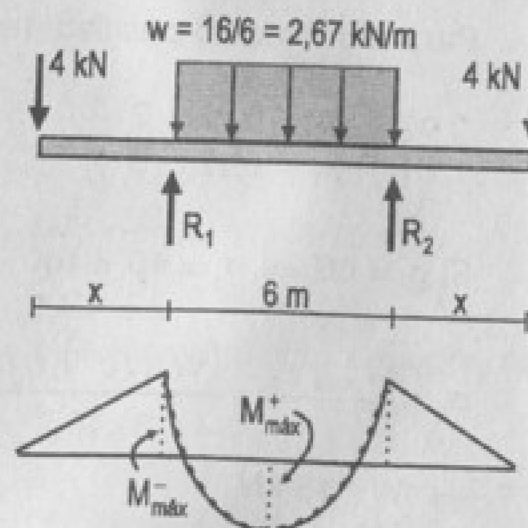
$$x = ?$$

$$M^-_{máx.} = 4x$$

$$M^+_{máx.} = \frac{1}{8} wL^2 - M^-_{máx.}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{16}{6}\right)(6)^2 - 4x$$

$$M^+_{máx.} = 12 - 4x$$



I. Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior. Además:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} \leq \frac{y_c}{y_t} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4$$

Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 8 < 80$ ...Sí

Si $\sigma_c = 80 \Rightarrow \sigma_t = 200 > 20$ ...No

$$\Rightarrow \sigma_c = \frac{M^+_{máx.} y_c}{I} = \frac{(12 - 4x) \times 10^3 (0{,}08)}{4 \times 10^{-5}} \leq 8 \times 10^6 \quad \Rightarrow x \geq 2 \text{ m}$$

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior:

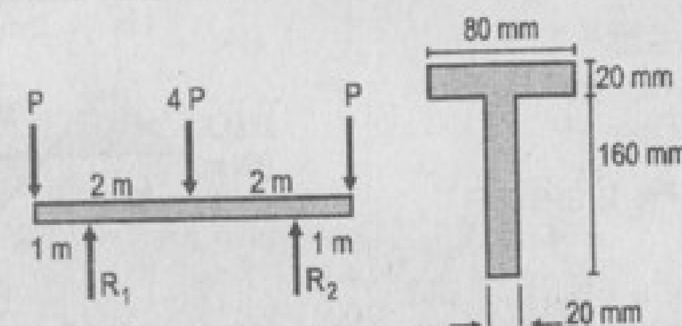
$$\text{Además:} \quad \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4$$

Si: $\sigma_t = 20$

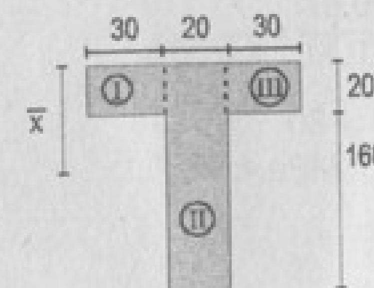
$\sigma_c = 50 < 80$

$$\sigma_t = \frac{M^-_{máx.} y_t}{I} = \frac{(4x) \times 10^3 (0{,}08)}{4 \times 10^{-5}} \leq 20 \times 10^6 \Rightarrow x \leq 2{,}5 \quad \therefore \quad \boxed{x = 2{,}0 \text{ m a } 2{,}5 \text{ m}}$$

556. Una viga de sección en T soporta las tres fuerzas concentradas que se indican en la figura. Comprobar que la línea neutra está a 70 mm de la parte inferior de la sección y que I = 15,52 × 10⁶ mm⁴. Con estos datos, determinar el valor máximo de P de manera que los esfuerzos sean $\sigma_t \leq 30$ MPa y $\sigma_c \leq 70$ MPa.



Resolución:



I. Primero comprobaremos que:

$\bar{x} = 70$ mm; $I = 15{,}52 \times 10^6$ mm⁴

Hacemos el siguiente cuadro:

Porción	Área	$\bar{x}_i$	$A_i\bar{x}_i$	$I_{C.G.}$	$A_i(x_i-\bar{x})^2$	Steiner $I_{C.G.}+A_i(x_i-\bar{x})^2$
I	600	10	6000	20 000	2 160 000	$2,18\times10^6$
II	3600	90	324 000	9 720 000	1 440 000	$11,16\times10^6$
III	600	10	6000	20 000	2 160 000	$2,18\times10^6$
	4800		336 000			$15,52\times10^6\,mm^3$

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{336\,000}{4800}=70\text{ mm}$$

$$\therefore\ I=15,52\times10^6\ mm^3$$

NOTA: En el enunciado menciona que la línea neutra está a 70 mm de la parte inferior, debería decir, de la parte superior, esto se puede corroborar por la presencia de las alas en la parte superior.

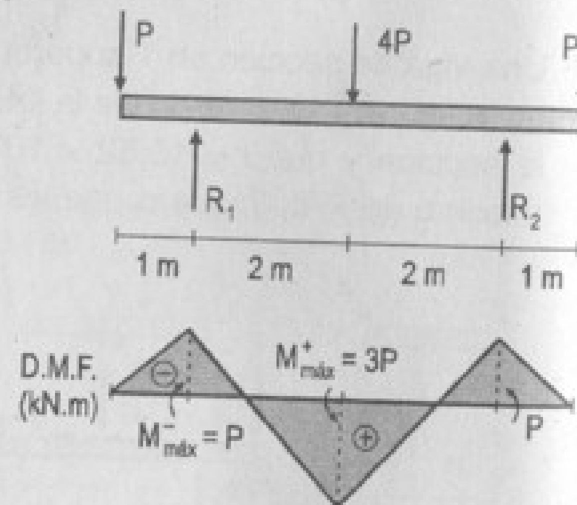
II. Dibujamos el D.M.F.

para obtener el $M^+_{máx.}$ y $M^-_{máx}$:
Calculamos R_1 y R_2:

$$R_1=R_2=\frac{6P}{2}=3P$$

$$M^-_{máx.}=-(1)(P)=-P$$

$$M^+_{máx.}=-(3)P+2(3P)=3P$$



III. Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior.

Además: $\dfrac{\sigma_c}{\sigma_t}=\dfrac{y_c}{y_t}=\dfrac{0,07}{0,11}=\dfrac{7}{11}$

Si $\sigma_c=70 \Rightarrow \sigma_t=110>30$ ...No
Si $\sigma_t=30 \Rightarrow \sigma_c=19,1$ MPa <70 ...Sí

Luego:

$$\sigma_c=\frac{M^+_{máx}y_c}{I}=\frac{(3P\times10^3)(0,07)}{1,552\times10^{-5}}\le19,1\times10^6 \Rightarrow P\le1,41\text{ kN}$$

IV. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior.

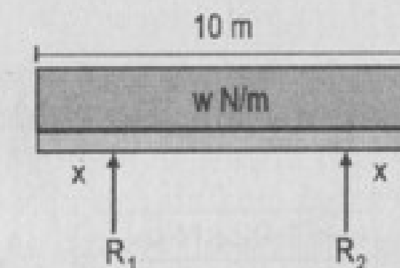
Además: $\dfrac{\sigma_t}{\sigma_c}=\dfrac{y_t}{y_c}=\dfrac{0,07}{0,11}=\dfrac{7}{11}$

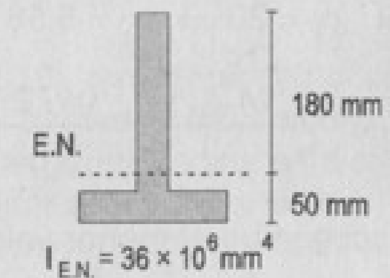
Si $\sigma_T=30 \Rightarrow \sigma_c=47,1$ MPa <70 ...Sí
Si $\sigma_c=70 \Rightarrow \sigma_t=44,5>30$ ...No

$$\therefore\ \sigma_T=\frac{M^-_{máx.}y_t}{I}=\frac{(P\times10^3)(0,07)}{1,552\times10^{-5}}\le30\times10^6$$

$\Rightarrow P\le6,65$ kN $\quad\therefore\ \boxed{P=1,41\text{ kN}}$

557. Una viga de fundición de 10 m de longitud está apoyada como indica la figura y soporta una carga uniformemente repartida de w N/m incluido su propio peso. Los esfuerzos admisibles son $\sigma_t\le20$ MN/m² y $\sigma_c\le80$ MN/m². Determinar el máximo valor de w si x = 1 m.





Resolución:

Dibujamos el D.M.F. para obtener $M^+_{máx}$ y $M^-_{máx}$.

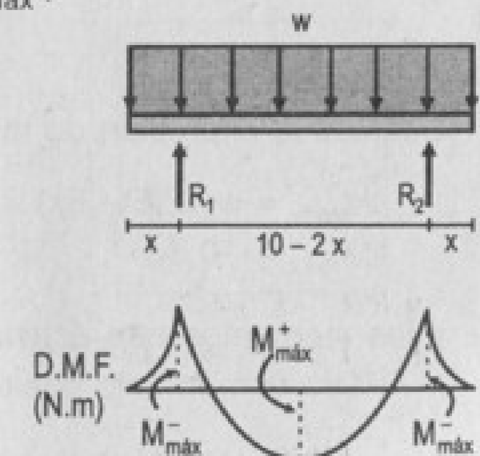
$$M^-_{máx.}=-w\frac{x^2}{2}=-\frac{wx^2}{2}$$

Para x = 1 $\Rightarrow M^-_{máx}=-\dfrac{w}{2}$

$$M^+_{máx.}=\frac{wL^2}{8}-M^-_{máx.}$$

$$M^+_{máx.}=\frac{w(10-2x)^2}{8}-\frac{wx^2}{2}$$

$$M^+_{máx.}=w(12,5-5x)$$



Para x = 1 $\Rightarrow$ $M^+_{máx.}=7,5w$

I. Para el momento positivo, hay compresión en la fibra superior y tracción en la inferior.

Además: $\frac{\sigma_c}{\sigma_t}=\frac{y_c}{y_t}=\frac{0,18}{0,05}=3,6$

Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 72 < 80$ ...Sí

Si $\sigma_c = 80 \Rightarrow \sigma_t = 22,2 > 20$ ...No

$$\sigma_c = \frac{M^+_{máx}.y_c}{I} = \frac{(7,5w)(0,18)}{3,6\times10^{-5}} \leq 72\times10^6 \Rightarrow w \leq 1920 \text{ N/m}$$

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la parte superior y compresión en la inferior.

Además: $\frac{\sigma_t}{\sigma_c}=\frac{y_t}{y_c}=\frac{0,18}{0,05}=3,6$

Verificamos esfuerzos:

Si $\sigma_c = 80 \Rightarrow \sigma_t = 288 > 30$ ...No

Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 5,56 < 70$ ...Sí

$$\therefore \quad \sigma_t = \frac{M^-_{máx}.y_t}{I} = \frac{(w/2)(0,18)}{3,6\times10^{-5}} \leq 20\times10^6 \Rightarrow w \leq 8000 \text{ N/m}$$

Escogemos el menor valor: ∴ $\boxed{w = 1,92 \text{ kN/m}}$

558. En el problema anterior, determinar los valores de x y w, de manera que esta última sea máxima.

Resolución:

Usamos la expresión de momentos determinados en el problema anterior:

$M^+_{máx.} = w(12,5 - 5x)$

$M^-_{máx.} = -0,5wx^2$

y los momentos que ocasionan los esfuerzos máximos:

I. Para el momento positivo tenemos: Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 72$

Luego: $\sigma_c = \frac{M^+_{máx}.y_c}{I} = \frac{M^+_{máx.}(0,18)}{3,6\times10^{-5}} \leq 72\times10^6 \Rightarrow M^+_{máx.} \leq 14\,400$

II. Para el momento negativo tenemos: $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 5,56$

$$\sigma_t = \frac{M^-_{máx}.y_t}{I} = \frac{M^-_{máx.}(0,18)}{3,6\times10^{-5}} \leq 20\times10^6 \Rightarrow M^-_{máx} \leq 4000$$

Igualamos momentos:

$M^+_{máx} = w(12,5 - 5x) = 14\,400$ ...(I)

$M^-_{máx} = 0,5wx^2 = 4000$ ...(II)

De (I) y (II) tenemos: $x^2 + \frac{25}{9}x - \frac{125}{18} = 0$, cuyas raíces son:

$x_1 = 1,59 \Rightarrow x_2 = -4,37$

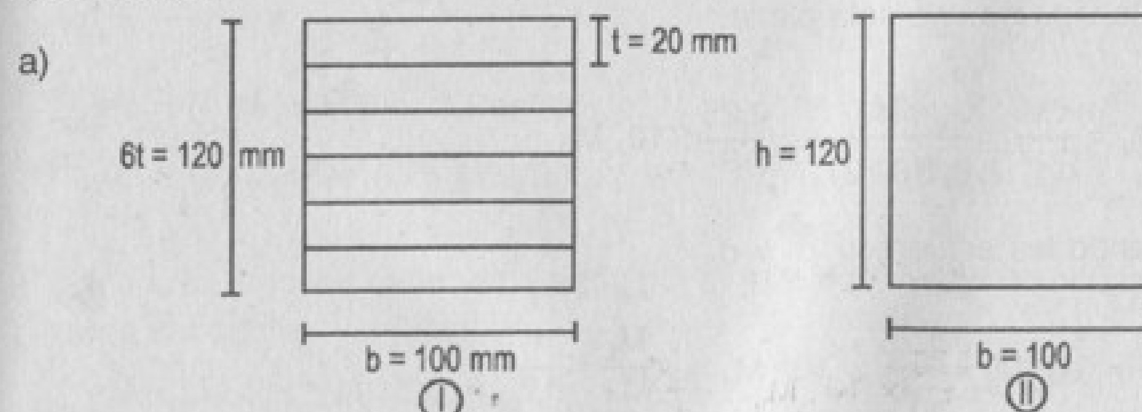
Tomamos el positivo x = 1,59 m

Reemplazando en (I): $w = \frac{14\,400}{12,5-5(1,59)} \Rightarrow \boxed{w = 3164 \text{ N/m} \equiv 3,16 \text{ kN/m}}$

559. Una viga está formada por seis planchas de 100 mm de ancho por 20 mm de espesor, colocadas libremente una sobre otra, formando un conjunto de 100 mm de ancho por 120 mm de altura. (a) Comparar la resistencia de dicho conjunto con la de una viga de una sola pieza y de las mismas dimensiones. (b) Calcular la relación de resistencias si la viga estuviera formada por doce planchas de 100 mm de ancho por 10 mm de espesor.

Resolución:

a)



La resistencia de cada lámina independiente es:

$$\sigma_I = \frac{6M}{bt^2} = \frac{6(M_I/6)}{0,1(0,02)^2} = 2,5\times10^4 M_I$$

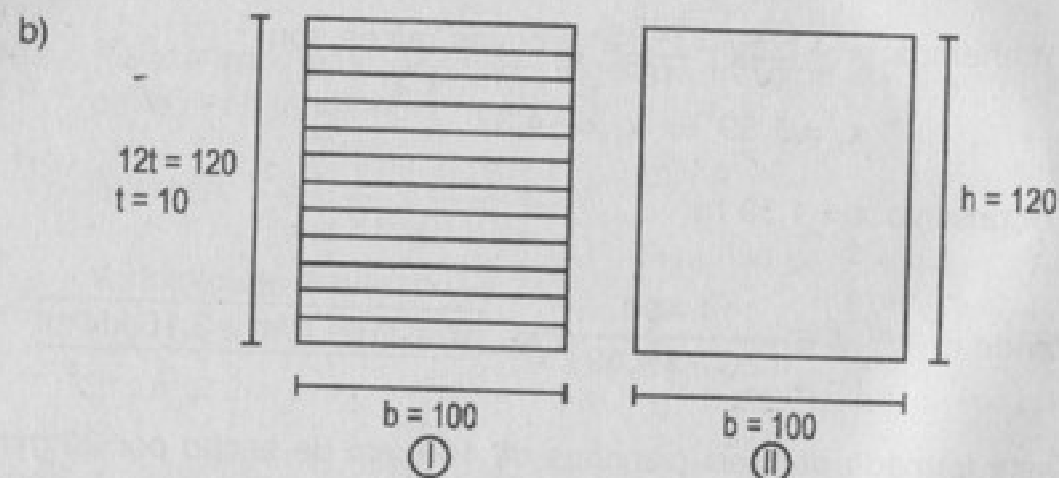
La resistencia de la viga completa:

$$\sigma_{II}=\frac{6M}{bh^2}=\frac{6M}{0,1(0,12)^2}=\frac{1,25}{3}\times10^4M_{II}$$

$$\sigma_I=\sigma_{II}\Rightarrow 2,5\times10^4M_I=\frac{1,25}{3}\times10^4M_{II}$$

$$\frac{M_I}{M_{II}}=\frac{1}{6}\quad\therefore\quad\boxed{\text{La relación es de 1 a 6.}}$$

b)



Analizando para cada lámina:

$$\sigma_I=\frac{6M}{bt^2}=\frac{6(M_I/12)}{0,1(0,01)^2}=5\times10^4M_I$$

Para la viga de una sola pieza.

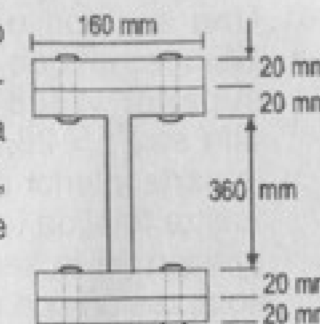
$$\sigma_{II}=\frac{6M}{bh^2}=\frac{6M_{II}}{0,1(0,12)^2}=\frac{1,25}{3}\times10^4M_{II}$$

Igualando los esfuerzos: $\sigma_I=\sigma_{II}$

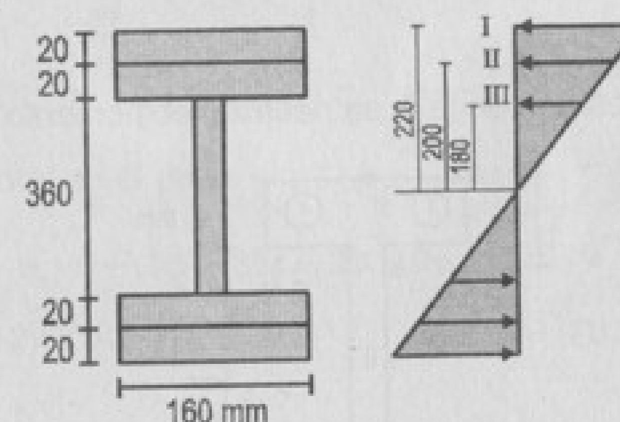
$$5\times10^4\,M_I=\frac{1,25}{3}\times10^4\,M_{II}\Rightarrow\frac{M_I}{M_{II}}=\frac{1}{12}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{La relación es de 1 a 12}}$.

560. La viga de sección I de la figura, se refuerza remachando dos placas de 160 × 20 mm a los patines superior e inferior. Si el esfuerzo máximo es de 110 MPa, calcular la fuerza total de compresión o tensión (a) en cada refuerzo, y (b) en cada patín. Despreciar el efecto de debilitación de los orificios de los remaches.



Resolución:
Hacemos un esquema de esfuerzos:



Calculamos los esfuerzos en (I), (II) y (III):

$$\sigma_I=110\text{ MPa};\ \sigma_{II}=\frac{200}{220}\sigma_I=100\text{ MPa};\ \sigma_{III}=\frac{180}{220}\sigma_I=90\text{ MPa}$$

a) La fuerza total en cada refuerzo está dada por el esfuerzo medio por el área:

$$\sigma_M=\frac{\sigma_I+\sigma_{II}}{2}=\frac{110+100}{2}=105\text{ MPa}$$

Área = (0,16) (0,02) = $3,2\times10^{-3}$ m³

$T_R=(\sigma_M)(\text{Área})=105\times10^6\,(3,2\times10^{-3})\quad\therefore\quad\boxed{T_R=336\text{ kN}=C_R}$

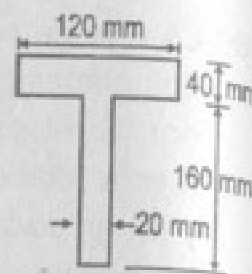
b) La fuerza en cada patín, está dada por el esfuerzo medio en el patín por el área del patín:

$$\sigma_M=\frac{\sigma_{II}+\sigma_{III}}{2}=\frac{100+90}{2}=95\text{ MPa}$$

Área = (0,16)(0,02) = $3,2\times10^{-3}$ m³

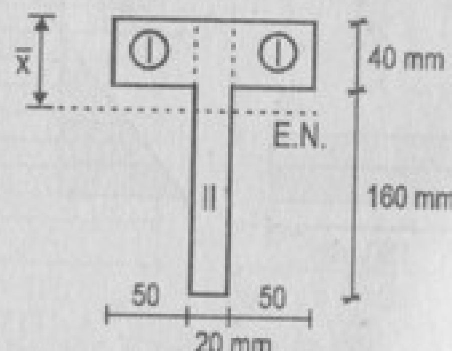
$T_P=(\sigma_M)(\text{Área})=(95\times10^6)\,(3,2\times10^{-3})\quad\therefore\quad\boxed{T_P=304\text{ kN}=C_P}$

561. Una sección en T tiene las dimensiones de la figura. Demostrar que la línea neutra está a 60 mm del borde superior y que el momento de inercia con respecto a ella es $I_{LN} = 26,67 \times 10^6$ mm⁴. Si el esfuerzo de tensión en la parte inferior del patín es de 10 MN/m², determinar: (a) la fuerza total de tensión en el patín. (b) la fuerza total de compresión en la sección. (c) el momento de la fuerza total de compresión con respecto al E.N. (d) el momento de la fuerza total de tensión respecto del E.N. (e) comparar la suma de (c) y (d) con el momento total aplicado según se deduce de la fórmula de la flexión.



Resolución:

Para demostrar la posición de la línea neutra y el momento de inercia, hacemos:



Partimos la sección en porciones:

Además para un rectángulo de base b y altura h:

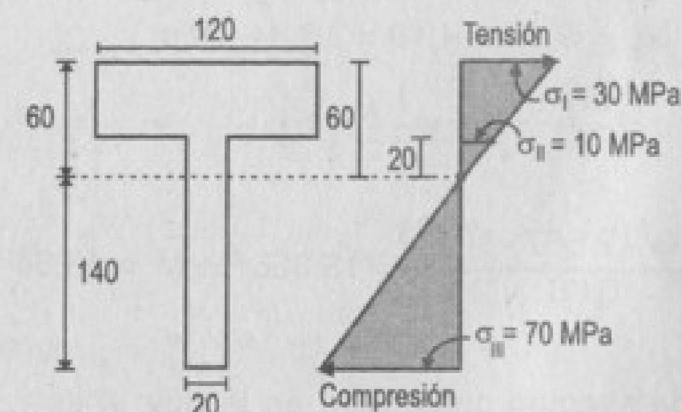
$$I = \frac{1}{12} bh^3$$

Luego aplicaremos Steiner:

Porción	A_i	$\bar{x}_i$	$A_i \bar{x}_i$	I_i	$A_i (\bar{x} - \bar{x})^2$
I	4000	20	8×10^4	$16/3 \times 10$	64×10^5
II	4000	100	40×10^4	$400/3 \times 10$	64×10^5
	8000		48×10^4	$416/3 \times 10$	128×10^5

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A_i \bar{x}_i}{\Sigma A_i} = \frac{48 \times 10^4}{8 \times 10^3} = 60 \text{ mm} \quad \text{...Sí}$$

$$I = \Sigma I_i + A_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 26,67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



Sabemos que:

$$\sigma_{II} = 10 \text{ MPa}; \quad \sigma_I = \frac{60}{20}(10) = 30; \; \sigma_{III} = \frac{140}{20}(10) = 70$$

a) La fuerza total en el patín es: $T_P = \sigma_M$ (Área)

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}) = \frac{1}{2}(10 + 30) = 20 \text{ MPa}$$

Área = (0,12)(0,04) = $4,8 \times 10^{-3}$ ⇒ $T_P = (20 \times 10^6)(4,8 \times 10^{-3}) = 96$ kN

∴ $\boxed{T_P = 96 \text{ kN}}$

b) La fuerza total de compresión es: $C = \sigma_M$ Área

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(0 + \sigma_{III}) = \frac{\sigma_{III}}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ MPa}$$

Área = (0,02)(0,14) = $2,8 \times 10^{-3}$ ⇒ $C = (35 \times 10^6)(2,8 \times 10^{-3}) = 98$ kN

∴ $\boxed{C = 98 \text{ kN}}$

c) El momento de la fuerza de compresión está dado por:

$$M_C = C\left(\frac{2}{3} y_c\right) = 98\left(\frac{2}{3}\right)(0,14) \quad \therefore \boxed{M_C = 9,15 \text{ kN.m}}$$

d) El momento de la fuerza total de tensión está dado por:

$M_T = M_1 + M_2 + M_3$

$M_1 = T_1 d_1 = (\sigma_{II}/2)(0,02)(0,02)\frac{2}{3}(0,02)$

$M_1 = 80/3$ N.m

$M_2 = T_2 d_2 = (\sigma_{II})(0,12)(0,04)(0,02 + 0,02)$

$M_2 = 1920$ N.m

$M_3 = T_3 d_3 = [(\sigma_I - \sigma_{II})/2](0,12)(0,04)\left[0,02 + \frac{2}{3}(0,04)\right]$

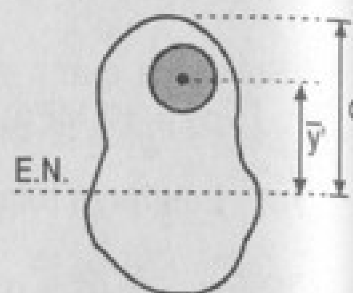
$M_3 = 2240$ N.m ∴ $\boxed{M_T = 4,19 \text{ kN.m}}$

e) $M = M_T + M_C = 9{,}15 + 4{,}19 = 13{,}34$ kN.m

Además: $\sigma = \dfrac{My}{I} \Rightarrow M = \sigma\dfrac{I}{y}$

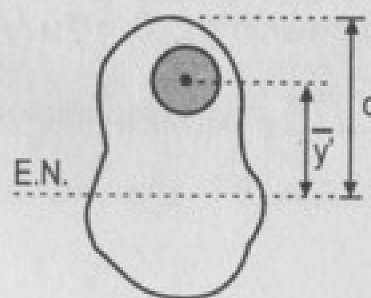
$$M = \frac{30\times10^6\left(2{,}667\times10^{-5}\right)}{0{,}06} = 13\ 335 \Rightarrow M = 13{,}34 \text{ kN.m}$$

562.En una viga de sección cualquiera en la que el esfuerzo máximo es σ, demostrar que la fuerza total sobre un elemento de área A', como el sombreado en la figura, viene dada por $F = (\sigma/c)A'\bar{y}'$, siendo $\bar{y}'$ la ordenada del centro de gravedad del área sombreada. Demostrar también que el momento de esta fuerza con respecto al E.N. es $M' = (\sigma/cI')$, en donde I' es el momento de inercia del área A' con respecto a la línea o eje neutro.



Resolución:

Tenemos lo siguiente:



Demostrar que:

$F = (\sigma/c)A'\bar{y}'$ ...(I)

$M' = \dfrac{\sigma}{c}I'$ ...(II)

Para (I)

Sabemos que: $\int_A dF = \int_{A'} \sigma' dA \Rightarrow F = \int_{A'} \sigma' dA$

Además: $\dfrac{\sigma'}{\sigma} = \dfrac{y'}{c} \Rightarrow \sigma' = \sigma\dfrac{y'}{c} = \dfrac{\sigma}{c}y'$

$\Rightarrow F = \int_{A'}\left(\dfrac{\sigma}{c}y'\right)d_A = (\sigma/c)\int_{A'} y' dA$

$F = (\sigma/c)\,\bar{y}'A'$ ...Sí

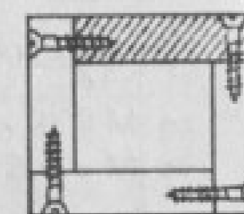
Para (II)

Sabemos que $dM = y'dF = y'\sigma'dA = y'\dfrac{\sigma}{c}y'dA$

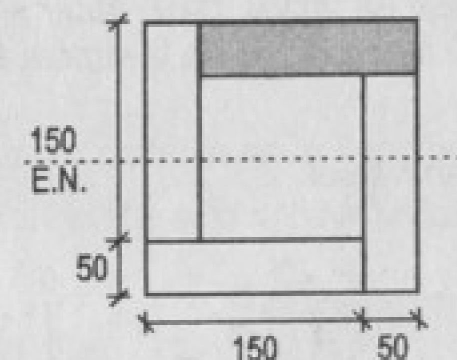
$$\int_{M'} dM = \int_A (\sigma/c)(y')^2 dA = \frac{\sigma}{c}\int_{A'}(y')^2 dA$$

$$M' = \frac{\sigma}{c}I', \quad \text{donde } I' = \int_{A'}(y')^2 dA$$

563.Una viga de tipo caja está formada por cuatro tablas de 50 × 150 mm de sección, atornilladas firmemente entre sí como indica la figura. Si el máximo esfuerzo normal que se produce es de 8 MPa, determinar la fuerza total que actúa sobre la porción rayada de la sección y el momento de esta fuerza respecto del E.N. *Indicación*: Emplear los resultados del problema anterior.



Resolución:



Aplicamos las ecuaciones anteriores:

$F = (8 \times 10^6/0{,}1)\ (7{,}5 \times 10^{-3})\ (0{,}075) = 45\ 000$

$\boxed{F = 45 \text{ kN}}$

Además

$I' = \dfrac{1}{12}(0{,}15)(0{,}05)^3 + 7{,}5 \times 10^{-3}\ (0{,}075)^2$

$I' = 43{,}75 \times 10^{-6}$ m^4

$M = (8 \times 10^6/0{,}1)(43{,}75 \times 10^{-6}) = 3500$ N.m

$\boxed{M = 3{,}5 \text{ kN.m}}$

564. Repetir el problema anterior, usando una de las tablas verticales, en lugar de la rayada.

Resolución:

Aplicamos de manera similar:

$\sigma = 8$ MPa ; $c = 0{,}1$ m ; $A' = 7{,}5 \times 10^{-3}$

$\overline{y}' = 25$ mm $= 0{,}025$ m

$\Rightarrow F = (8 \times 10^6/0{,}1)(7{,}5 \times 10^{-3})(0{,}025) = 15\,000$ N

$\Rightarrow F = 15$ kN

$I' = \frac{1}{12}(0{,}05)(0{,}15)^3 + 7{,}5 \times 10^{-3}(0{,}025)^2 = 18{,}75 \times 10^{-6}$

$\Rightarrow M = (8 \times 10^6/0{,}1)(18{,}75 \times 10^{-6}) = 1500$ N.m

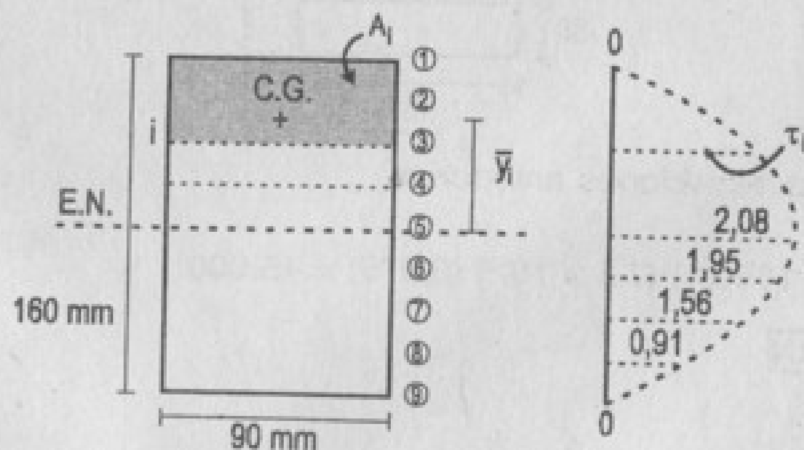
$\Rightarrow M = 1{,}5$ kN.m

565 y 566. Problemas ilustrativos

567. Una viga de madera de 90 mm de ancho y 160 mm de altura está sometida a una fuerza cortante vertical de 20 kN. Determinar el esfuerzo cortante en puntos tomados de 20 en 20 mm a lo alto de la viga, a partir de su borde superior.

Resolución:

Dibujamos la sección transversal



Datos: V = 20 kN

Para calcular el esfuerzo cortante en cada nivel, tenemos:

$$\tau_i = \frac{V}{Ib}Q_i = \frac{V}{Ib}(A'_i)(\overline{y}_i)$$

Donde: V: fuerza cortante en la sección

$I = \frac{1}{12}bh^3$: momento de inercia

b: ancho de la sección en la zona donde se evalúa el esfuerzo

A_i área que está por encima o debajo del nivel donde se evalúa el esfuerzo

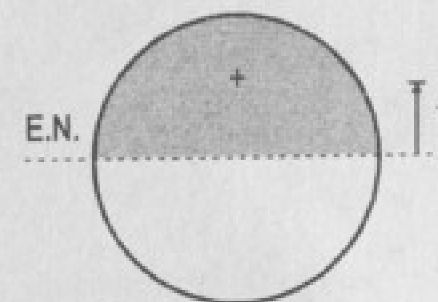
y_i: posición de C.G. del área (A_i) con respecto al E.N.

Nivel	V(N)	I(m^4)	b(m)	A_i(m^2)	y_i(m)	τ_i(MPa)
1	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	0	0,08	0
2	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	$1{,}8 \times 10^{-3}$	0,07	0,91
3	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	3,6	0,06	1,56
4	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	5,4	0,05	1,95
5	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	7,2	0,04	2,08
6	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	9,0	0,03	1,95
7	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	10,8	0,02	1,56
8	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	12,6	0,01	0,91
9	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	14,4	0	0

568. Demostrar que el esfuerzo cortante en la línea neutra de una sección circular es $\tau = \frac{4}{3}(V/\pi r^2)$, suponiendo que se distribuye uniformemente en toda su longitud.

Resolución:

Sabemos que: $\tau = \frac{V}{Ib}A'\,\overline{y}$



$I = \frac{\pi r^4}{4}$

$\overline{y} = \frac{4r}{3\pi}$

$b = 2r$

$A' = \pi r^2/2$

Reemplazando:

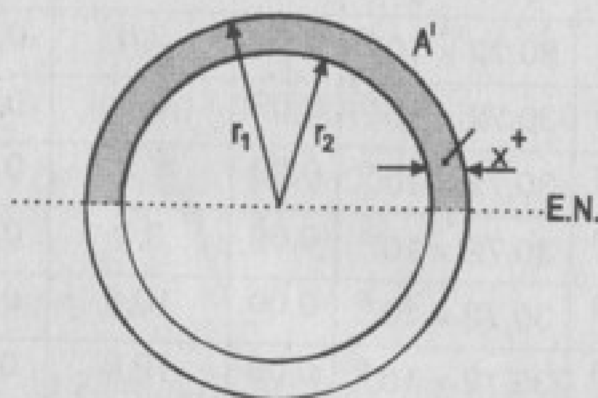
$$\tau = \frac{V}{\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)(2r)}\left(\frac{\pi}{2}r^2\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{4V}{3\pi r^2} \quad \therefore \quad \boxed{\tau = \frac{4}{3}\left(\frac{V}{\pi r^2}\right)}$$

569. Demostrar que el esfuerzo cortante máximo en una viga de sección tubular de paredes delgadas y de sección A es $\tau = 2V/A$.

Resolución:

Para una sección tubular tenemos:

$$\tau = \frac{V}{Ib}A'\bar{y}$$



El esfuerzo cortante máximo estará en E.N.
Tenemos los siguientes valores:

$$I = \frac{\pi}{4}\left(r_1^4 - r_2^4\right)$$

$$A' = \frac{\pi}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

$$b = 2\,(r_1 - r_2)$$

$$\bar{y} = \frac{4}{3\pi}\frac{\left(r_1^3 - r_2^3\right)}{\left(r_1^2 - r_2^2\right)}$$

$$A = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

Como $\tau = \dfrac{A'\bar{y}V}{Ib}$

Así: $$\tau = \frac{\frac{\pi}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right)\left(\frac{4}{3\pi}\frac{\left(r_1^3 - r_2^3\right)}{r_1^2 - r_2^2}\right)V}{\frac{\pi}{4}\left(r_1^4 - r_2^4\right)\left(2(r_1 - r_2)\right)}$$

Simplificando:

$$\tau = \frac{4}{3\pi}\frac{\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}{\left(r_1^2 - r_2^2\right)\left(r_1^2 + r_2^2\right)}V$$

Como $t = r_1 - r_2$, tenemos

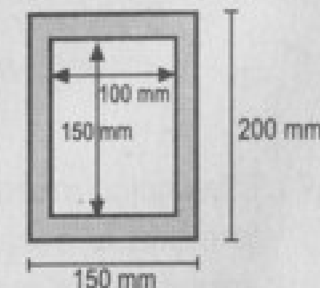
$$\tau = \frac{4}{3A}\frac{\left(3r_1^2 - 3r_1 t + t^2\right)}{\left(2r_1^2 - 2r_1 t + t^2\right)}V$$

además t es pequeño, podemos afirmar que $t^2 = 0$

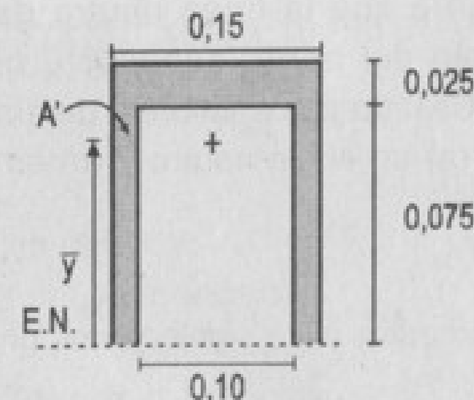
$$\tau = \frac{4}{3A}\frac{\left(3r_1^2 - 3r_1 t\right)}{\left(2r_1^2 - 2r_1 t\right)}V$$

$$\boxed{\tau = \frac{2V}{A}}$$

570. Una viga simplemente apoyada de 4 m de claro tiene la sección indicada en la figura. Determinar la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo lo largo de la viga, si el esfuerzo está limitado a 1,2 MPa.



Resolución:



Para una viga simplemente apoyada:

$V = wL/2 = 2w$ N

Además $\tau = \dfrac{V}{Ib}Q$

Donde:

$$I = \frac{1}{12}(0{,}15 \times 0{,}2^3 - 0{,}1 \times 0{,}15^3) = 71{,}875 \times 10^{-6}$$

$$b = 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}05 \text{ m}$$

Para calcular Q:

$$Q = A'\bar{y}$$

$$A' = (0{,}15)(0{,}1) - (0{,}1)(0{,}075)$$

$$A' = 7{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

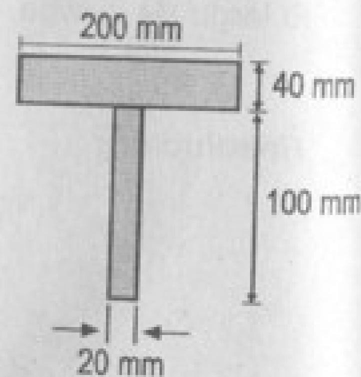
$$\bar{y} = \frac{(0{,}15)(0{,}1)(0{,}05) - (0{,}1)(0{,}075)(0{,}0375)}{7{,}5 \times 10^{-3}}; \ \bar{y} = 0{,}0625$$

$$Q = (7{,}5 \times 10^{-3})(0{,}0625) = 468{,}75 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\therefore \quad \tau_{máx} = \frac{2w}{(71{,}875 \times 10^{-6})(0{,}05)}(468{,}75 \times 10^{-6}) \leq 1{,}2 \times 10^6$$

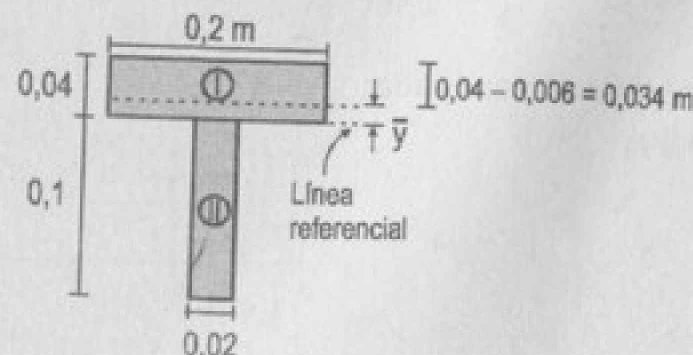
$$\Rightarrow \quad w \leq 4600 \text{ N/m} \quad \therefore \quad \boxed{w = 4{,}6 \text{ kN/m}}$$

571. La sección mostrada en la figura, corresponde a una viga formada al ensamblar dos piezas rectangulares de madera. La viga está sometida a una fuerza cortante máxima de 60 kN. Demuestre que la línea neutra está localizada 34 mm abajo del borde superior y que $I_{E.N.} = 10{,}57 \times 10^6$ mm^4. Usando estos valores, determine el esfuerzo cortante (a) en el eje neutro y (b) en la unión entre las dos piezas.



Resolución:

Para determinar la línea neutra y $I_{E.N.}$, colocamos una referencia en la unión.



$$\therefore \quad \bar{y} = 0{,}006 \text{ m}$$

$$I = 10{,}57 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Zona	Area	$\bar{y}_i$	$(A_i)(\bar{y}_i)$	I_i	$A(\bar{y}_i - \bar{y})^2$
I	8×10^{-3}	0,02	$1{,}6 \times 10^{-4}$	$1{,}067 \times 10^{-6}$	$1{,}568 \times 10^{-6}$
II	2×10^{-3}	−0,05	-1×10^{-4}	$1{,}667 \times 10^{-6}$	$6{,}272 \times 10^{-6}$
	10×10^{-3}		$0{,}6 \times 10^{-4}$	$2{,}734 \times 10^{-6}$	$7{,}84 \times 10^{-6}$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(A)(\bar{y})}{\Sigma(A)} = \frac{0{,}6 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-3}} = 0{,}006 \text{ m}$$

$$I = \Sigma I_i + \Sigma A_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$I = 10{,}574 \times 10^{-6}$$

a) Calculamos el esfuerzo en el eje neutro $\tau = \frac{V}{Ib}Q$

Tenemos:

$$b = 0{,}2 \text{ m}$$

$$Q = A'\bar{y}'$$

$$A' = (0{,}2)(0{,}034) = 6{,}8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\bar{y}' = 0{,}034/2 = 0{,}017 \text{ m}$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{60 \times 10^3}{(10{,}57 \times 10^{-6})(0{,}2)}(6{,}8 \times 10^{-3})(0{,}017) = 3{,}28$$

$$\boxed{\tau = 3{,}28 \text{ MPa}}$$

b) Para el esfuerzo en la unión:

b = 0,2 m ó 0,02 m (justo debajo)

$$A' = (0{,}2)(0{,}04) = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

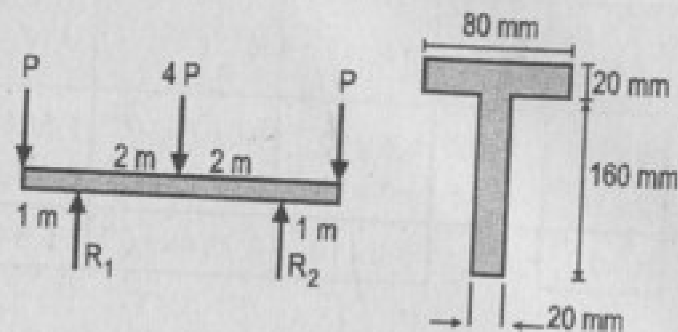
$$\bar{y}' = 0{,}04/2 - 0{,}006 = 0{,}014 \text{ m}$$

$$\tau = \frac{60 \times 10^3}{(10{,}57 \times 10^{-6})(0{,}2)}(8 \times 10^{-3})(0{,}014) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 3{,}18 \text{ MPa}}$$

Para b = 0,02 $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = 31{,}8 \text{ MPa}}$

$$A' = (0{,}2)(0{,}04) = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

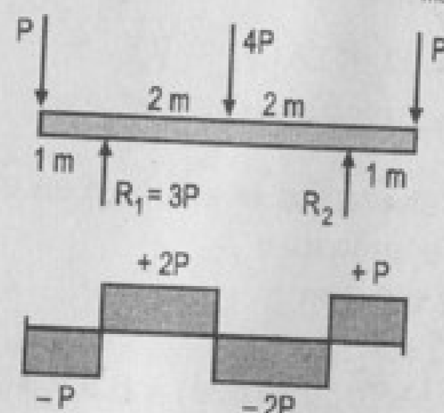
572. En la figura, si P = 5 kN calcular el esfuerzo cortante en puntos a distancias de 20 en 20 mm desde el borde superior de la sección de máxima V. La línea neutra está a 70 mm del borde superior e $I_{LN} = 15,52 \times 10^6$ mm⁴.



Resolución:

Del esquema de cargas determinamos el D.F.C. para obtener el $V_{máx.}$

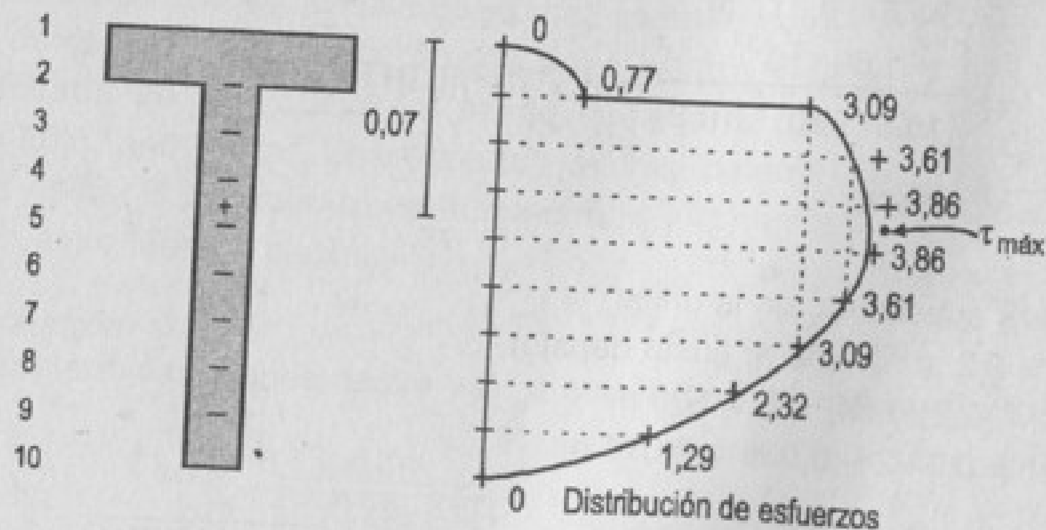
$I = 15,52 \times 10^6$ mm⁴



Obtenemos:

$V_{máx.} = 2P$
$= 10$ kN

Luego: $\tau = \frac{V}{Ib}\bar{y}'A'$



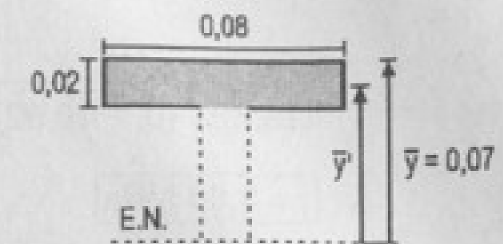
Para el nivel (1) (superior):

$A' = 0$

$\bar{y}' = 0,07 \qquad \tau = 0$

$b = 0,08$ ó $b^* = 0,02$

Para el nivel (2):



$A' = 0,08\ (0,02) = 1,6 \times 10^{-3}$ m²

$\bar{y}' = 0,07 - 0,02/2 = 0,06$ m

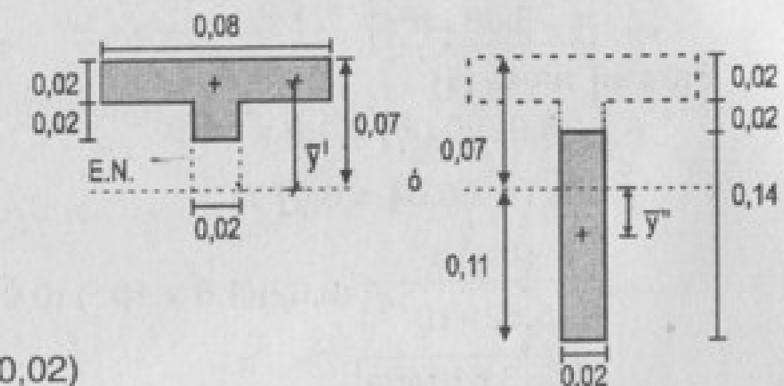
$b = 0,08$

$$\tau_1 = \frac{10\times10^3}{(15,52\times10^{-6})(0,08)}(1,6\times10^{-3})(0,06) = \boxed{0,77\text{ MPa}}$$

$$\tau_1' = \frac{10\times10^3}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(1,6\times10^{-3})(0,06) = \boxed{3,09\text{ MPa}}$$

Para el nivel (3):

$b = 0,02$ m



$A'' = (0,02)(0,14)$

$\Rightarrow A'' = 2,8 \times 10^{-3}$

$\bar{y}'' = 0,11 - 0,07$

$\Rightarrow \bar{y}'' = 0,04$

$A' = (0,08)(0,02) + (0,02)(0,02)$

$\Rightarrow A' = 2,0 \times 10^{-3}$ m²

$$\bar{y}' = \frac{1}{2,0\times10^{-3}}(0,08\times0,02\times0,06 + 0,02\times0,02\times0,04) = 0,056$$

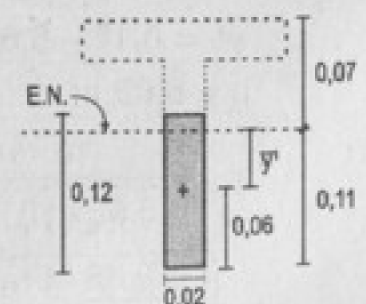
$$\therefore\ \tau = \frac{V}{Ib}A'\bar{y}' = \frac{V}{Ib}A''\bar{y}''$$

$$\tau' = \frac{10\times10^3}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(2,0\times10^{-3})\ (0,056) = \boxed{3,61\text{ MPa}}$$

$$\tau'' = \frac{10\times10^3}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(2,8\times10^{-3})\ (0,04) = \boxed{3,61\text{ MPa}}$$

NOTA: El resultado es el mismo si tomamos el área por encima o debajo del nivel de análisis.

Para los siguientes niveles conviene tomar las áreas que están por debajo.



Para el nivel (4):

$A' = (0,02)(0,12) = 2,4 \times 10^{-3}$ m²

$\bar{y}' = 0,11 - 0,06 = 0,05$

$b = 0,02$

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(2,4\times10^{-3})(0,05)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = 3,86 \text{ MPa}}$

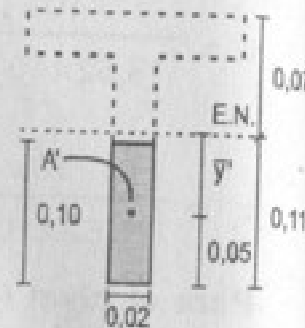
Para el nivel (5):

$A' = (0,02)(0,10) = 2,0\times10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = 0,11 - 0,05 = 0,06$ m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(2,0\times10^{-3})(0,06)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = 3,86 \text{ MPa}}$



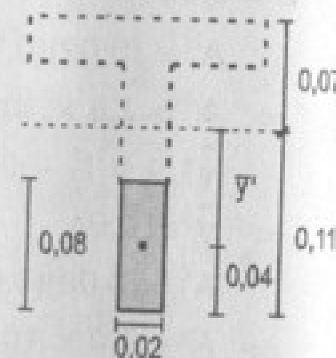
Para el nivel (6):

$A' = (0,02)(0,08) = 1,6\times10^{-3}$

$\bar{y}' = 0,11 - 0,04 = 0,07$ m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15,52\times10^{-6})}(0,02)(1,6\times10^{-3})(0,07)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = 3,61 \text{ MPa}}$



Para el nivel (7):

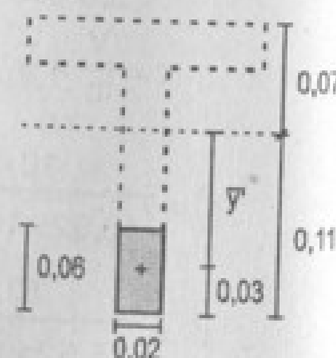
$A' = (0,02)(0,06) = 1,2\times10^{-3}$

$\bar{y}' = 0,11 - 0,03 = 0,08$ m

b = 0,02 m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(1,2\times10^{-3})(0,08)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = 3,09 \text{ MPa}}$



Para el nivel (8):

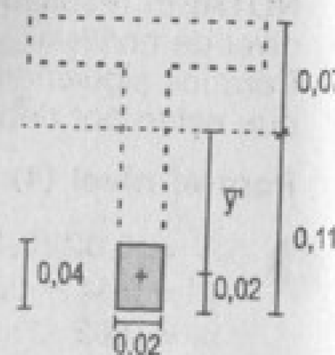
$A' = (0,02)(0,04) = 0,8\times10^{-3}$

$\bar{y}' = 0,11 - 0,02 = 0,09$ m

b = 0,02 m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(0,8\times10^{-3})(0,09)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = 2,32 \text{ MPa}}$



Para el nivel (9):

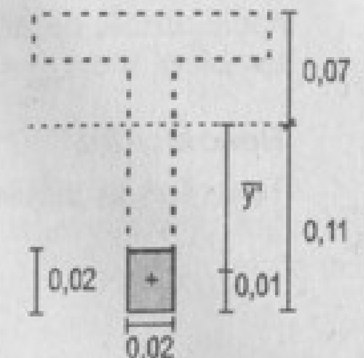
$A' = (0,02)(0,02) = 0,4\times10^{-3}$

$\bar{y}' = 0,11 - 0,01 = 0,10$ m

b = 0,02 m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(0,4\times10^{-3})(0,10)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = 1,29 \text{ MPa}}$



Para el nivel (10):

Tenemos A' = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = 0}$

Para calcular el esfuerzo máximo ubicado en la L. N., tomamos el área que está por debajo de ella

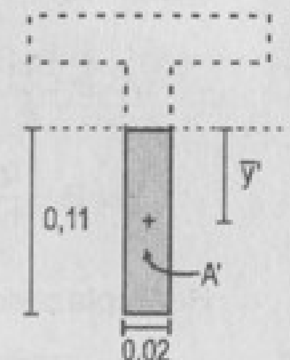
$A' = (0,02)(0,11) = 2,2\times10^{-3}$

$\bar{y}' = 0,11/2 = 0,055$ m

b = 0,02 m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15,52\times10^{-6})(0,02)}(2,2\times10^{-3})(0,055)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = 3,9 \text{ MPa} = \tau_{máx}}$



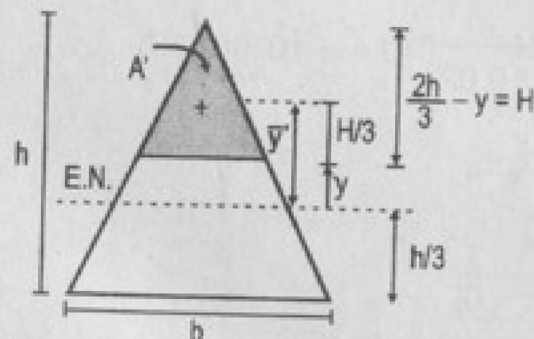
Cuadro Resumen:

NIVEL	$A'(\times10^{-3}m^2)$	$\bar{y}'$(m)	b(m)	τ(MPa)
1	0	–	0,08	0
2	1,6	0,06	0,08/0,02	0,77/3,09
3	2,8	0,04	0,02	3,61
4	2,4	0,05	0,02	3,86
5	2,0	0,06	0,02	3,86
6	1,6	0,07	0,02	3,61
7	1,2	0,08	0,02	3,09
8	0,8	0,09	0,02	2,32
9	0,4	0,10	0,02	1,29
10	0	–	0,02	0

573. La sección recta de una viga de madera es un triángulo isósceles, con el vértice hacia arriba, de altura h y base b. Si V es el esfuerzo cortante vertical, demostrar también que $\tau_{max} = 3V/bh$ y que tiene lugar en el punto medio de la altura.

Resolución:

Tenemos la siguiente sección:



Sabemos: $\tau = \frac{V}{It} A'\bar{y}$

$$A' = \frac{BH}{2} = \frac{b}{2h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)^2; \quad B = \frac{b}{h}H; \quad \bar{y}' = y + \frac{H}{3} = y + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)$$

$$t = B = \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right); \quad I = \frac{bh^3}{36}; \quad A' = \frac{1}{2}\frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)^2$$

Reemplazando:

$$\tau = \frac{V}{\frac{bh^3}{36}\left(\frac{b}{h}\right)\left(\frac{2h}{3} - y\right)}\left(\frac{b}{2h}\right)\left(\frac{2h}{3} - y\right)^2\left[y + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)\right]$$

$$\tau = \frac{18V}{bh^3}\left[y\left(\frac{2h}{3} - y\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)^2\right]$$

$$\tau = \frac{6V}{bh^3}\left[\frac{4h^2}{9} + 2\frac{h}{3}y - 2y^2\right] \qquad ...(I)$$

Para calcular el $\tau_{máx}$, aplicamos el criterio de la primera derivada:

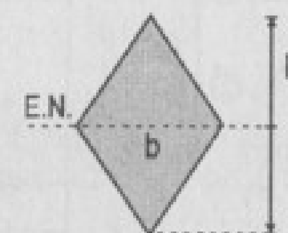
$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{4V}{bh^3}\left(\frac{2h}{3} - 4y\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{6}$$

$\therefore$ Si sumamos: $\frac{h}{3} + \frac{h}{6} = \frac{h}{2}$

Si reemplazamos y = h/6 en (I):

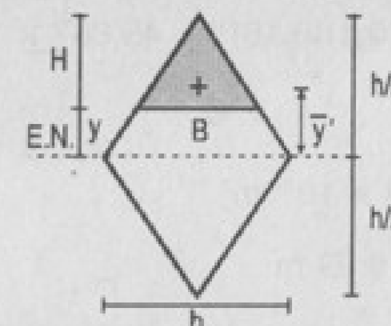
$$\tau_{máx} = \tau_{y=\frac{h}{6}} = \frac{6V}{bh^3}\left[\frac{4h^2}{9} + \frac{2h}{3}\left(\frac{h}{6}\right) - 2\left(\frac{h}{6}\right)^2\right] \Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = \frac{3V}{bh}}$$

574. En la viga cuya sección muestra la figura, demostrar que el máximo esfuerzo cortante horizontal tiene lugar en un punto a una distancia h/8 por encima o por debajo del E.N.



Resolución:

Seguimos una secuencia similar al problema anterior.



Por semejanza:

$$B = \frac{b}{(h/2)}y = \frac{2b}{h}y; \quad H = \frac{h}{2} - y$$

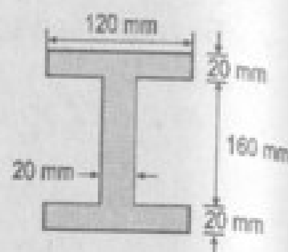
$$A' = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\left(\frac{2b}{h}y\right)\left(\frac{h}{2} - y\right); \quad \bar{y}' = y + \frac{H}{3} = y + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$$t = B = \frac{2b}{h}y; \quad I = 2I_B^A = 2\left[\frac{b(h/2)^3}{12}\right] = \frac{bh^3}{48}$$

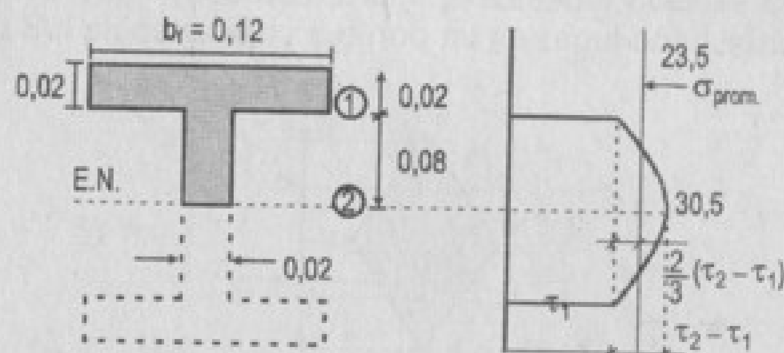
$$\tau = \frac{V}{\frac{bh^3}{48_{24}}\left(\frac{\not{2}b}{h}\right)(y)}\left(\frac{b}{2}y\right)\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[y + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]$$

$$\tau = \frac{12V}{bh^3}\left[\frac{h^2}{4} + \frac{hy}{2} - 2y^2\right] \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \frac{12V}{bh^3}\left(\frac{h}{2} - 4y\right) = 0 \therefore \boxed{y = \frac{h}{8}}$$

575. Determinar el máximo y el mínimo valor del esfuerzo cortante en el patín de la viga que tiene la sección indicada en la figura, si V = 100 kN. Calcular también el tanto por ciento de fuerza cortante que absorbe el patín.



Resolución:



Calculamos los esfuerzos en (1) y (2):

$$I = \frac{1}{12}[(0,12)(0,2)^3 - (0,1)(0,16)^3] = 45,867 \times 10^{-6}\ m^4$$

Para el nivel (1):

$A' = (0,12)(0,02) = 2,4 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = 0,08 + 0,02/2 = 0,09\ m$

$t = 0,02$

$$\tau_{(1)} = \frac{V}{It}A'\bar{y}' = \frac{100 \times 10^3}{(45,867 \times 10^{-6})(0,02)}(2,4 \times 10^{-3})(0,09)$$

$\therefore$ $\boxed{\tau_{(1)} = 23,5\ MPa}$

Para el nivel (2):

$A' = (0,12)(0,02) + (0,02)(0,08) = 4,0 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = (1/4,0 \times 10^{-3})(0,12 \times 0,02 \times 0,09 + 0,02 \times 0,08 \times 0,04) = 0,07\ m$

$$\tau_{(2)} = \frac{100 \times 10^3}{(45,867 \times 10^{-6})(0,02)}(4,0 \times 10^{-3})(0,07) = 30,5\ MPa$$

$\therefore$ $\boxed{\tau_{(2)} = 30,5\ MPa}$

Calculamos el esfuerzo promedio que actúa en el alma:

$$\tau_{prom.} = \tau_{(1)} + \frac{2}{3}(\tau_{(2)} - \tau_{(1)}) = 23,5 + \frac{2}{3}(30,5 - 23,5) = 28,17$$

$\tau_{prom.} = 28,17\ MPa$

La cortante tomada por el alma es:

$V_{alma} = \tau_{prom.}(A_{alma}) = 28,17\ (0,02)(0,16) = 90,2$

$\Rightarrow \%\ V_{alma} = \frac{V_{alma}}{V} = \frac{90,2}{100} = 90,2\ \%\quad \therefore\ \boxed{\%\ V_{alma} = 90,2\ \%}$

576. Si el patín de la viga de la figura del problema anterior tuviera 200 mm en lugar de 160 mm, ¿qué fuerza cortante absorbería?

Resolución:

Utilizando el esquema anterior:

$$I = \frac{1}{12}[(0,12)(0,24)^3 - (0,1)(0,2)^3] = 71,573 \times 10^{-6}\ m^4$$

Para el nivel (1):

$A' = (0,12)(0,02) = 2,4 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = 0,1 + 0,02/2 = 0,11\ m$

$t = 0,02$

$$\tau_{(1)} = \frac{100 \times 10^3}{(71,573 \times 10^{-6})(0,02)}(2,4 \times 10^{-3})(0,11) = 18,44\ MPa$$

Para el nivel (2):

$A' = (0,12)(0,02) + (0,02)(0,1) = 4,4 \times 10^{-3}\ m^2$

$$\bar{y}' = \frac{1}{4,4 \times 10^{-3}}(0,12 \times 0,02 \times 0,11 + 0,02 \times 0,1 \times 0,05) = 0,0827\ m$$

$$\tau_{(2)} = \frac{100 \times 10^3}{(71,537 \times 10^{-6})(0,02)}(4,4 \times 10^{-3})(0,0827) = 25,43\ MPa$$

Ahora calculamos el esfuerzo promedio que actúa en el alma:

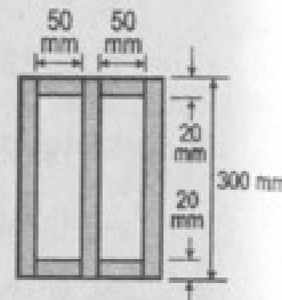
$$\tau_{prom.} = \tau_{(1)} + \frac{2}{3}(\tau_{(2)} - \tau_{(1)}) = 18,44 + \frac{2}{3}(25,43 - 18,44)$$

$\Rightarrow \tau_{prom.} = 23,1\ MPa$

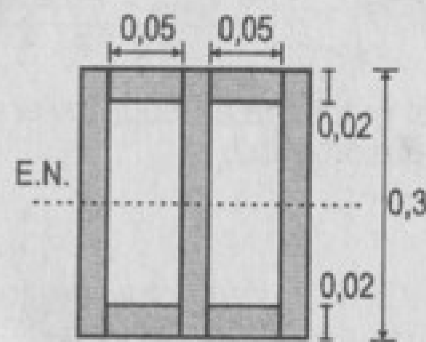
$\therefore\ V_{alma} = (A_{alma})(\tau_{prom}) = (0{,}02 \times 0{,}2)(23{,}1)$

$\Rightarrow\ V_{alma} = 92{,}4\ \text{kN} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\%\ V_{alma} = 92{,}4\%}$

577. Una viga compuesta está formada por láminas de 6 mm, separadas por bloques como indica la figura. ¿Qué fuerza cortante producirá un esfuerzo máximo de 1,4 MPa?



Resolución:



Este problema podemos resolverlo de dos maneras, una aproximada y otra exacta.

I. Primero calculamos $I_{E.N.} = ?$

$$I = 3\left(\frac{1}{12}(0{,}006)(0{,}3)^3\right) + 4\left(\frac{1}{12}(0{,}05)(0{,}02)^3 + (0{,}05)(0{,}02)(0{,}14)^2\right)$$

$\Rightarrow\ I = 119{,}03 \times 10^{-6}\ \text{m}^4;\ A' = 3(0{,}006)(0{,}15) + 2\ (0{,}05)(0{,}02)$

$\Rightarrow\ A' = 4{,}7 \times 10^{-3}\ \text{m}^2\ ;\ b = 3(0{,}006) = 0{,}018\ \text{m}$

$$\bar{y}' = \frac{1}{(4{,}7\times10^{-3})}[3(0{,}006)(0{,}15)(0{,}075) + 2(0{,}05)(0{,}02)(0{,}14)]$$

$\Rightarrow\ \bar{y}' = 0{,}103\ \text{m}\ \ (103\ \text{mm})$

Luego: $Q = A'\bar{y}' = 4{,}8 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$

$$\therefore\ \tau = \frac{V}{Ib}Q = \frac{V}{(119{,}03\times10^{-6})(0{,}018)}(4{,}8 \times 10^{-4}) \le 1{,}4 \times 10^6$$

$\Rightarrow V \le 6249\ \text{N} \ \Rightarrow\ V_{máx.} = 6{,}3\ \text{kN}$

II. En forma aproximada tenemos:

$$\tau_{máx.} = \frac{V}{A_{alma}} = \frac{V}{3(0{,}006)(0{,}26)} \le 1{,}4 \times 10^6$$

$\Rightarrow\ V \le 6552\ \Rightarrow\ V_{máx.} = 6{,}5\ \text{kN}\ \therefore\ \boxed{V_{máx.} = 6{,}5\ \text{kN}}$

578 y 579. Problemas ilustrativos.

580. Una viga de sección rectangular b × h simplemente apoyada sobre un claro L, soporta en el centro una carga concentrada P. Expresar $\tau_{máx.}$ en función σ_f.

Resolución:

Para un tramo simple con carga en su centro tenemos:

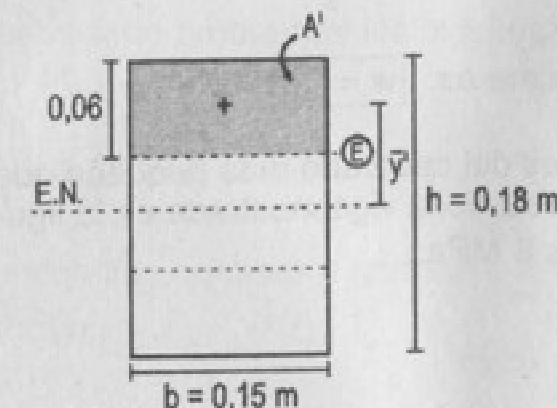
$$\left.\begin{matrix} V = P/2 \\ M = PL/4 \end{matrix}\right\}\ 2\frac{M}{L} = V \qquad \text{...(I)}$$

Además: $\sigma_f = \dfrac{6M}{bh^2} \quad \wedge \quad \tau_{máx} = \dfrac{3}{2}\dfrac{V}{bh}$

En (I): $\dfrac{2}{L}\left(\dfrac{\sigma_f\, bh^2}{6}\right) = \tau_{máx.}\dfrac{2}{3}(bh) \quad \therefore \quad \boxed{\tau_{máx.} = \sigma_f h/2L}$

581. Una viga está formada por tres tablas de sección 150 × 60 mm, encoladas entre sí para formar una sección de 150 mm de ancho por 180 mm de altura. Si el cortante admisible en las juntas es de 600 kPa, el cortante admisible en la madera es 900 kPa y el normal permisible también en la madera vale 8 MPa, determinar la carga máxima uniformemente distribuida que puede resistir la viga sobre un claro de 2 m.

Resolución:



Del enunciado tenemos:

$\tau_E \le 600\ \text{kPa}\ ;\ \tau_{máx.} \le 900\ \text{kPa};\ \ \sigma_{máx.} \le 8\ \text{MPa}$

I. Para una viga simple con carga uniforme:

$$M_{máx.}=\frac{1}{8}wL^2 \quad \wedge \quad V_{máx.}=\frac{wL}{2}$$

Para L = 2 m $\Rightarrow$ $M_{máx.}=w/2$ $\wedge$ $V_{máx.}=w$

$$I=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}(0{,}15)(0{,}18)^3=72{,}9\times10^{-6}\ m^4$$

II. Calculamos el esfuerzo en el nivel (E):

$\underline{A}'=(0{,}15)(0{,}06)=9\times10^{-3}\ m^2$
$\overline{y}'=0{,}18/2-0{,}06/2=0{,}06$ m
$b=0{,}15$ m
$Q=A'\,\overline{y}'=(9\times10^{-3})(0{,}06)=5{,}4\times10^{-4}\ m^3$

Sabemos:

$$\tau_E=\frac{V}{Ib}Q=\frac{w}{(72{,}9\times10^{-6})(0{,}15)}(5{,}4\times10^{-4})\le600\times10^3$$

$\Rightarrow w\le 12\ 150$ N/m

III. Para verificar el esfuerzo cortante máximo:

$$\tau_{máx.}=\frac{3}{2}\frac{V}{bh}=\frac{3}{2}\frac{w}{(0{,}15)(0{,}18)}\le900\times10^3\ \Rightarrow\ w\le16\ 200\ N/m$$

IV. Verificamos los esfuerzos normales por flexión en la madera:

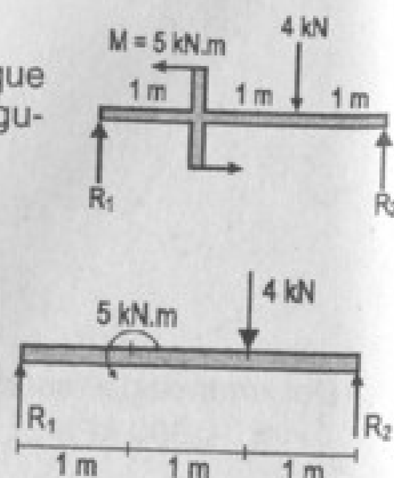
$$\sigma_f=\frac{6M}{bh^2}=\frac{6(w/2)}{(0{,}15)(0{,}18)^2}\le8\times10^6\ \Rightarrow\ w\le12\ 960\ N/m$$

$\therefore$ La carga máxima es: $\boxed{w=12{,}15\ kN/m}$

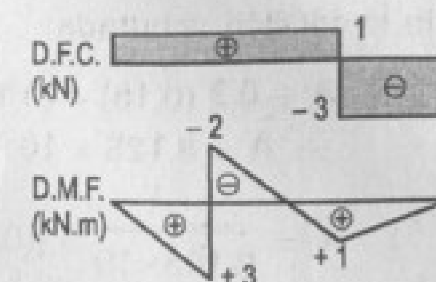
582. Calcule las dimensiones del cuadrado más pequeño que sea la sección transversal de la viga mostrada en la figura, si $\tau\le900$ kPa y $\sigma\le8$ MPa.

Resolución:

I. Dibujamos el D.F.C. y D.M.F. (verificar)
Para determinar el $V_{máx.}$ y $M_{máx.}$



Calculamos R_1 y R_2:



$\Sigma M_1=0$: $3(R_2)-2(4)+5=0$
$R_2=1$ kN = (1000 N)
$R_1=3$ kN = (3000 N)
$V_{máx.}=3000$ N
$M_{máx.}=3000$ N.m

II. Para el esfuerzo cortante ($\tau\le900$ kPa) para una sección cuadrada de lado a:

$$\tau_{máx}=\frac{3}{2}\frac{V}{a^2}=\frac{3}{2}\frac{(3000)}{a^2}\le900\times10^3$$

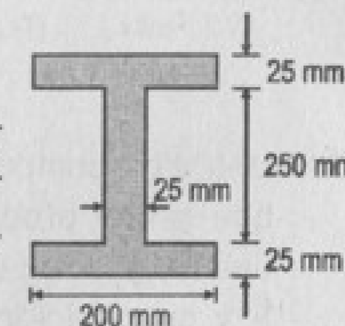
$a\ge0{,}071$ m

III. El esfuerzo normal por flexión está limitado a: ($\sigma\le8$ MPa)

$$\sigma_f=\frac{6M}{a^3}=\frac{6(3000)}{a^3}\le8\times10^6$$

$a\ge0{,}131$ m $\quad\therefore\quad \boxed{a_{mín.}=0{,}131\ m}$

583. Una viga simplemente apoyada de claro L y carga concentrada P en el centro, tiene una sección I como la indicada en la figura. Determinar la relación entre $\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$.

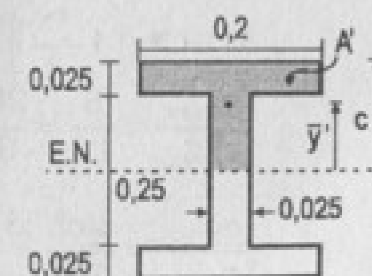


Resolución:

I. De acuerdo al enunciado tendremos los siguientes valores de $V_{máx.}$ y $M_{máx.}$

$$V_{máx.}=\frac{P}{2};\quad M_{máx.}=\frac{PL}{4}$$

II. Evaluamos los esfuerzos cortante y normal:
Para toda la sección:



$$I=\frac{1}{12}(0{,}2)(0{,}3)^3-\frac{1}{12}(0{,}175)(0{,}25)^3$$

$\Rightarrow I=222{,}135\times10^{-6}\ m^4$

Para la sección achurada:

$$A' = 0,2\ (0,15) - (0,175)\ (0,125)$$

$$\Rightarrow A' = 8,125 \times 10^{-3}\ m^2$$

$$\bar{y}' = \frac{1}{8,125\times10^{-3}}[(0,2)(0,15)(0,075) - (0,175)(0,125)(0,0625)]$$

$$\Rightarrow \bar{y}' = 0,1087\ m$$

$$\Rightarrow Q = A'\bar{y}' = 8,83 \times 10^{-4}\ m^3$$

$b = 0,025$ m $\qquad c = 0,15$ m

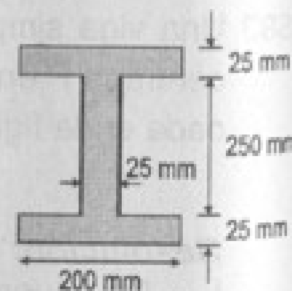
$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} \qquad \frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{\frac{Mc}{I}}{\frac{V}{Ib}Q} = \frac{Mcb}{VQ}$$

$$\tau_{máx} = \frac{V}{Ib}Q$$

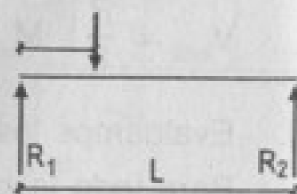
Reemplazando:

$$\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{(PL/4)(0,15)(0,025)}{(P/2)(8,83\times10^{-4})} = 2,123\ L \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = 2,123\ L}$$

584. Una viga compuesta, de madera, de la misma sección que la del problema anterior, se utiliza para soportar una carga P en un punto de un claro de 8 m. Determinar P y su posición, de manera que causen simultáneamente $\sigma_{máx} = 8$ MPa y $\tau_{máx} = 1,2$ MPa.



Resolución:



$$V = P\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$M = Px\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{8}{1,2} = \frac{20}{3}$$

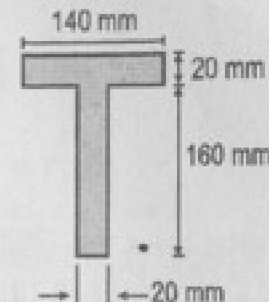
$$\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{Mcb}{VQ} = \frac{\not{P}x(1-x/8)(0,15)(0,025)}{\not{P}(1-x/8)(8,83\times10^{-4})} = \frac{20}{3} \quad \therefore \quad \boxed{x = 1,57\ m}$$

Reemplazando en V: V = 0,8P

$$\tau_{máx} = \frac{0,8P}{(222,135\times10^{-6})(0,025)}(8,83 \times 10^{-4}) \leq 1,2 \times 10^6$$

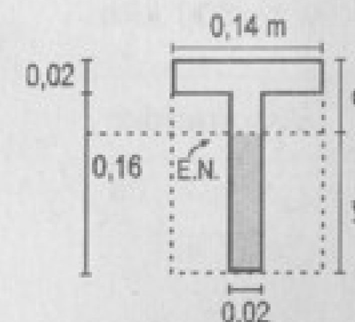
$$P \leq 9434\ N \quad \therefore \quad \boxed{P_{máx} = 9,4\ kN}$$

585. Una viga simplemente apoyada de L m de longitud soporta una carga uniformemente distribuida de 16 kN/m a todo su largo y tiene la sección mostrada en la figura. Calcule el valor de L que ocasione un máximo esfuerzo por flexión de 40 MPa. En estas condiciones, ¿cuánto vale el máximo esfuerzo cortante?



Resolución:

I. Primero calculamos I y Q de la sección.
Ubicación de la línea neutra:



$$A = (0,14)(0,18) - (0,12)(0,16)$$

$$\Rightarrow A = 6 \times 10^{-3}\ m^2$$

$$\bar{y} = \frac{(0,14)(0,18)(0,09)-(0,12)(0,16)(0,08)}{6\times10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 0,122\ m$$

Calculamos I: $I = \left[\frac{1}{3}(0,14)(0,18)^3 - \frac{1}{3}(0,12)(0,16)^3\right] - 6\times10^{-3}\ (0,122)^2$

$$\Rightarrow I = 19,016 \times 10^{-6}\ m^4$$

Calculamos $Q = A'\bar{y}'$

$$A' = (0,02)(0,122) = 2,44 \times 10^{-3}\ m^2$$

$$\bar{y}' = 0,122/2 = 0,061\ m$$

$$\Rightarrow Q = 148,84 \times 10^{-6}\ m^3$$

II. Por flexión:
Para una viga simple el momento máximo es:

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} = \frac{16\ 000\ L^2}{8} = 2000\ L^2; \quad c = 0,122$$

$$\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{(2000\ L^2)(0,122)}{19,061\times10^{-6}} \leq 40 \times 10^6 \Rightarrow L \leq 1,77\ m \quad \therefore \quad \boxed{L = 1,77\ m}$$

III. Por cortante:

$\tau = \dfrac{V}{Ib}Q$

* Para este caso se tomó el área que está por debajo de la L. N. (zona achurada).

$b = 0{,}02$

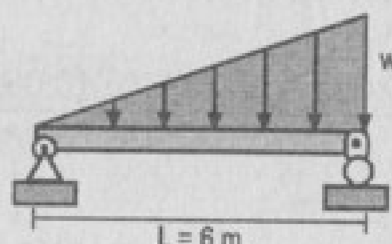
$V = wL/2 = 14\ 160$ N

$$\Rightarrow \tau = \frac{14\,160}{(19{,}061\times10^{-6})(0{,}02)}(148{,}84\times10^{-6}) = 5{,}5$$

$\therefore\ \tau = 5{,}5$ MPa

586. Una viga simplemente apoyada de 6 m de longitud soporta una carga que aumenta uniformemente de cero en un extremo a w N/m en el otro. La sección de la viga es la mostrada en la figura. Calcule el valor máximo de w si $\sigma_f \leq 10$ MPa y $\tau \leq 800$ kPa.

Resolución:



I. Del enunciado tenemos lo siguiente:

$V_{máx.} = wL/3 = 2w$

$$M_{máx.} = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}} = 2{,}3w$$

Además del problema 577 tenemos: $I = 119 \times 10^{-6}\ m^4$

Por flexión: $\sigma = Mc/I$; $c = 0{,}15$ m $\quad Q = 4{,}8 \times 10^{-4}\ m^3$

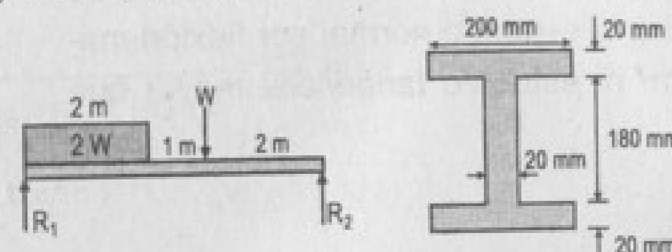
$$\sigma = \frac{(2{,}3\ w)(0{,}15)}{(119\times10^{-6})} \leq 10 \times 10^6 \Rightarrow w \leq 3{,}45 \text{ kN/m}$$

Por cortante: $\tau = VQ / Ib$; $b = 0{,}018$ m

$$\tau = \frac{(2w)(4{,}8\times10^{-4})}{(119\times10^{-6})(0{,}018)} \leq 0{,}8 \times 10^6$$

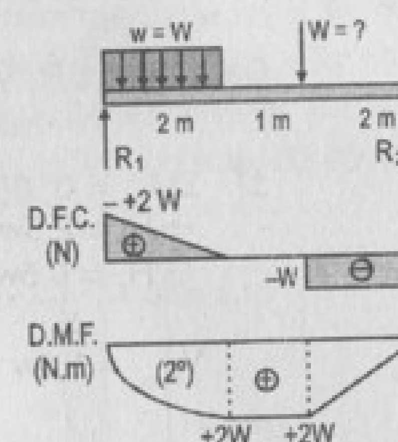
$\Rightarrow w \leq 1{,}785$ kN/m $\quad \therefore$ $\boxed{w = 1{,}785 \text{ kN/m}}$

587. La viga de patín ancho de la figura, sostiene una carga concentrada W y una uniformemente distribuida de valor total 2W. Determine el valor máximo de W si $\sigma_f \leq 10$ MPa y $\tau \leq 1{,}4$ MPa.



Resolución:

I. Dibujamos el D.M.C. y D.M.F. (verificar) para determinar $V_{máx.}$ y $M_{máx.}$.



Calculamos R_1 y R_2:

$\Sigma M_1 = 0$:

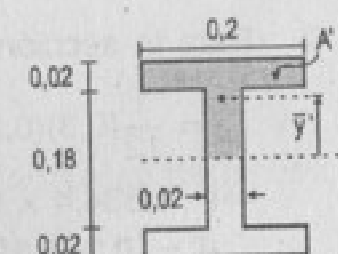
$5(R_2) - (3)(W) - 1(2W) = 0$

$\Rightarrow R_2 = W$

$R_1 = 2W \Rightarrow V_{máx.} = 2W$ (N)

$M_{máx.} = 2W$ (N.m)

II. Para la sección calculamos I y Q.



$$I = \frac{1}{12}(0{,}2)(0{,}22)^3 - \frac{1}{12}(0{,}18)(0{,}18)^3$$

$\Rightarrow I = 90 \times 10^{-6}\ m^4$

$A' = (0{,}2)(0{,}11) - (0{,}18)(0{,}09)$

$\Rightarrow A' = 5{,}8 \times 10^{-3}\ m^2$

$$\bar{y}' = \frac{1}{5{,}8\times10^{-3}} = [(0{,}2)(0{,}11)(0{,}055) - (0{,}18)(0{,}09)(0{,}045)] = 0{,}0829$$

$Q = A'\bar{y}' = 481 \times 10^{-6}\ m^3$

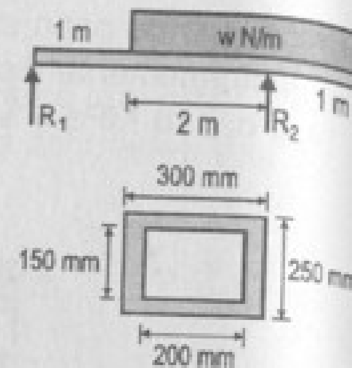
III. Verificando los esfuerzos:

$$\sigma_{máx.} = \frac{Mc}{I} = \frac{(2W)(0{,}11)}{90\times10^{-6}} \leq 10 \times 10^6 \Rightarrow W \leq 4{,}09$$

$$\tau_{máx.} = \frac{V}{Ib}Q = \frac{(2W)(481\times10^{-6})}{(90\times10^{-6})(0{,}02)} \leq 1{,}4 \times 10^6$$

$\Rightarrow W \leq 2{,}62$ $\quad \boxed{\therefore\ W = 2{,}62 \text{ kN}}$

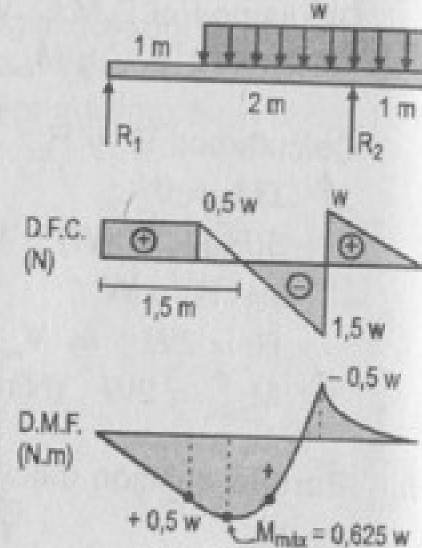
588. La carga distribuida mostrada en la figura, está sostenida por una viga en caja cuyas dimensiones se muestran en la misma figura. Determine el valor máximo de w que no producirá ni esfuerzo normal por flexión mayor que 14 MN/m² ni esfuerzo tangencial mayor que 1,2 MN/m².



Resolución:

I. Dibujamos el D.F.C. y D.M.F. (verificar) para determinar $V_{máx.}$ y $M_{máx.s}$.

Calculamos R_1 y R_2:



$\circlearrowleft^{+} \; \Sigma M_1 = 0$: $3(R_2) - 2{,}5(3w) = 0$

$\Rightarrow R_2 = 2{,}5w$

$\Rightarrow R_1 = 0{,}5w$

$V_{máx.} = 1{,}5w$

$M_{máx.} = 0{,}625w$

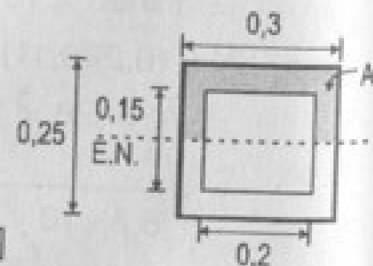
II. Para la sección transversal tenemos:

$$I = \frac{1}{12}(0{,}3)(0{,}25)^3 - \frac{1}{12}(0{,}2)(0{,}15)^3$$

$\Rightarrow I = 334{,}4 \times 10^{-6}\ m^4$

$A' = (0{,}3)(0{,}125) - (0{,}2)(0{,}075)$

$\Rightarrow A' = 22{,}5 \times 10^{-3}\ m^2$



$$\bar{y}' = \frac{1}{22{,}5 \times 10^{-3}}[(0{,}3)(0{,}125)^2/2 - (0{,}2)(0{,}075)^2/2]$$

$\Rightarrow \bar{y}' = 0{,}079\ m$

$Q = A'\,\bar{y}' = 17{,}8 \times 10^{-4}\ m^3$

III. Evaluando los esfuerzos máximos

Por flexión: $\sigma = Mc/I \leq \sigma_{adm.} = 14$ MPa

$$\sigma = \frac{(0{,}625w)(0{,}125)}{334{,}4 \times 10^{-6}} \leq 14 \times 10^6$$

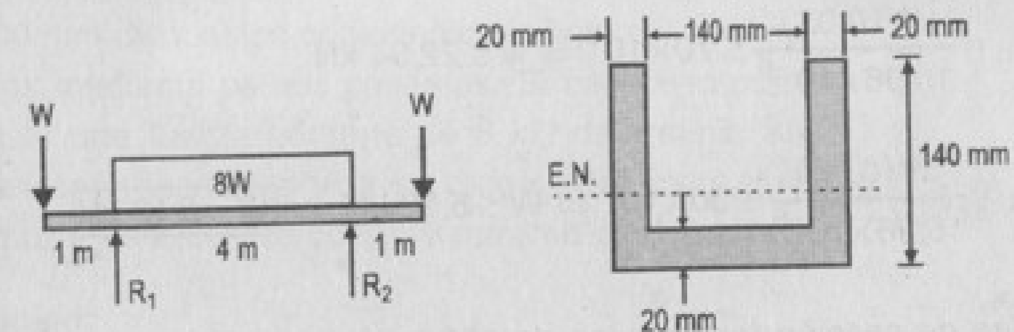
$w \leq 59{,}924$ N/m

Por cortante: $\tau = VQ/Ib \leq \tau_{adm.} = 1{,}2$

$$\tau = \frac{(1{,}5\ w)(17{,}8 \times 10^{-4})}{(334{,}4 \times 10^{-6})(0{,}1)} \leq 1{,}2 \times 10^6$$

$w \leq 15\ 029$ N/m $\quad \therefore \quad \boxed{w = 15\ kN/m}$

589. Un perfil de canal soporta dos cargas concentradas W y una carga repartida total de 18W, distribuida como indica la figura. Verificar que el E.N. esté situado a 50 mm de la base y que $I_{E.N.} = 15{,}96 \times 10^6\ mm^4$. Luego use estos valores para determinar el máximo valor de W que no exceda el esfuerzo normal (30 MPa a tensión y 70 MPa a compresión), ni el cortante de 20 MPa (esfuerzos admisibles).



Resolución:

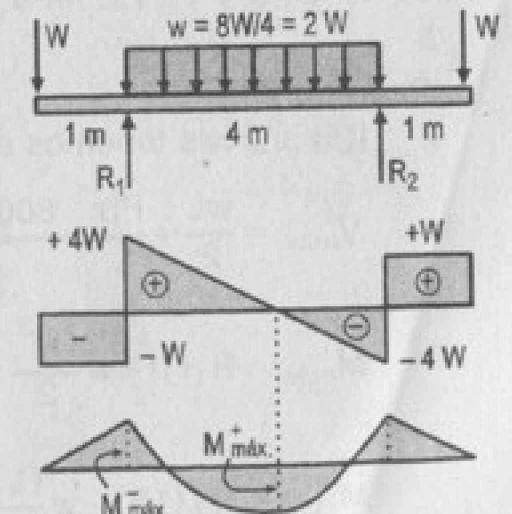
I. Determinamos el $V_{máx.}$, $M^+_{máx.}$ y $M^-_{máx.}$ de los diagramas de flexión y cortante.

$$R_1 = R_2 = \frac{10w}{2} = 5w$$

$V_{máx.} = 4W$

$M^-_{máx.} = -W$

$M^+_{máx.} = +3W$



II. Analizamos los esfuerzos máximos.

Por cortante:

$$\tau=\frac{4W\left[(0{,}04)(0{,}09)^2/2\right]}{(15{,}96\times10^{-6})(0{,}04)}\leq 20\times10^6$$

Por flexión:

Momento positivo:

$$\sigma_c=\frac{3W(0{,}09)}{(15{,}96\times10^{-6})}\leq 70\times10^6 \Rightarrow W\leq 4{,}14\text{ kN}$$

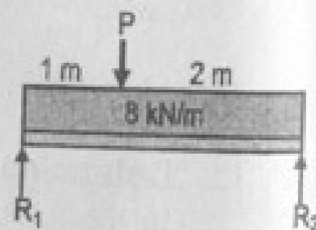
$$\sigma_t=\frac{3W(0{,}05)}{(15{,}96\times10^{-6})}\leq 30\times10^6 \Rightarrow w\leq 3{,}19\text{ kN}$$

Momento negativo:

$$\sigma_c=\frac{W(0{,}05)}{15{,}96\times10^{-6}}\leq 70\times10^6 \Rightarrow w\leq 22{,}34\text{ kN}$$

$$\sigma_t=\frac{W(0{,}09)}{15{,}96\times10^{-6}}\leq 30\times10^6 \Rightarrow W\leq 5{,}32\text{ kN} \quad \therefore \quad \boxed{W=3{,}19\text{ kN}}$$

590. Una viga de sección rectangular, de 150 mm de ancho por 250 mm de altura, soporta una carga uniformemente distribuida de 8 kN/m y una concentrada P como se muestra en la figura. Determine el máximo valor de P, si $\sigma\geq 10$ MPa y $\tau\leq 1{,}2$ MPa.



Resolución:

I. Del análisis tenemos el valor de $V_{máx.}$:

$$V_{máx.}=\frac{wL}{2}+\frac{Pb}{L}=\frac{8000(3)}{2}+\frac{P(2)}{3}=12\,000+2P/3$$

$$M_{máx.}=R_1(1)-w\frac{(1)^2}{2}=12\,000+2\frac{P}{3}-4000=8000+\frac{2P}{3}$$

$$M'_{máx.}=R_2(1{,}5)-w\frac{(1{,}5)^2}{2}=18\,900+\frac{P'}{2}-9000=9000+\frac{P'}{2}$$

II. Veamos los esfuerzos: b = 0,15 m; h = 0,25 m

Por corte: $\tau=\frac{3}{2}\frac{V}{bh}$

$$\tau=\frac{3}{2}\frac{(12\,000+2P/3)}{(0{,}15)(0{,}25)}\leq 1{,}2\times10^6 \quad\Rightarrow\quad P\leq 27\,000\text{ N}$$

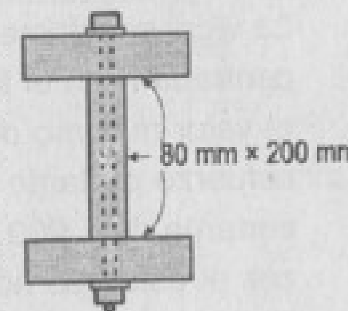
Por flexión: σ = 6M/bh²

$$\sigma=\frac{6(8000+2P/3)}{(0{,}15)(0{,}25)^2}\leq 10\times10^6 \quad\Rightarrow\quad P\leq 11\,437\text{ N}$$

También, $P'\leq 13\,250$ N $\quad\therefore\quad \boxed{P=11{,}4\text{ kN}}$

591. Problema ilustrativo

592. Se construye una viga de sección I con tres tablones de 80 × 200 mm dispuestos como indica la figura, y hechos solidarios mediante pernos pasantes. Si cada uno puede resistir una fuerza cortante de 8 kN determinar su espaciamiento cuando la viga se carga de manera que se produzca un esfuerzo cortante máximo de 1,2 MPa.



Resolución:

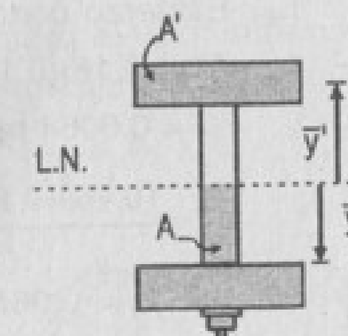
I. Calculamos Q e I:

A' = 0,08 × 0,2 = 0,016 m²

$\bar{y}'$ = 0,1 + 0,04 = 0,14 m

Q = A'$\bar{y}'$ = (0,016) (0,14)

$\Rightarrow$ Q = 224 × 10⁻⁵ m³



$$I=\frac{1}{12}(0{,}2)(0{,}36)^3-\frac{1}{12}(0{,}12)(0{,}2)^3$$

$$\Rightarrow I=69{,}76\times10^{-5}\text{ m}^4$$

II. Calculamos V: τ = VQ'/It

A = (0,2)(0,18) − (0,12)(0,1) = 0,024 m²

$$\bar{y}=\frac{(0{,}2)(0{,}18)(0{,}09)-(0{,}12)(0{,}1)(0{,}05)}{0{,}024}=0{,}11\text{ m}$$

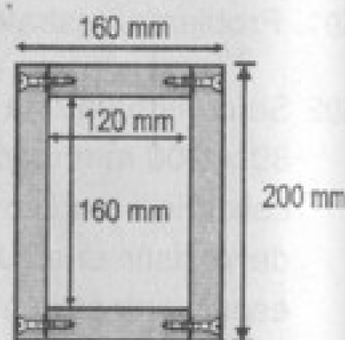
$Q' = A\bar{y} = (0,024)(0,11) = 264 \times 10^{-5}\ m^3$

$$\tau = \frac{V(264\times10^{-5})}{(69,76\times10^{-5})(0,08)} \leq 1,2 \times 10^6\ ;\ V \leq 25,37\ kN$$

III. Calculamos $e = \frac{RI}{VQ}$, R = 8 kN

$$e = \frac{(8)(69,76\times10^{-5})}{(25,37)(224\times10^{-5})} = 0,0982\ m \qquad \therefore \boxed{e = 98,2\ mm}$$

593. Una viga en caja, construida como se indica en la figura, se asegura mediante tornillos espaciados a 100 mm. La viga, simplemente apoyada, soporta una carga concentrada P en el tercio de un claro de 3 m. Determinar el valor máximo de P de manera que no sobrepase el esfuerzo cortante de 800 kPa en la viga, ni la fuerza cortante de 1 200 N en los tornillos. ¿Cuál será entonces el esfuerzo normal máximo en la viga?



Resolución:

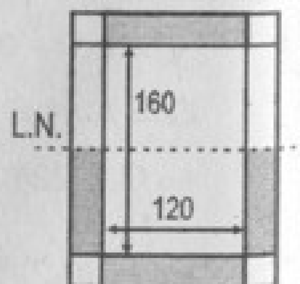
El cortante es V = 2P/3

I. Esfuerzo cortante:

$A' = (0,16)(0,1) - (0,12)(0,08)$
$= 0,0064\ m^2$

$$\bar{y}' = \frac{(0,16)(0,1)(0,05)-(0,12)(0,08)(0,04)}{0,0064}$$

$\Rightarrow \bar{y}' = 0,065\ m$



$Q' = A'\ \bar{y}' = (0,0064)(0,065) = 416 \times 10^{-6}\ m^3$

$$I = \frac{1}{12}(0,16)(0,2)^3 - \frac{1}{12}(0,12)(0,16)^3 = 65,7 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{\frac{2P}{3}(416\times10^{-6})}{(65,7\times10^{-6})}(0,04) \leq 800 \times 10^3$$

$P \leq 7,58\ kN$

II. Fuerza cortante en los tornillos:

$e = 100\ mm = 0,1\ m$

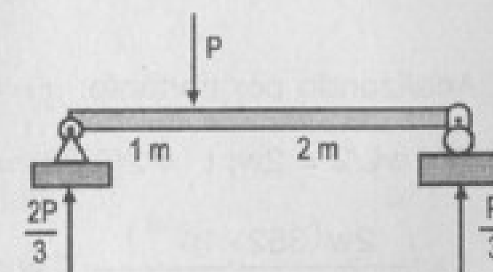
$Q = (0,12)(0,02)(0,09) = 216 \times 10^{-6}\ m^3$

$R = 1200(2) = 2400\ N$

$$R = \frac{eVQ}{I} = \frac{0,1(2P/3)(216\times10^{-6})}{65,7\times10^{-6}} \leq 2400$$

$\Rightarrow P \leq 10,95\ kN \quad \therefore \boxed{P = 7,58\ kN}$

III. Esfuerzo normal:



$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

$M^+ = 2P/3$

$M = 5053\ N.m$

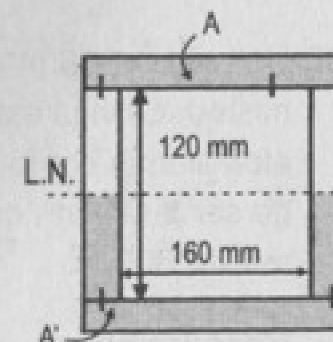
$$\sigma = \frac{5053(0,1)}{65,7\times10^{-6}} = 7,69\ MPa$$

$\therefore \boxed{\sigma = 7,69\ MPa}$

594. Sobre una viga simplemente apoyada de 4m de claro se aplica una carga repartida uniformemente de w N/m. La sección de la viga es la de la figura del problema anterior, pero girada un cuarto de vuelta. Determinar el valor máximo de w si $\sigma_f \leq 10$ MPa, $\tau \leq 800$ kPa y los tornillos tienen una resistencia al cortante de 800 N y una separación de 50 mm.

Resolución:

Calculamos: Q, I e Q'



$A' = (0,2)(0,08) - (0,16)(0,06) = 0,0064\ m^2$

$$\bar{y}' = \frac{0,2(0,08)(0,04)-(0,16)(0,06)(0,03)}{0,0064}$$

$\Rightarrow \bar{y}' = 0,055\ m$

$Q' = A'\ \bar{y}' = (0,0064)(0,055) = 352 \times 10^{-6}\ m^3$

$Q = (0,2)(0,02)(0,07) = 280 \times 10^{-6}\ m^3$

$$I = \frac{1}{12}(0,2)(0,16)^3 - \frac{1}{12}(0,16)(0,12)^3 = 45,23 \times 10^{-6}\ m^4$$

I. Analizando por flexión: $\sigma_f = \dfrac{Mc}{I}$
Para una viga simplemente apoyada y con carga w uniforme en todo el claro.

$$M = \frac{1}{8}wL^2 = \frac{1}{8}w(4)^2 = 2w$$

c = 0,08 m

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{2w(0{,}08)}{45{,}23\times10^{-6}} \le 10\times10^6$$

$w \le 2{,}83$ kN/m

II. Analizando por cortante: $\tau = \dfrac{VQ'}{It}$

V = wL/2 = 2w; t = 2(0,02) = 0,04

$$\tau = \frac{2w(352\times10^{-6})}{(45{,}23\times10^{-6})(0{,}04)} \le 800\times10^3 \Rightarrow w \le 2{,}05 \text{ kN/m}$$

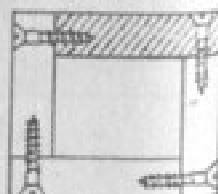
III. Analizando los tornillos: $R = \dfrac{eVQ}{I}$

e = 50 mm = 0,05 m; V = 2 w

$$R = \frac{0{,}05(2w)(280\times10^{-6})}{(45{,}23\times10^{-6})} \le 2(800)$$

$w \le 2{,}58$ kN/m $\quad \therefore$ $\boxed{w = 2{,}05 \text{ kN/m}}$

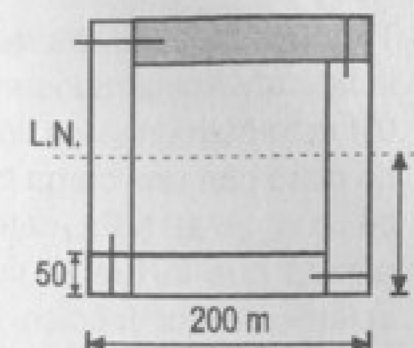
595. Una viga de 6 m de claro soporta una carga P a la mitad del mismo. La viga está formada por cuatro tablas de 50 × 150 mm atornilladas como indica la figura. Si el esfuerzo máximo σ ha de ser 9 MN/m², calcular la separación de tornillos si cada uno resiste 800 N.



Resolución:
Del enunciado tenemos:

$M_{máx.} = PL/4 = 3P/2$
$V_{máx.} = P/2$

Además de la sección transversal:



$$I = \frac{1}{12}(0{,}2)^4 - \frac{1}{12}(0{,}1)^4 = 125\times10^{-6} \text{ m}^4$$

Para la parte sombreada:

$Q = (0{,}15)(0{,}05)(0{,}075)$
$= 562{,}5\times10^{-6}$ m³

I. Evaluamos por flexión:

$$\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{(3P/2)(0{,}1)}{125\times10^{-6}} \le 9\times10^6$$

$P \le 7500$ N

II. Calculamos el espaciamiento del tornillo:
Tomamos: P = 7500 N
V = P/2 = 3750
R = 2(800) = 1600 N

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{1600(125\times10^{-6})}{(3750)(562{,}5\times10^{-6})} = 0{,}0948 \quad \therefore \quad e = 94{,}8 \text{ mm}$$

III. Si consideramos los resultados del problema 562, por flexión tenemos una fuerza actuando en la zona sombreada.

$$F = (\sigma/c)\underbrace{A'\bar{y}}_{Q} = (\sigma/c)Q$$

$\Rightarrow F = (9\times10^6/0{,}1)(562{,}5\times10^{-6})$
$\Rightarrow F = 50\,625$ N

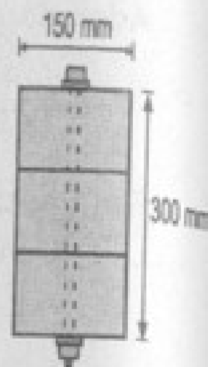
Esta fuerza debe ser sostenida por los tornillos:

$$R = eF \Rightarrow e = \frac{R}{F} = \frac{1600}{50\,625} = 0{,}0316$$

e = 31,6 mm

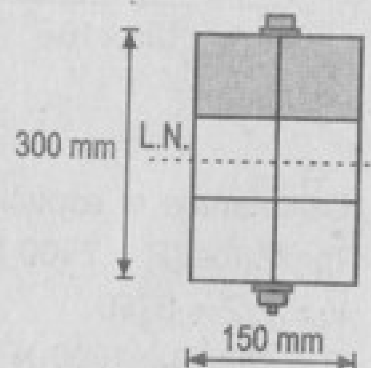
$\therefore$ $\boxed{e = 31{,}6 \text{ mm} \quad \text{gobierna}}$

596. Tres tablones de 100 × 150 mm, dispuestos como se indica en la figura y asegurados mediante pernos pasantes espaciados a 0,4 m forman una viga compuesta, simplemente apoyada, de 6 m de claro con una carga concentrada P en su centro. Si P produce un $\sigma_{máx}$ = 12 MPa, determinar el diámetro de los pernos suponiendo que la fuerza cortante entre los tablones se trasmite solamente por fricción. Los pernos se pueden someter a un esfuerzo de 140 MPa a tensión y el coeficiente de rozamiento entre las piezas es de 0,40.



Resolución:

$M_{máx.} = PL/4 = 3P/2$
$V_{máx.} = P/2$



Para toda la sección:

$$I = \frac{1}{12}(0,15)(0,3)^3 = 337,5 \times 10^{-6}$$

Para la parte sombreada:

$Q = (0,15)(0,1)(0,1) = 1500 \times 10^{-6}$

Calculamos P por flexión:

$$\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{(3P/2)(0,15)}{337,5\times10^{-6}} \leq 12 \times 10^6 \Rightarrow P \leq 18\ 000\ N$$

Evaluando por cortante:

$V = P/2 = 9000$ N

$$F = \frac{VQ}{I}e = \frac{9000(1500\times10^{-6})}{337,5\times10^{-6}}(0,4) = 16\ 000\ N$$

Esta fuerza tiene que ser resistida por la fricción:
$f = \mu N$ Donde: μ = coef. fricción
N = normal = tensión

$$\therefore \quad N = \frac{f}{\mu} = \frac{F}{\mu} = \frac{16\ 000}{0,4} = 40\ 000\ N$$

Además: $N = F_S A_P = F_S(\pi d^2/4) = 140 \times 10^6 \frac{\pi}{4} d^2$

$\Rightarrow d = 0,019$ m = 19 mm

Si consideramos la fuerza actuante en la zona sombreada:

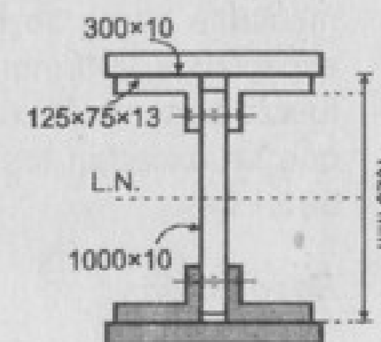
$F' = (\sigma/c)\,Q = (12 \times 10^6 / 0,15)(1500 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow F' = 20\ 000$ N

$$N = \frac{F'}{\mu} = \frac{20\ 000}{0,4} = 50\ 000\ N$$

Luego: d = 0,021 m = 21 mm $\therefore$ $\boxed{d = 19\ mm}$

597. Se construye una viga compuesta, con ángulos de 125 × 75 × 13 mm remachados a una placa de 1000 × 10 mm por sus lados cortos, formando una sección de altura total 1020 mm como indica la figura. Dos placas, cada una de 300 × 10 mm, se remachan a los ángulos para aumentar la sección de los patines, de manera que la altura total alcanza el valor de 1040 mm. El momento de inercia de la sección completa con respecto al E.N. es de 4770 × 10^6 mm^4. Utilizando los mismos esfuerzos admisibles del problema ilustrativo 591, determinar el espaciamiento entre los remaches de 22 mm de diámetro que han de unir los ángulos de alma en una sección en la cual V = 450 kN.



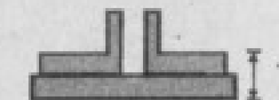
$I = 4770 \times 10^{-6}$ m^4
V = 4 50 kN
d = 22 mm

Resolución:

Calculamos Q: $Q = A'\bar{y}'$.

Ángulo: A = 2430 mm^2
x = 18,9 mm
Plancha: A = 3000 mm^2

$$\bar{y} = \frac{0,003(0,005) + 2(0,00243)(0,0289)}{0,003 + 2(0,00243)} = 0,0197$$



$\bar{y}' = 1,04/2 - 0,0197 = 0,5$ m
$A' = 0,003 + 2(0,00243) = 0,00786$
$\Rightarrow Q = 3930 \times 10^{-6}$ m^3

La resistencia del remache a doble cortante:

$R = (A_R\,\tau)(2) = \frac{\pi}{4}(0,022)^2(100 \times 10^6)(2)$
R = 76 kN

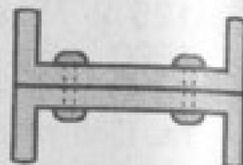
La resistencia al aplastamiento:

$R_b = (dt)\sigma_b = (0{,}022)\,(0{,}01)\,(280 \times 10^6)$
$R_b = 61{,}6$ kN

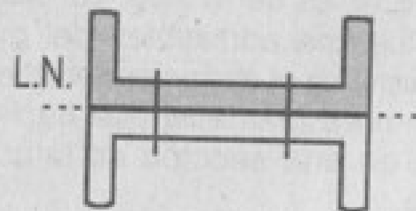
Tomamos el menor valor: R = 61,6 kN

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{(61{,}6\times10^3)(4770\times10^{-6})}{(450\times10^3)(3930\times10^{-6})} = 0{,}166 \quad \therefore \boxed{e = 166\text{ mm}}$$

598. Dos perfiles C380 × 60 se unen como indica la figura, mediante pares de remaches de 19 mm de diámetro, espaciados 200 mm a lo largo de la viga. Calcular la fuerza cortante máxima V que podrá soportar esta sin que se excedan los esfuerzos dados en el problema 591.



Resolución:



Para el perfil: C380 × 60

$A = 7570$ mm²
$x = 19{,}7$ mm
$I_y = 3{,}94 \times 10^6$ mm⁴

Calculamos Q y $I_{E.N.}$

$Q = (0{,}00757)(0{,}0197) = 149 \times 10^{-6}$ m³
$I = 2(I_y + Ax^2)$ por Steiner.
$= 2(3{,}94 \times 10^{-6} + 0{,}00757 \times 0{,}0197^2) = 13{,}75 \times 10^{-6}$ m⁴

La resistencia del remache a cortante simple:

$R = (A.\tau)(2) = \frac{\pi}{4}(0{,}019)^2(100 \times 10^6)\,(2) = 56{,}7$ kN

y la resistencia al aplastamiento contra el alma:

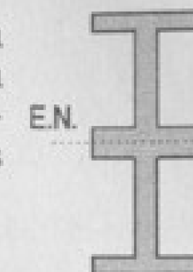
t: espesor del alma = 13,2 mm

$R_b = (dt)\,\sigma_b = (0{,}019)(0{,}0132)(220 \times 10^6) = 55{,}2$ kN

Tomamos el menor valor de resistencia: R = 55,2 kN

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{(55{,}2\times10^3)(13{,}75\times10^{-6})}{V(149\times10^{-6})} = 0{,}2 \quad \therefore \boxed{V = 25{,}5\text{ kN}}$$

599. Se forma una viga uniendo dos I de ala ancha W250 × 73 en la forma indicada en la figura. Se emplea para soportar una carga de 30 kN/m incluido el peso propio, sobre un claro de 8 m. Determinar el esfuerzo máximo por flexión y el espaciamiento de los remaches, que tienen una resistencia al cortante de 26 kN.

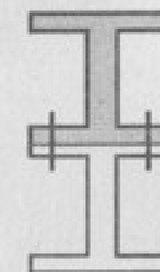


Resolución:

I. El momento flexionante y la fuerza cortante es:
$M = wL^2/8 = (30\,000)\,(8)^2/8 = 240$ kN.m
$V = wL/2 = (30\,000)\,(8)/2 = 120$ kN

II. Para la sección calculamos Q e I:

Para el perfil W250 × 73



$A = 9280$ mm²
$y = 253/2 = 126{,}5$ mm
$I_x = 113 \times 10^6$ mm⁴
$t_f = 14{,}2$ mm

$Q = (0{,}009280)(0{,}1265) = 1174 \times 10^{-6}$ m³
$I = 2(I_x + Ay^2)$
$\Rightarrow I = 523 \times 10^{-6}$ m⁴

III. Calculamos el esfuerzo máximo por flexión:

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{(240\times10^3)(0{,}253)}{523\times10^{-6}} = 116\text{ MPa}$$

$\therefore \boxed{\sigma_{máx.} = 116\text{ MPa}}$

IV. Calculamos el espaciamiento:
$R = 2(26) = 52$ kN

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{(52\times10^3)(523\times10^{-6})}{(120\times10^3)(1174\times10^{-6})} = 0{,}193$$

$\therefore \boxed{e = 193\text{ mm}}$

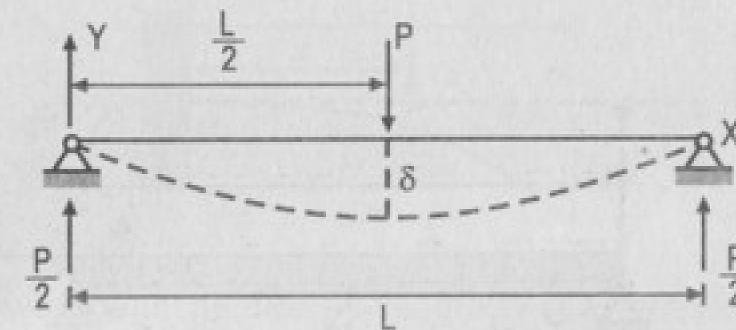
CAPÍTULO 6

DEFORMACIÓN EN VIGAS

601; 602; 603; 604: problemas ilustrativos.

605. Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada, de longitud L, con una carga concentrada P en el centro de su claro.

Resolución:



En función de la ecuación general de momentos, la ecuación:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{P}{2}\right)x - (P)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle \qquad \text{...(a)}$$

Integrando (a): $EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{P}{4}\right)x^2 - \left(\frac{P}{2}\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 + C_1$ ...(b)

Integrando (b): $EIy = \left(\frac{P}{12}\right)x^3 - \left(\frac{P}{6}\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 + C_1x + C_2$ ...(c)

Para determinar C_2, podemos ver que $x = 0$, $y = 0$, por lo tanto $C_2 = 0$.
La otra condición de apoyo es $x = L$, $y = 0$ resulta:

$$0 = \left(\frac{P}{L}\right)(L^3) - \left(\frac{P}{6}\right)\left(L - \frac{L}{2}\right)^3 + C_1(L) \text{ o } C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

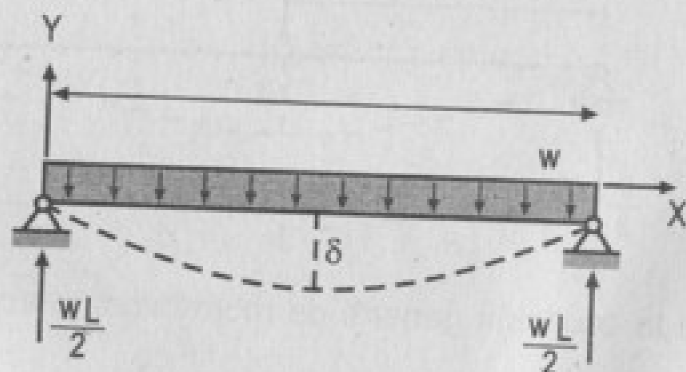
Debido a la simetría, la deflexión máxima sucede en el centro de luz, es decir, cuando $x = L/2$.

$$EIy_{máx} = \left(\frac{P}{12}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{P}{6}\right)\left\langle\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right\rangle^3 - \left(\frac{PL^2}{16}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$y_{máx} = -\dfrac{PL^3}{48EI}$; pero $\delta = -y$, por lo tanto: $\boxed{\delta = \dfrac{PL^3}{48EI}}$

606. Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada, de longitud L, que soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m aplicada en toda su longitud.

Resolución:



Calculando la ecuación general de momentos y luego integrándola para calcular la pendiente y deflexión, tenemos:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \left(\frac{w}{2}\right)x^2 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

$$EIy = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{x^4}{12}\right) + C_1x + C_2$$

La primera condición de apoyo es $x = 0$, $y = 0$, de donde tenemos que $C_2 = 0$.
La segunda condición de apoyo es $x = L$, $y = 0$.

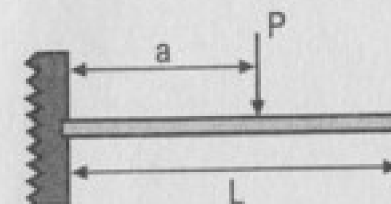
$$0 = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L^3}{6}\right) - \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^4}{12}\right) + C_1(L); \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

La deflexión máxima se da en el centro de luz de la viga, por lo tanto:

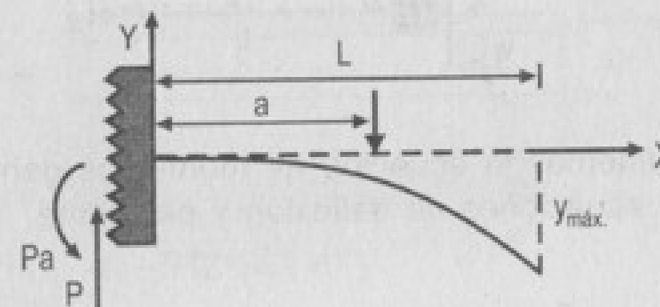
$$EI\,y_{máx.} = \left(\frac{wL}{12}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{w}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^4 - \left(\frac{wL^3}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$EI\,y_{máx.} = -\dfrac{5wL^4}{384}$; pero $\delta_{máx.} = -y_{máx.}$, por lo cual: $\boxed{\delta = \dfrac{5wL^4}{384EI}\ (m)}$

607. Determinar el máximo valor de EIy en la ménsula de la figura, cargada como se indica. Considerar el origen de coordenadas en el empotramiento.



Resolución:



La ecuación general de momentos es integrada dos veces para calcular la pendiente y deflexión de la viga.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = (P)x - (Pa) - (P)\langle x - a\rangle \qquad ...(1)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = (P)\left(\frac{x^2}{2}\right) - (Pa)(x) - (P)\frac{\langle x - a\rangle^2}{2} + C_1 \qquad ...(2)$$

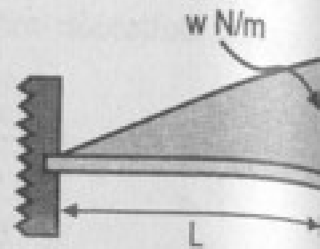
Debido a que la viga se encuentra empotrada en el extremo inicial: $x = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$, con lo cual $C_1 = 0$.

$$EIy = \left(\frac{P}{6}\right)(x^3) - \left(\frac{Pa}{2}\right)(x^2) - \left(\frac{P}{6}\right)\langle x - a\rangle^3 + C_2 \qquad ...(3)$$

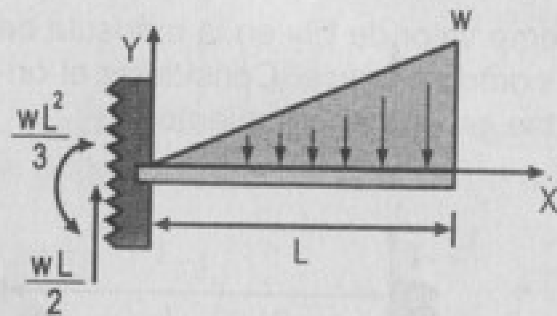
Por condición de apoyo: $x = 0$, $y = 0$; de donde obtenemos que $C_2 = 0$.
El $EIy_{máx.}$ sucede en el extremo libre de la ménsula, por lo tanto, debemos evaluar la expresión (3) en $x = L$.

$$EIy_{máx.} = \frac{PL^3}{6} - \frac{PaL^2}{2} - \left(\frac{P}{6}\right)(L - a)^3$$

608. Obtener la ecuación de la elástica de la ménsula de la figura sometida a una carga triangular que varía desde cero en el empotramiento hasta w N/m en el extremo libre.



Resolución:



Del equilibrio tenemos la ecuación de momentos general a partir de la cual calculamos las ecuaciones de deflexión y pendiente.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \left(\frac{wL^2}{3}\right) - \left(\frac{w}{6L}\right)x^3$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{wL^2}{3}\right)(x) - \left(\frac{w}{6L}\right)\left(\frac{x^4}{4}\right) + C_1$$

De la condición del problema, en el extremo empotrado $\frac{dy}{dx} = 0$; por lo tanto: $C_1 = 0$.

$$EIy = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{x^3}{6}\right) - \left(\frac{wL^2}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{w}{6L}\right)\left(\frac{x^5}{20}\right) + C_2$$

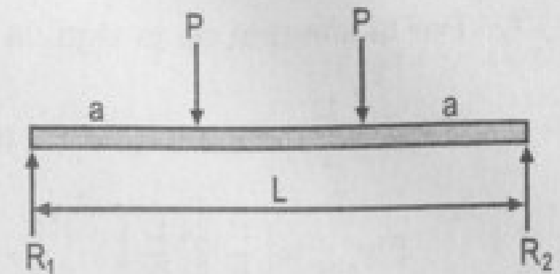
Cuando x = 0 (en el empotramiento) también se cumple que y = 0, por lo tanto $C_2 = 0$.

$$EIy = \left(\frac{wL}{12}\right)x^3 - \left(\frac{wL^2}{6}\right)x^2 - \left(\frac{w}{120L}\right)x^5$$

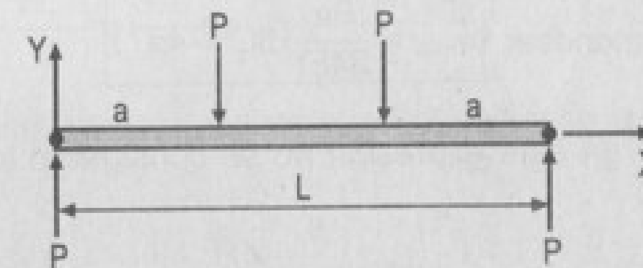
De donde:

$$\boxed{y = \frac{w}{20EI}\left[\frac{Lx^3}{2} - L^2x^2 + \frac{x^5}{20L}\right]}$$

609. Como se indica en la figura, una viga simplemente apoyada sostiene dos cargas concentradas, simétricamente colocadas. Calcular la deflexión máxima δ y comparar el resultado con la flecha en el centro, del caso 7 de la tabla 6-2. Contrastar el resultado obtenido, poniendo a = L/2 y comparándolo con la resolución del problema 605.



Resolución:



Del equilibrio, la ec. general de momentos resulta:

$$M = (P)x - (P)\langle x-a\rangle - P\langle x-L+a\rangle$$

Integrando dos veces dicha ecuación tenemos:

$$EI\frac{d^2y}{dx} = (P)x - (P)\langle x-a\rangle - P\langle x-L+a\rangle$$

$$EI\frac{dy}{dx} = (P)\left(\frac{x^2}{2}\right) - (P)\frac{\langle x-a\rangle^2}{2} - (P)\frac{\langle x-L+a\rangle^3}{6} + C_1$$

$$EIy = (P)\left(\frac{x^3}{6}\right) - (P)\frac{\langle x-a\rangle^3}{6} - (P)\frac{\langle x-L+a\rangle^3}{6} + C_1x + C_2$$

En la presente viga tenemos dos condiciones de borde:

x = 0, y = 0; de donde de obtiene que $C_2 = 0$.

x = L, y = 0

$$0 = \left(\frac{P}{6}\right)[L^3 - (L-a)^3 - (L-L+a)^3] + C_1(L)$$

De donde obtenemos: $C_1 = \left(-\frac{P}{6}\right)[3La - 3a^2]$

Entonces: $EIy = \left(\frac{P}{6}\right)\left[x^3 - \langle x-a\rangle^3 - \langle x-L+a\rangle^3 - (3La-3a^2)x\right]$ ...(1)

Por la simetría de la viga, la deflexión máxima sucede en el eje de simetría

$(x = \frac{L}{2})$. Reemplazando en (1):

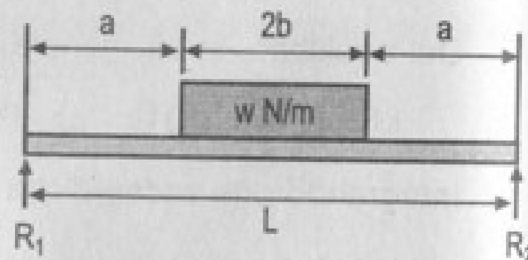
$$EIy_{máx.} = \left(\frac{P}{6}\right)\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2} - a\right)^3 - (3La - 3a^2)\left(\frac{L}{2}\right)\right] \quad ...(*)$$

$$EIy_{máx.} = -\left(\frac{Pa}{24}\right)(3L^2 - 4a^2)$$

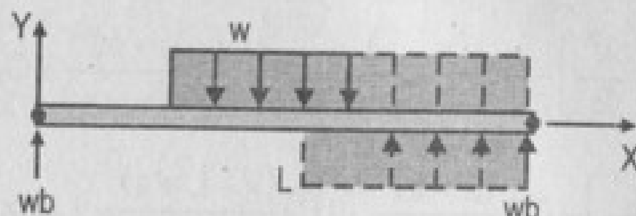
Como $\delta = -y$, entonces: $\boxed{\delta_{máx} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2)}$

(*) Observación: en esta expresión no se consideran los ⟨ ⟩ que son negativos.

610. La viga apoyada de la figura soporta una carga uniforme w, simétricamente distribuida, en una porción de su longitud. Determinar la deflexión máxima y confrontar el resultado, poniendo a = 0, con la solución del problema 606.



Resolución:



La ecuación general de momentos resulta del gráfico adjunto.

$$M = (wb)x - w\frac{\langle x-a\rangle^2}{2} + w\frac{\langle x-a-2b^2\rangle}{2} \quad ...(1)$$

Calculamos la ec. de pendiente y deflexión a partir de (1):

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI\frac{dy}{dx} = (wb)\frac{x^2}{2} - \left(\frac{w}{2}\right)\frac{\langle x-a\rangle^3}{3} + \left(\frac{w}{2}\right)\frac{\langle x-a-2b\rangle^3}{3} + C_1$$

$$EIy = \left(\frac{wb}{6}\right)x^3 - \left(\frac{w}{24}\right)\langle x-a\rangle^4 + \left(\frac{w}{24}\right)\langle x-a-2b\rangle^4 + C_1x + C_2$$

De las condiciones de borde:

$x = 0$, $L = 0$; entonces $C_2 = 0$.

De $x = L$, $y = 0$; obtenemos C_1:

$$0 = \left(\frac{wb}{6}\right)L^3 - \left(\frac{w}{24}\right)(L-a)^4 + \left(\frac{w}{24}\right)(L-a-2b)^4 + C_1(L)$$

$$C_1 = \left(\frac{w}{6}\right)\left[\frac{L^3}{8} - \frac{3L^2a}{4} + \frac{3La^2}{2} - a^3\right] - \frac{wbL^2}{8}$$

La deflexión máxima sucede cuando $x = L/2$ debido a la simetría de la viga.

$$EIy_{máx.} = \left(\frac{wb}{6}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{w}{24}\right)\left[\left(\frac{L}{2} - a\right)^4\right] + C_1\left(\frac{L}{2}\right)$$

De donde:

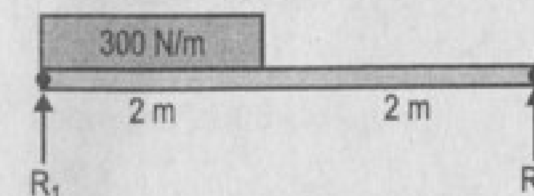
$$EIy_{máx.} = \left(\frac{w}{24}\right)\left[\frac{3L^4}{16} - L^3a - a^4 - bL^3\right]; \text{ como } \delta = -y, \text{ entonces:}$$

$$\delta = \left(\frac{w}{24EI}\right)\left[L^3a + a^4 + bL^3 - \frac{3L^4}{16}\right] \quad ...(2)$$

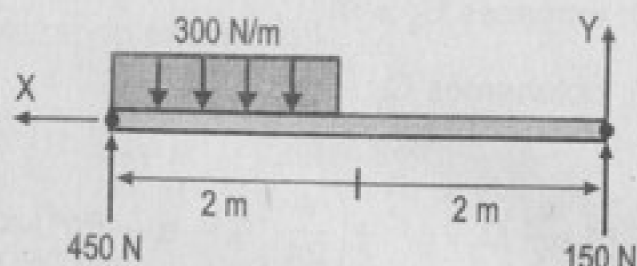
Si $a = 0$, entonces $2b = L$, $b = 1/2$.

Reemplazamos en (2): $\boxed{\delta = \frac{5wL^4}{384}}$

611. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro del claro en la viga representada en la figura. Si $E = 10$ GN/m², determinar el valor de I necesario para que la deflexión en el centro no sobrepase 1/360 del claro. *Indicación:* considerar el origen de x en el apoyo derecho siendo x positiva hacia la izquierda.



Resolución:



Considerando el sistema coordenado mostrado en la figura, tenemos que:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 150x - 150\ \langle x-2\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 150\frac{x^2}{2} - 150\frac{\langle x-2\rangle^3}{3} + C_1$$

$$EIy = 25x^3 - \frac{25}{2}\ \langle x-2\rangle^4\ + C_1 + C_2$$

Usando las condiciones de borde:

$x = 0$, $y = 0$; de donde $C_2 = 0$

$x = 4$, $y = 0$.

$$0 = 1600 - \frac{25}{2}(16) + C_1(4) \quad \Rightarrow \quad C_1 = -350\ N.m^2$$

Luego:

$$EIy = 25x^3 - \frac{25}{2}\langle x-2\rangle^4 - 350x \qquad ...(1)$$

Del problema tenemos:

$$E = 10\ GN/m^2\ ,\ \delta\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{360}\right)(4) = \frac{1}{90}\ m$$

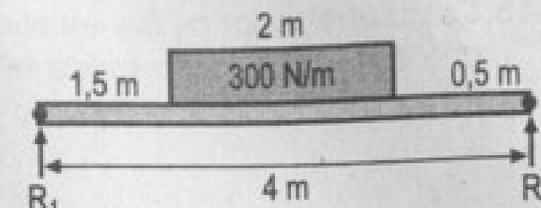
$$EIy_{(2)} = 25\times2^3 - \frac{25}{2}\ \langle 2-2\rangle^4\ - (350)(2) = -500$$

$EIy_{(2)} = -500$, entonces $\boxed{EI\ \delta_{(2)} = 500\ N.m^3}$ ...(2)

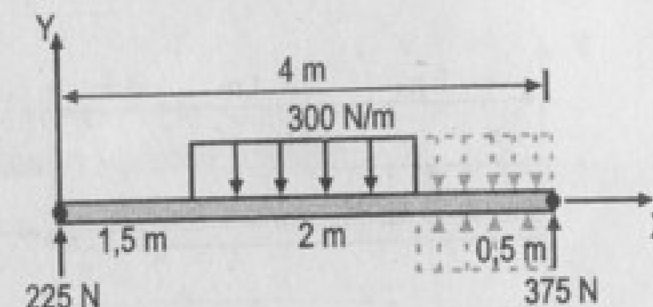
De (2):

$$I = \frac{500}{\delta.E} = \frac{500}{\left(\frac{1}{90}\right)(10^{10})} = 45\ 000\times10^{-10}\ m^4 \ \Rightarrow\ \boxed{I = 4{,}5\times10^6\ mm^4}$$

612. Calcular el valor de EIδ en el centro de la viga cargada como se indica en la figura.



Resolución:



A partir de la ec. de momentos general calculamos la ec. de la pendiente y deflexión:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 225x - 150\ \langle x-1{,}5\rangle^2 + 150\ \langle x-3{,}5\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{225x^2}{2} - \frac{150}{3}\langle x-1{,}5\rangle^4 + \frac{150}{3}\langle x-3{,}5\rangle^4 + C_1$$

$$EIy = \frac{225x^3}{6} - \frac{150}{12}\langle x-1{,}5\rangle^4 + \frac{150}{12}\langle x-3{,}5\rangle^4 + C_1x + C_2$$

De las condiciones de borde:

$x = 0$, $y = 0$; por lo tanto $C_2 = 0$

$x = 4$ m, $y = 0$; de donde:

$$0 = \frac{225}{6}(4^3) - \frac{150}{12}\langle 4-1{,}5\rangle^4 + \frac{150}{12}(4-3{,}5)^4 + C_1(4) \Rightarrow C_1 = -478{,}13\ N.m^2$$

Por lo tanto:

$$EIy = \frac{225x^3}{6} - \frac{150}{12}\langle x-1{,}5\rangle^4 + \frac{150}{12}\langle x-3{,}5\rangle^4 - 478{,}13x$$

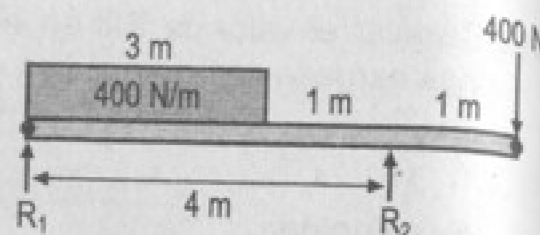
En el centro de luz, x = 2 m:

$$EIy_{(2)} = \frac{225}{6}(2^3) - \frac{150}{12}(0{,}5)^4 - 478{,}13(2)$$

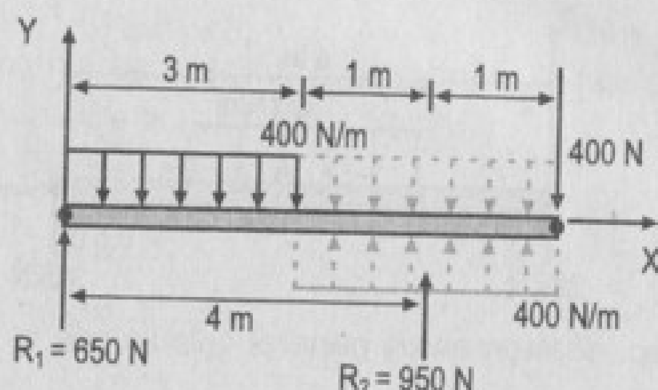
$EIy_{(2)} = -657{,}04\ N.m^3$; pero como $\delta = -y$, entonces:

$\boxed{EI\ \delta = 657{,}04\ N.m^3}$

613. Calcular el valor de Ely en el extremo derecho de la viga como indica la figura.



Resolución:



De la figura encontramos la ec. general de momentos:

$$M = 650x - 200x^2 + 200\ \langle x-3\rangle^2 + 950\ \langle x-4\rangle \qquad ...\ (1)$$

A partir de (1) encontramos la ecuación de la pendiente y la flexión mediante integraciones sucesivas:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 650x - 200x^2 + 200\langle x-3\rangle + 950\langle x-4\rangle$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 325x^2 - \frac{200}{3}x + \frac{200}{3}\langle x-3\rangle^3 + 475\ \langle x-4\rangle^2 + C_1$$

$$Ely = \frac{325}{3}x^3 - \frac{200x^4}{12} + \frac{200}{12}\langle x-3\rangle^4 + \frac{475}{3}\ \langle x-4\rangle^3 + C_1x + C_2$$

De las condiciones de borde:

$x = 0$, $y = 0$; por lo tanto $C_2 = 0$

De $x = 4$, $y = 0$; tenemos:

$$0 = \left(\frac{325}{3}\right)(4^3) - \left(\frac{200}{12}\right)(4^4) + \left(\frac{200}{12}\right)(1^4) + 0 + C_1(4) \Rightarrow C_1 = -\frac{4025}{6}\ N.m^2$$

Entonces:

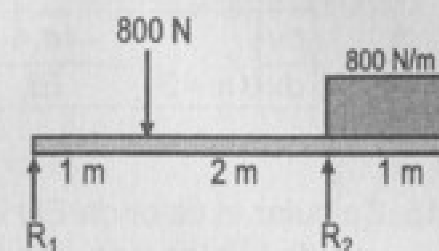
$$Ely = \frac{325}{3}x^3 - \frac{50}{3}x^4 + \frac{50}{3}\langle x-3\rangle^4 + \frac{475}{3}\langle x-4\rangle^3 - \frac{4025}{6}x$$

En el extremo derecho de la viga: $x = 5$ m

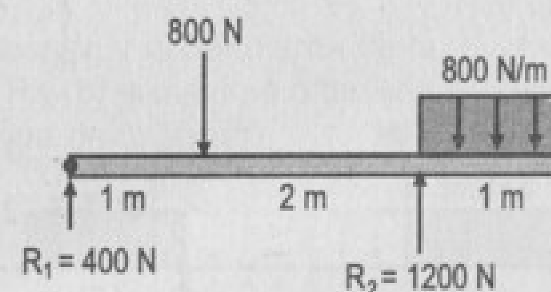
$$Ely_{(5)} = \left(\frac{325}{3}\right)(5^3) - \left(\frac{50}{3}\right)(5^4) + \left(\frac{50}{3}\right)(2^4) + \frac{475}{3} - \left(\frac{4025}{6}\right)(5)$$

$$\boxed{Ely_{(5)} = 195{,}8\ N.m^3}$$

614. Calcular el pendiente de la elástica en el apoyo derecho de la viga con voladizo de la figura.



Resolución:



La ec. general de momentos es:

$$M = 400x - 800\langle x-1\rangle + 1200\langle x-3\rangle - 400\ \langle x-3\rangle^2 \qquad ...(1)$$

De (1):

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 400x - 800\ \langle x-1\rangle + 1200\ \langle x-3\rangle - 400\langle x-3\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 200x^2 - 400\ \langle x-1\rangle^2 + 600\ \langle x-3\rangle^2 - \frac{400}{3}\ \langle x-3\rangle^2 + C_1 \qquad ...(2)$$

$$Ely = \frac{200}{3}x^3 - \frac{400}{3}\ \langle x-1\rangle^3 + 200\ \langle x-3\rangle^3 - \frac{100}{3}\ \langle x-3\rangle^4 + C_1x + C_2\ ...(3)$$

De las condiciones de borde: $x = 0$, $y = 0$, por lo tanto $C_2 = 0$.

Cuando $x = 3$ m , $y = 0$:

$$0 = \left(\frac{200}{3}\right)(3^3) - \left(\frac{400}{3}\right)(2^3) + 200\ (3-3)^3 - \frac{100}{3}\ (3-3)^4 + C_1(3)$$

$$C_1 = -\frac{2200}{9}\ N.m^2$$

Como nos piden la pendiente en el apoyo derecho usamos: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x=3)}$

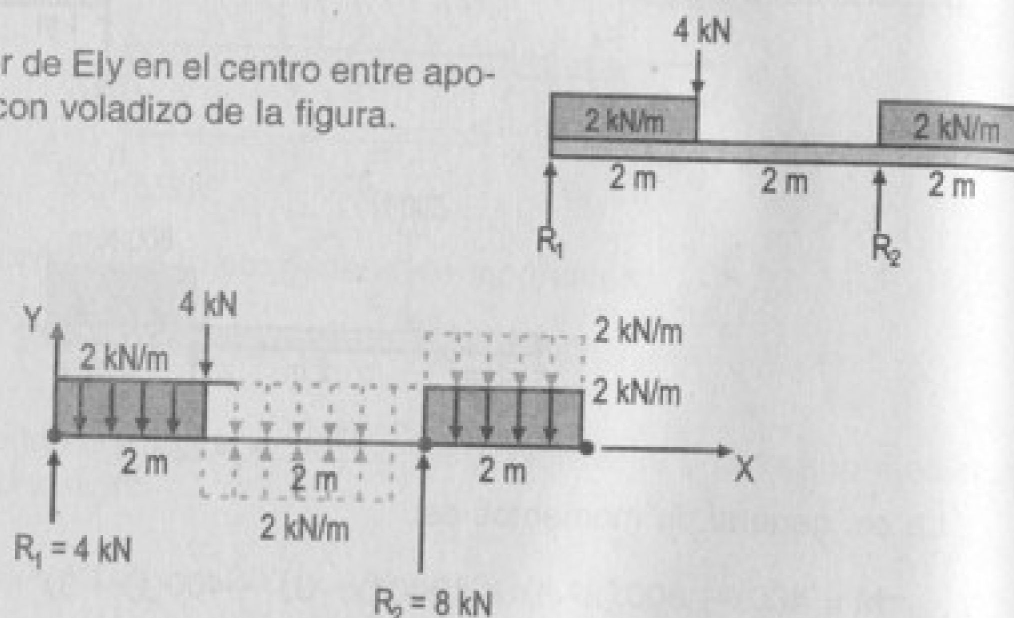
En ec. (2):

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x=3)} = 1800 - 1600 + 0 - 0 - \frac{2200}{9}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x=3)} = \frac{-44,44}{EI}}$$

615. Calcular el valor de Ely en el centro entre apoyos de la viga con voladizo de la figura.

Resolución:



De la ec. general de momentos que podemos obtener de la figura:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 4x - x^2 - 4\langle x-2\rangle + \langle x-2\rangle^2 - \langle x-4\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 2\langle x-2\rangle^2 + \frac{\langle x-2\rangle^3}{3} - \frac{\langle x-4\rangle^3}{3} + C_1$$

$$Ely = \frac{2x^3}{3} - \frac{x}{12} - 2\frac{\langle x-2\rangle^3}{3} + \frac{\langle x-2\rangle^4}{12} - \frac{\langle x-4\rangle^4}{12} + C_1x + C_2$$

Considerando las condiciones de borde:

$x=0$, $y=0$; por lo tanto $C_2 = 0$.

$x=4$, $y=0$; de donde C_1 es:

$$0 = \left(\frac{2}{3}\right)(4^3) - \left(\frac{1}{12}\right)(4^4) - \left(\frac{2}{3}\right)(2^3) + \left(\frac{1}{12}\right)(2^4) - 0 + C_1(4)$$

Por lo cual $C_1 = -\frac{26}{6}$ kN.m²

Finalmente:

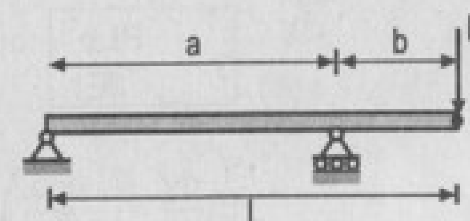
$$Ely = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{12} - \frac{2\langle x-2\rangle^3}{3} + \frac{\langle x-2\rangle^4}{12} - \frac{\langle x-4\rangle^4}{12} - \frac{26}{6}x$$

El valor de Ely en el centro entre apoyos, sucede cuando x = 2 m, entonces:

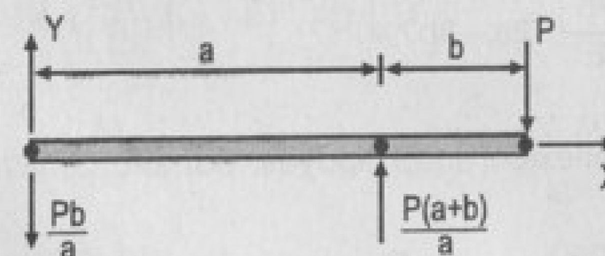
$$Ely_{(2)} = \left(\frac{2}{3}\right)(2^3) - \left(\frac{1}{12}\right)(2^4) - 0 - 0 - 0 - \left(\frac{26}{6}\right)(2)$$

$$\boxed{Ely_{(2)} = -4,66 \text{ kN.m}^3}$$

616. Determinar (a) la ordenada y la pendiente de la elástica bajo la carga P y (b) la máxima deflexión entre apoyos, en la viga de la figura.



Resolución:



De la viga tenemos que:

$$M = -\frac{Pb}{a}(x) + \frac{P(a+b)}{a}\langle x-a\rangle$$

Sabemos que:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{-Pb}{2a}\right)x^2 + \left(\frac{P(a+b)}{a}\right)\langle x-a\rangle \qquad ...(1)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{-Pb}{2a}\right)x^2 + \left(\frac{P(a+b)}{2a}\right)\langle x-a\rangle^2 + C_1 \qquad ...(2)$$

$$EI\,y = \left(\frac{-Pb}{6a}\right)x^3 + \left(\frac{P(a+b)}{6a}\right)\langle x-a\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad ...(3)$$

De las condiciones de borde:

$x = 0,\ y = 0$; por lo cual $C_2 = 0$.

$x = a,\ y = 0$; de donde calculamos C_1:

$$0 = \left(-\frac{Pb}{6a}\right)(a^3) + 0 + C_1(a) \Rightarrow C_1 = \frac{Pba}{6}$$

(a) Nos piden la ordenada y la pendiente debajo de P, esto es cuando $x = L = a + b$:

$$Ely = \left(\frac{-Pb}{6a}\right)L^3 + \left(\frac{P(L)}{6a}\right)(a+b-a)^3 + \frac{Pba(L)}{6}$$

$$\boxed{y = -\frac{PLb^2}{3EI}}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{Pb}{2a}\right)L^2 + \left(\frac{P(L)}{2a}\right)(b^2) + \frac{Pba}{6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{6EI}(-2a-3b)$$

(b) La máxima deflexión entre apoyos, por ello, igualamos $\frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = \left(\frac{-Pb}{2a}\right)x^2 + 0 + \frac{Pba}{6}$$

$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (este punto se encuentra entre apoyos)

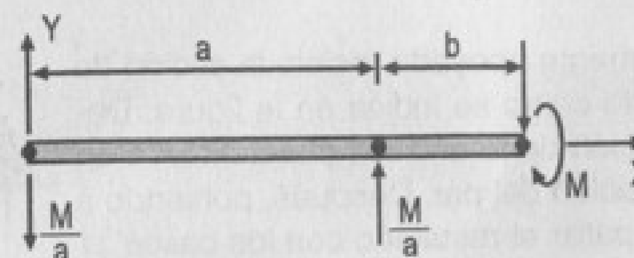
Reemplazando $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ en (3):

$$Ely_{máx} = \left(-\frac{Pb}{6a}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 + 0 + \frac{Pba}{6}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{Ely_{máx} = \frac{Pba^2}{9\sqrt{3}}}$$

617. Sustituir la carga P del problema por un par M aplicado en el extremo derecho, y determinar la pendiente y ordenada en el mismo punto.

Resolución:



Sabemos que: $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$, entonces:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\frac{M}{a}\right)(x) + \left(\frac{M}{a}\right)\langle x-a\rangle \qquad ...(1)$$

Integrando tenemos:

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{M}{2a}\right)(x^2) + \left(\frac{M}{2a}\right)\langle x-a\rangle^2 + C_1 \qquad ...(2)$$

$$Ely = \left(-\frac{M}{6a}\right)(x^3) + \left(\frac{M}{6a}\right)\langle x-a\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad ...(3)$$

De las condiciones de borde:

$x = 0,\ y = 0$; lo que nos da $C_2 = 0$

$x = a,\ y = 0$; obtenemos C_1

Entonces:

$$0 = \left(-\frac{M}{6a}\right)(a^2) + 0 + C_1(a) \Rightarrow C_1 = \frac{Ma}{6}$$

Nos piden $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L}$, $\left.\delta\right|_{x=L}$; por lo tanto de (3):

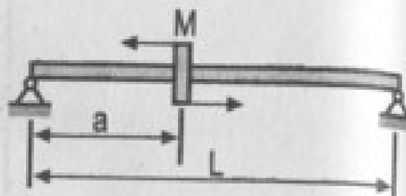
$$Ely|_{x=L} = \left(-\frac{M}{6a}\right)L^3 + \left(\frac{M}{6a}\right)(b)^3 + \frac{Ma}{6}(a+b)$$

$$Ely|_{x=L} = -\frac{Mb(2L+b)}{6} \Rightarrow \boxed{\delta I_{x=L} = \frac{Mb(2L+b)}{6EI}}$$

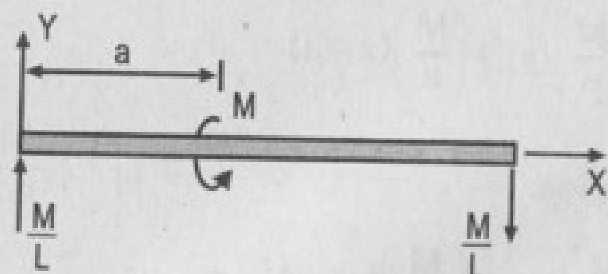
De (2):

$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \left(-\frac{M}{2a}\right)(L^2) + \left(\frac{M}{2a}\right)(b)^2 + \frac{Ma}{6} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = -\frac{M(L+2b)}{3EI}}$$

618. Una viga simplemente apoyada resiste la acción de un par M aplicado como se indica en la figura. Determinar la ecuación de la elástica y la deflexión en el punto de aplicación del par. Después, poniendo a = L y a = 0, comparar el resultado con los casos 11 y 12 de la Tabla 6-2.



Resolución:



Del D.C.L. de la viga:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{M}{L}\right)x - M\,\langle x-a\rangle^0 \Rightarrow EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{M}{2L}\right)x^2 - M\,\langle x-a\rangle + C_1,$$

$$Ely = \left(\frac{M}{6L}\right)x^3 - \left(\frac{M}{2}\right)\langle x-a\rangle^2 + C_1x + C_2$$

Con las condiciones de borde obtenemos:

$x = 0$, $y = 0$; por lo tanto $C_2 = 0$.

Cuando $x = L$, $y = 0$:

$$0 = \left(\frac{M}{6L}\right)(L^3) - \left(\frac{M}{2}\right)(L-a)^2 + C_1(L) \Rightarrow C_1 = \frac{ML}{3} - Ma + \frac{Ma^2}{2L}$$

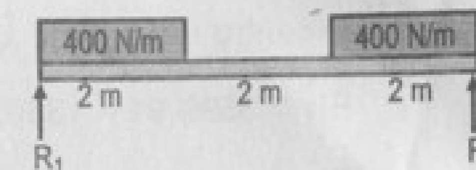
Por lo tanto:

$$\boxed{y = \left(\frac{1}{EI}\right)\left[\left(\frac{M}{6L}\right)x^3 - \left(\frac{M}{2}\right)\langle x-a\rangle^2 + \left(\frac{ML}{3} - Ma + \frac{Ma^2}{2L}\right)x\right]}$$ Ec. de la elástica

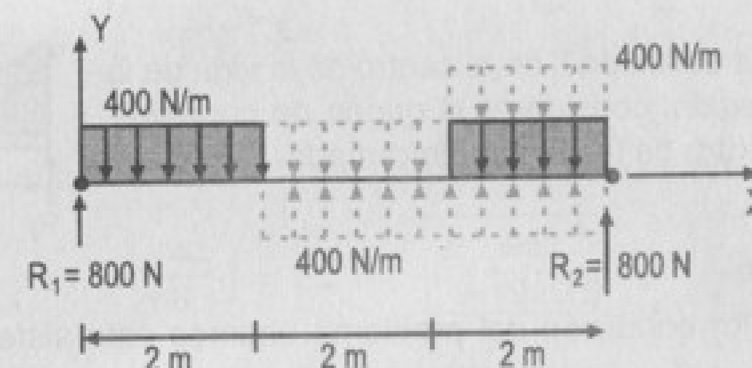
Deflexión en el punto de aplicación del par, es decir, cuando x = a.

$$Ely = \frac{Ma^3}{6L} - 0 + \frac{MLa}{3} - Ma^2 + \frac{Ma^3}{2L} \Rightarrow \boxed{Ely = \frac{Ma}{3L}(L^2 - 3aL + 2a^2)}$$

619. Determinar el valor de Ely en el centro de la viga representada en la figura (*Indicación*: use el hecho de que, debido a la simetría, la pendiente en el punto medio es nula.)



Resolución:



La ecuación general de momentos es:

$$M = 800x - \frac{400x^2}{2} + \frac{400}{2}\langle x-2\rangle^2 - \frac{400}{2}\langle x-4\rangle^2$$

Aplicando la ecuación diferencial de la elástica e integrando:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 800x - 200x^2 + 200\langle x-2\rangle^2 - 200\,\langle x-4\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 400x^2 - 66{,}67\,x^3 + 66{,}67\langle x-2\rangle^3 - 66{,}67\,\langle x-4\rangle^3 + C_1$$

Por indicación del problema, usando la simetría de la viga:

$x = 3$, $\frac{dy}{dx} = 0$

$0 = 3600 - 1800{,}09 + 66{,}67 + C_1$

$C_1 = -1856{,}58$ N.m²

$$Ely = 133{,}33x^3 - 16{,}67x^4 + 16{,}67\,\langle x-2\rangle^4 - 16{,}67\langle x-4\rangle^4 - 1856{,}58x + C_2$$

Por condición de borde:

$x = 0$, $y = 0$; de donde $C_2 = 0$.

Finalmente:

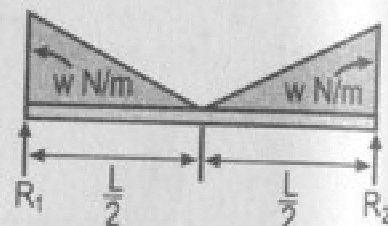
$$Ely = 133{,}33x^3 - 16{,}67x^4 + 16{,}67\langle x-4\rangle^4 - 16{,}67\langle x-4\rangle^4 - 1856{,}58x$$

En el centro de la viga: $x = 3$ m

$$Ely = 3599{,}91 - 1350{,}27 + 16{,}67 - 0 - 5569{,}74$$

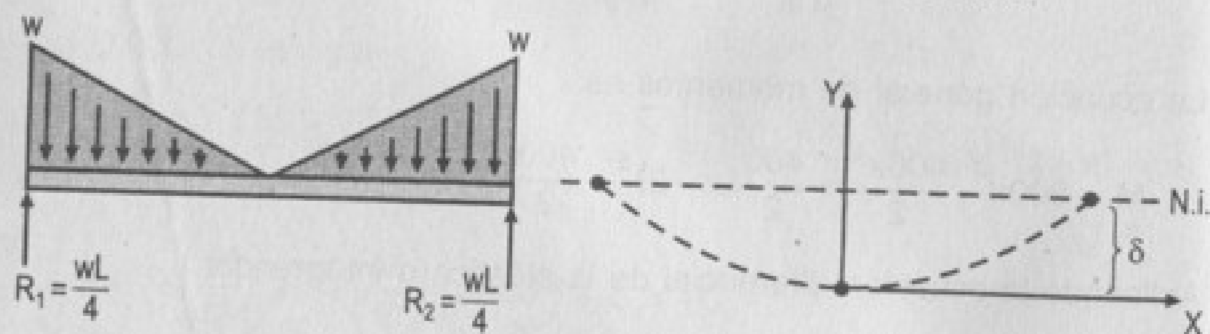
$$Ely = -3303{,}43 \text{ N.m}^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ely = -3{,}3 \text{ kN.m}^3}$$

620. Determinar la deflexión δ en el centro de la viga de la figura. *Indicación:* considerar el origen de coordinación en el centro de la viga ya deformada.

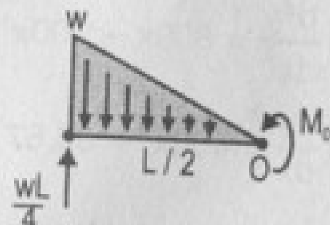


Resolución:

Por condición del problema usamos este sistema:

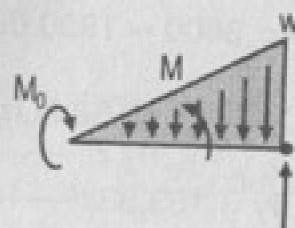


Trabajando en el lado izquierdo de la viga.



Del equilibrio: $M_O = \dfrac{wL^2}{24}$

Ahora calculamos la ecuación general de momentos para el tramo derecho:



Del equilibrio: $M = \dfrac{wL^2}{24} - \dfrac{2wx^3}{6L}$

Entonces: $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{wL^2}{24} - \dfrac{2wx^3}{6L}$

Integrando tenemos:

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{wL^2}{24}\right)x - \left(\frac{w}{12L}\right)x^4 + C_1$$

Por la ubicación del sistema de coordenadas:

$$x = 0\ ;\quad \frac{dy}{dx} = 0;\ \text{por lo cual } C_1 = 0\ ;\ Ely = \left(\frac{wL^2}{48}\right)x^2 - \left(\frac{w}{60L}\right)x^5 + C_2$$

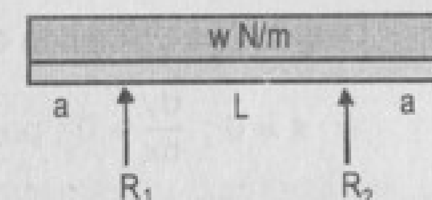
Nuevamente por la ubicación del sistema de coordenadas:

$$x = 0,\ \ y = 0\ ;\ \text{por lo tanto } C_2 = 0\ ;\quad Ely = \left(\frac{wL^2}{48}\right)x^2 - \left(\frac{w}{60L}\right)x^5$$

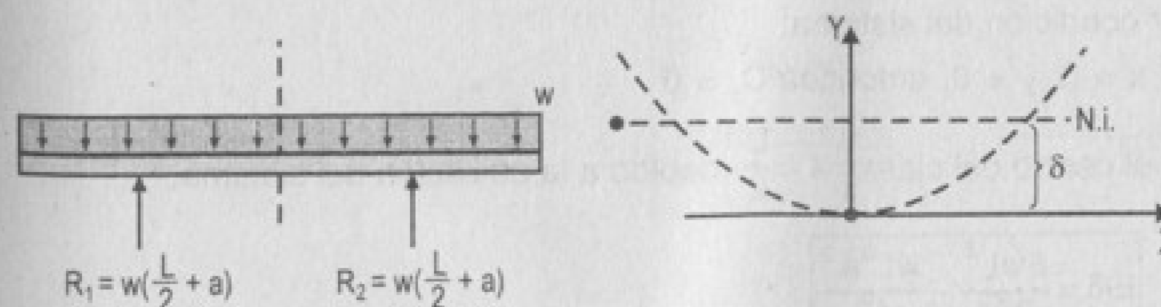
La deflexión en el centro de la viga de obtiene al considerar $x = L/2$.

$$EI\delta = \left(\frac{wL^2}{48}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{w}{60L}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{9wL^4}{1920EI}}$$

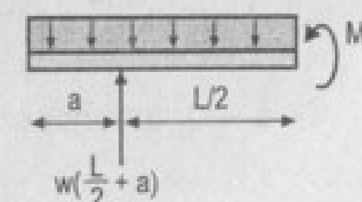
621. Calcular EIδ en el centro del claro, en la viga de la figura. Confrontar el resultado obtenido, haciendo a = 0, con el resultado del problema 606. Téngase en cuenta la misma indicación del problema anterior.



Resolución:



Por condición del problema, usamos el siguiente sistema.

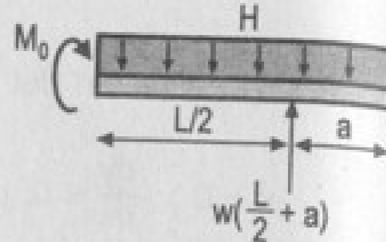


Trabajando en el lado izquierdo de la viga:

Por equilibrio:

$$M_o = \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{4} - a^2\right)$$

Ahora, trabajando en el lado derecho de la viga:



Por equilibrio:

$$M = \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^3}{4} - a^2\right) + w\left(\frac{L}{2}+a\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle - \left(\frac{w}{2}\right)x^2 \qquad ...(1)$$

Aplicando la ecuación diferencial de la elástica:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{4} - a^2\right) - \frac{wx^2}{2} + w\left(\frac{L}{2}+a\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle \qquad ...(2)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{4} - a^2\right)x - \frac{w}{6}x^3 + \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}+a\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 + C_1 \qquad ...(3)$$

Debido a la ubicación del sistema de coordenadas:

$x = 0$; $\frac{dy}{dx} = 0$; por lo cual $C_1 = 0$

$$Ely = \left(\frac{w}{4}\right)\left(\frac{L^2}{4} - a^2\right)x^2 - \left(\frac{w}{24}\right)x^4 + \left(\frac{w}{6}\right)\left(\frac{L}{2}+a\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + C_2 \qquad ...(4)$$

Por condición del sistema:

$x = 0$; $y = 0$, entonces $C_2 = 0$

En el centro del claro: $\left(x = \frac{L}{2}\right)$ debido a la ubicación del sistema.

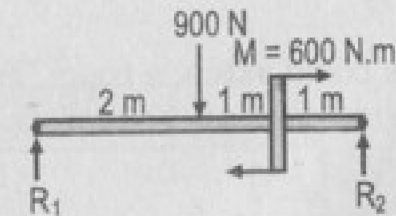
$$\boxed{EI\delta = \frac{5wL^4}{384} - \frac{wL^2a^2}{16}}$$

Si $a = 0$, entonces: $\boxed{EI\delta = \frac{5wL^4}{384}}$

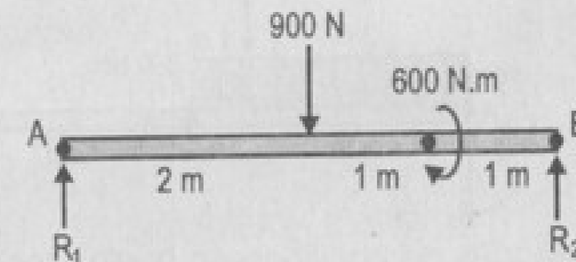
622; 623: problemas ilustrativos.

Calcular en cada una de las vigas de los problemas 624 a 629 el momento del área del diagrama de momentos flexionantes comprendidos entre los apoyos respecto de cada uno de estos.

624. Viga cargada como indica la figura.



Resolución:



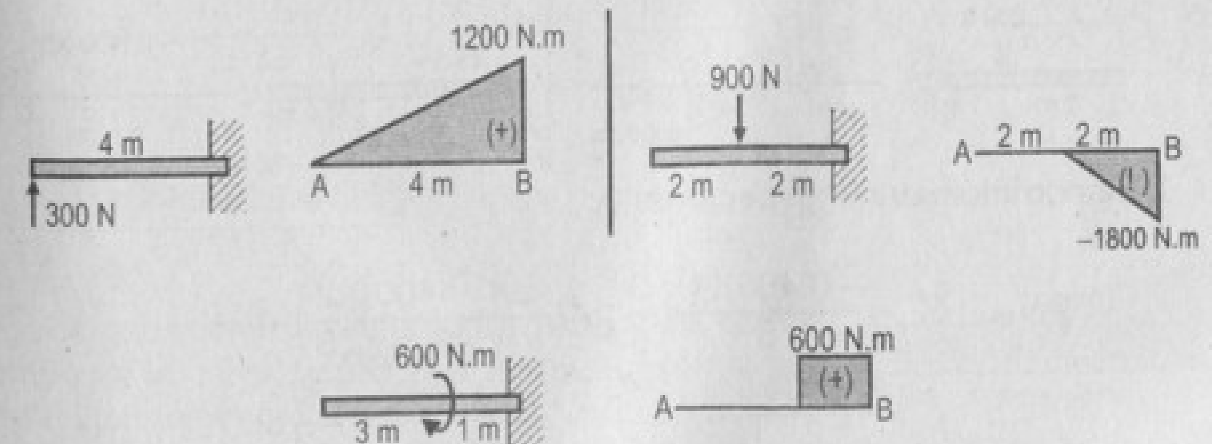
Del equilibrio en el elemento tenemos (tomando momentos en A):

$R_2(4) = (900)(2) + 600$

$R_2 = 600$ N

Del equilibrio de fuerzas verticales tenemos $R_1 = 300$ N.

Realizando los esquemas de cargas equivalentes en volado y diagrama de momentos por partes:

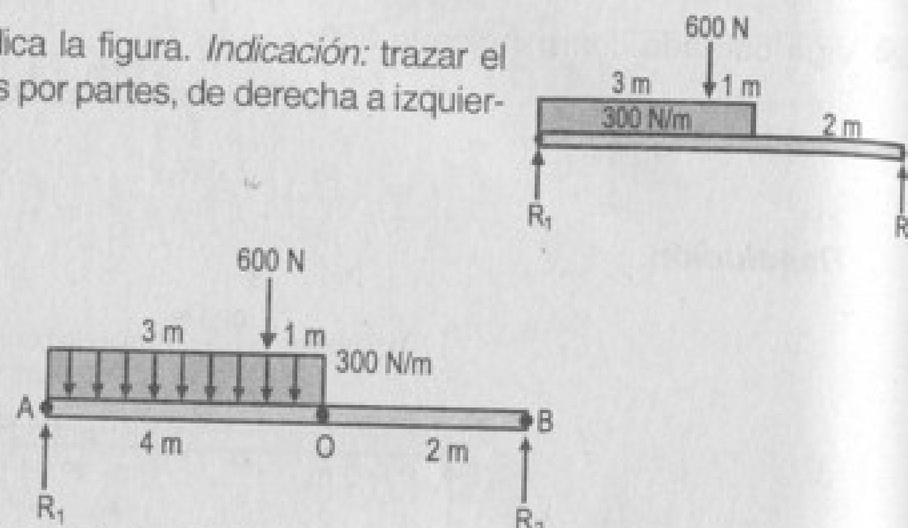


Tomando momentos respecto de A a los diagramas de momentos por partes:

$$(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_A=\frac{(4)(1200)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4)-\frac{(1800)(2)}{2}\left(2+\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right)+(600)\left(3+\frac{1}{2}\right)$$

De donde: $\boxed{(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A=2500\ \text{N.m}^3}$

625. Viga cargada como indica la figura. *Indicación:* trazar el diagrama de momentos por partes, de derecha a izquierda.



Resolución:

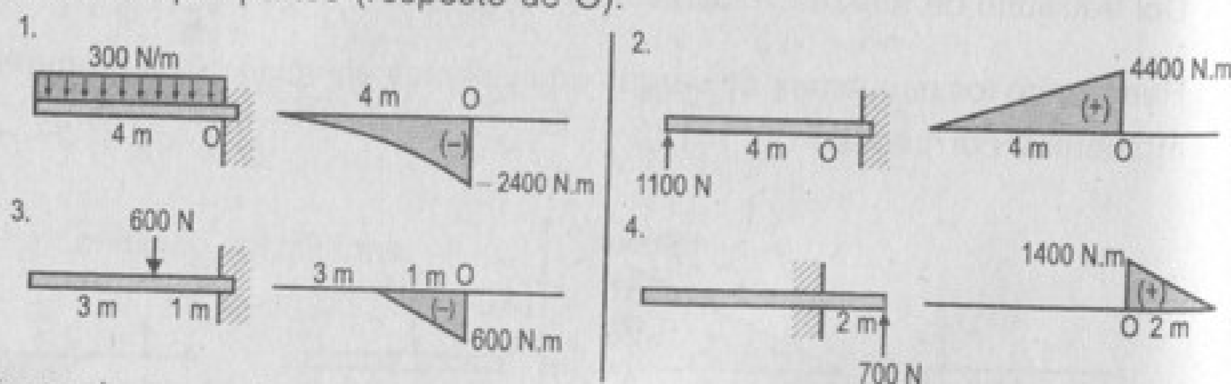
Utilizando las ecuaciones de equilibrio en la viga tenemos ($\Sigma M_A = 0$)

$R_2(6) = (600)(3) + (300)(4)(2) \Rightarrow R_2 = 700$ N

Del equilibrio de fuerzas verticales:

$R_1 + R_2 = 600 + (300)(4) \Rightarrow R_1 = 1100$ N

Utilizamos las cargas equivalentes en volado y elaboramos los diagramas de momentos por partes (respecto de O).

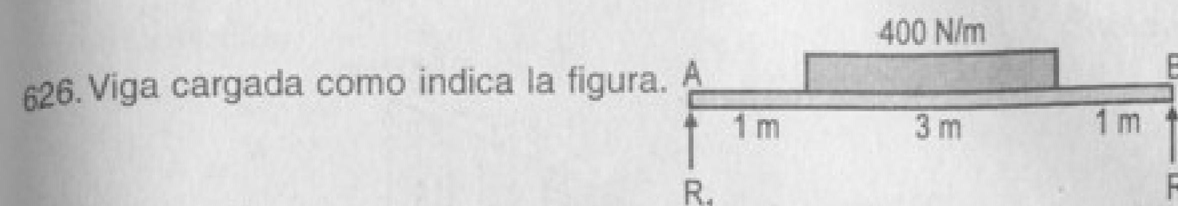


Tomando momentos respecto de A:

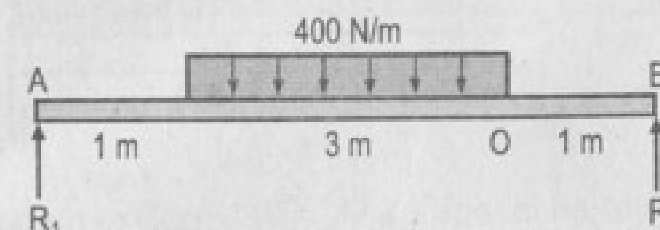
$$(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_A=\frac{-(2400)(4)}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(4)+\frac{(4)(4400)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4)-\frac{(1)(600)}{2}\left(3+\frac{2}{3}(1)\right)+\frac{(2)(1400)}{2}\left(4+\frac{1}{3}(2)\right)$$

$(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = 19\ 300\ \text{N.m}^3 \Rightarrow \boxed{(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = 19{,}3\ \text{kN.m}^3}$

626. Viga cargada como indica la figura.

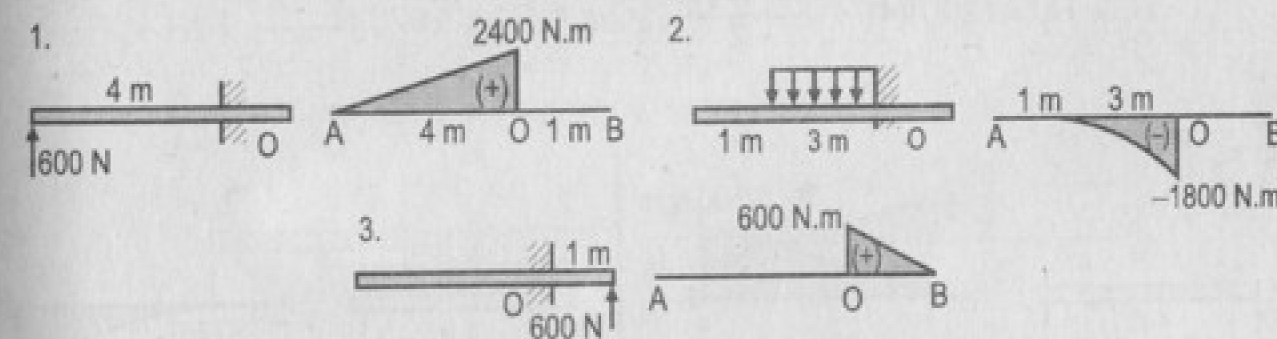


Resolución:



Del equilibrio por simetría:

$R_1 = R_2 = R \Rightarrow 2R = (400)(3) = 1200 \Rightarrow R = 600$ N

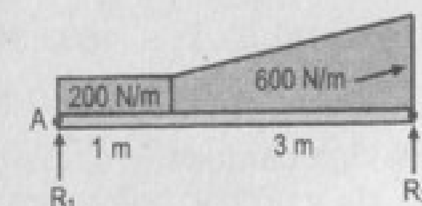


Tomando momentos respecto a B de los diagramas de momentos por partes:

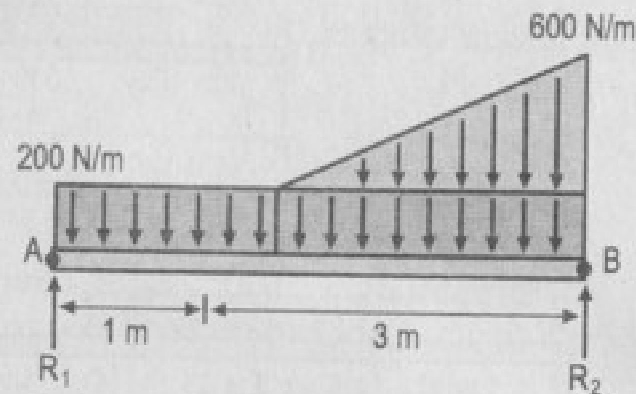
$$(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_B=\frac{(4)(2400)}{2}\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)(4)\right)-\frac{(3)(1800)}{3}\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)(3)\right)+\frac{(1)(600)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(1)$$

$\boxed{(\text{área})_{AB}.\bar{x}_B = 8{,}25\ \text{kN.m}^3}$

627. Viga cargada como indica la figura. *Indicación:* descomponer la carga trapezoidal en una uniforme y otra uniformemente variada.



Resolución:

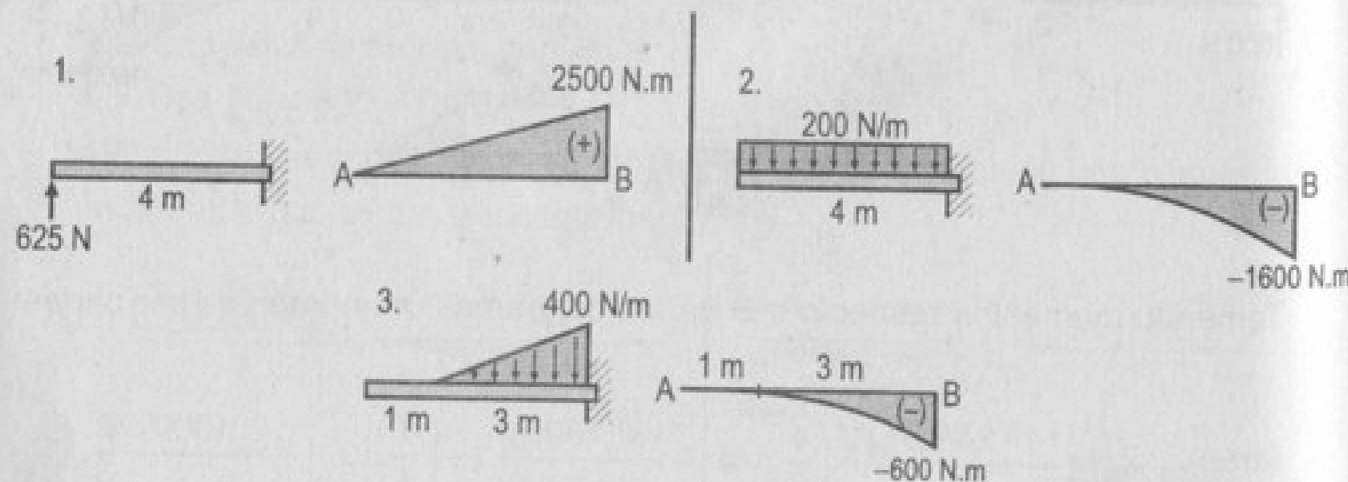


Haciendo equilibrio en la viga ($\Sigma M_A = 0$)

$$R_1(4) = \frac{(200)(4)(4)}{2} + \frac{(3)(600)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3) \quad \Rightarrow \quad R_1 = 625 \text{ N}$$

Del equilibrio de fuerzas verticales:

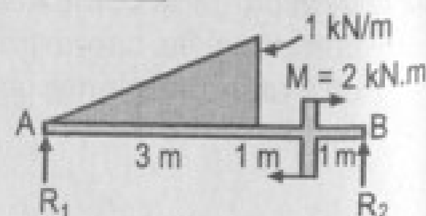
$$R_1 + R_2 = (200)(4) + \frac{(3)(600)}{2} \quad \Rightarrow \quad R_2 = 1075 \text{ N}$$



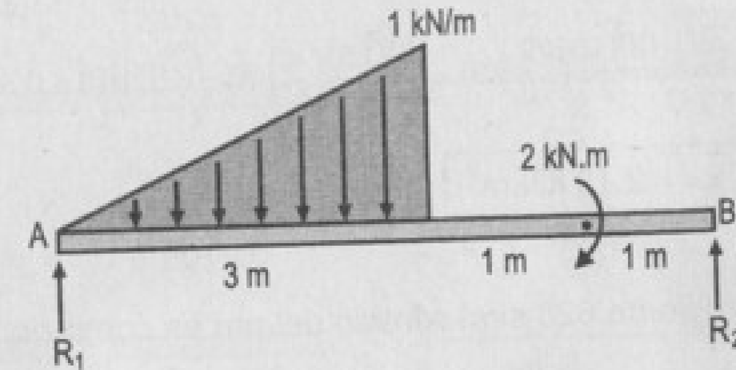
$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B = \frac{(4)(2500)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(4) - \frac{(4)(1600)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(4) + \frac{(3)(600)}{4}\left(\frac{1}{5}\right)(3)$$

$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B = 4803{,}3 \text{ N.m}^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B = 4{,}8 \text{ kN.m}^3}$$

628. Viga cargada con una carga uniformemente variada y un par, como indica la figura.



Resolución:



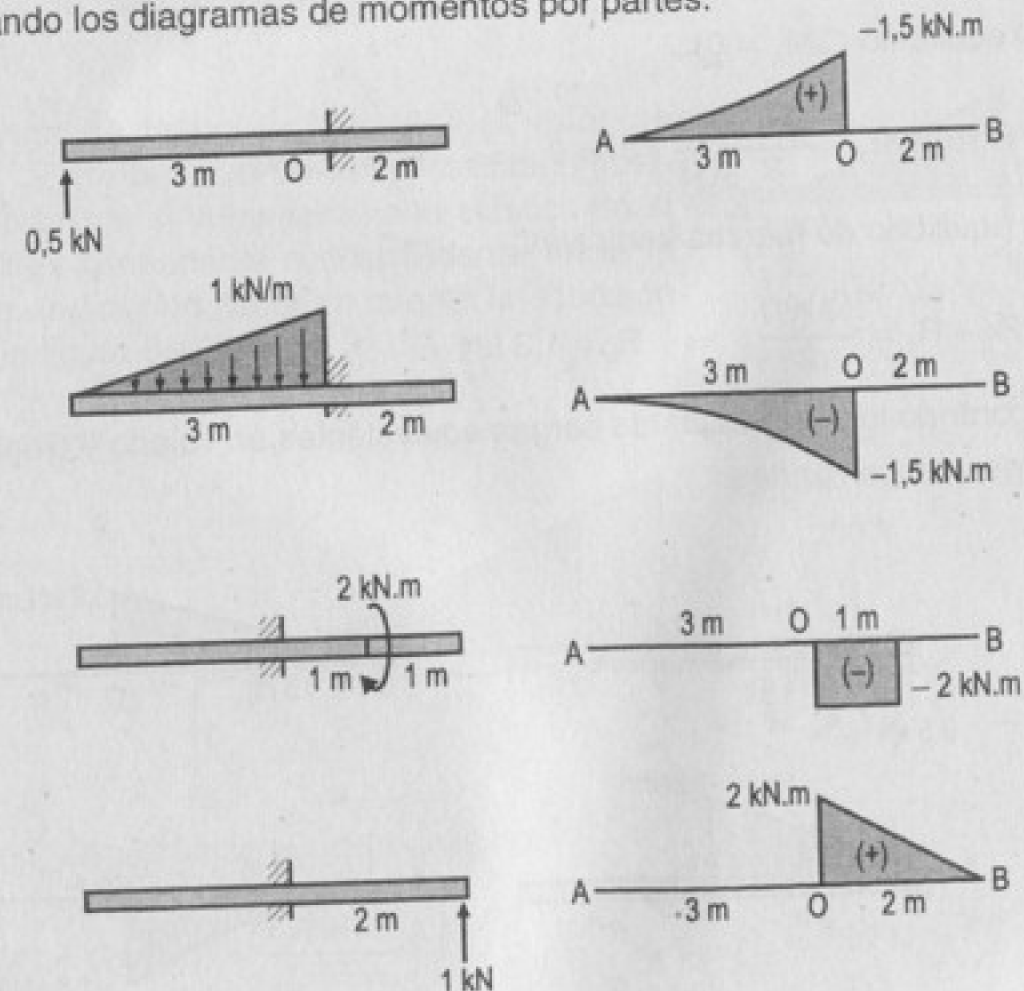
Aplicando equilibrio en la viga:

$$(R_2)(5) - \frac{(1)(3)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 1 \text{ kN}$$

Equilibrio de fuerzas verticales:

$$R_1 + R_2 = \frac{(3)(1)}{2} \quad \Rightarrow \quad R_1 = 0{,}5 \text{ kN}$$

Elaborando los diagramas de momentos por partes:



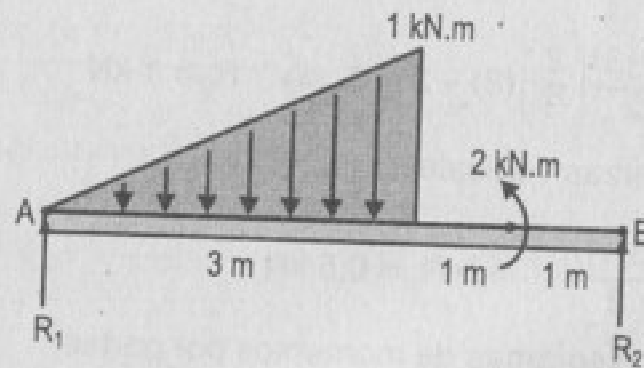
Tomando momentos respecto de A:

$$(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_A=\frac{(3)(1{,}5)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3)-\frac{(3)(1{,}5)}{4}\left(\frac{4}{5}\right)(3)-(2)(1)(3+0{,}5)+\frac{(2)(2)}{2}\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)(2)\right)$$

$$\boxed{(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_A=2{,}13\ \text{kN.m}^3}$$

629. Resolver el problema 628 si el sentido del par es contrario al del reloj.

Resolución:



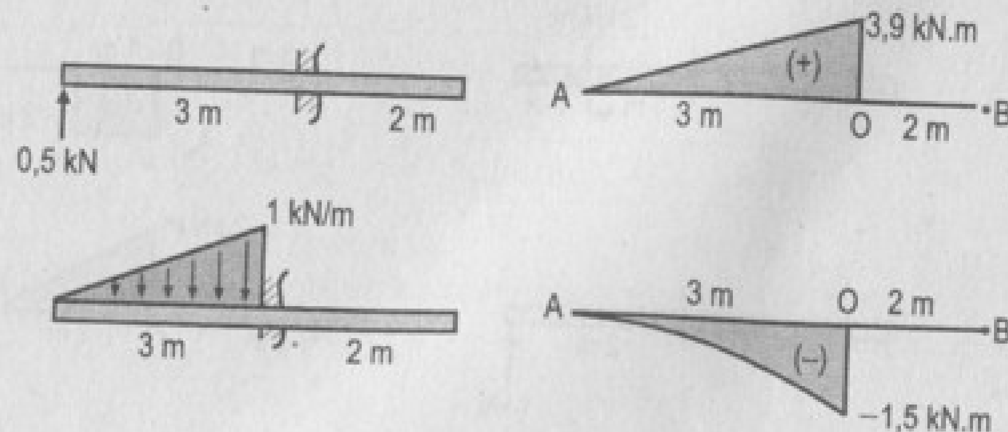
Del equilibrio ($\Sigma M_A = 0$):

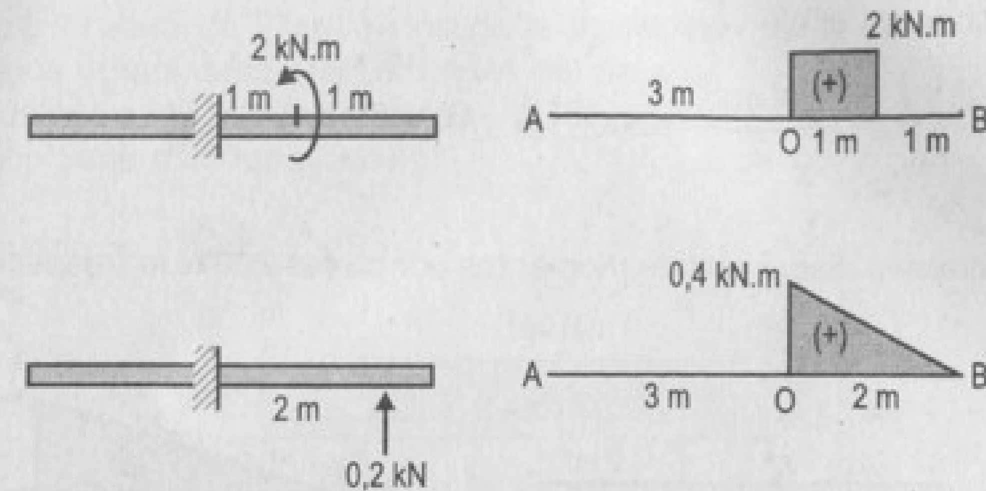
$$R_2(5)+2-\frac{(3)(1)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3)=0\quad\Rightarrow\quad R_2=0{,}2\ \text{kN}$$

Por equilibrio de fuerzas verticales:

$$R_1+R_2=\frac{(3)(1)}{2}\quad\Rightarrow\quad R_1=1{,}3\ \text{kN}$$

Elaborando los diagramas de cargas equivalentes en volado y diagramas de momentos por partes:



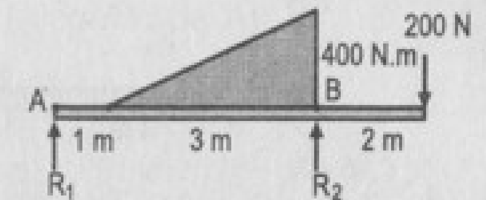


Tomando momentos respecto del extremo A:

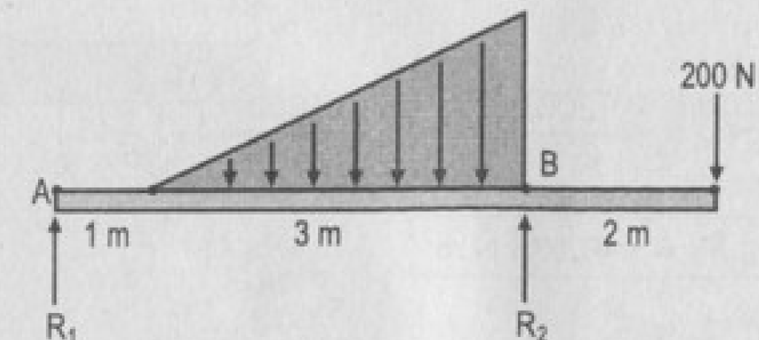
$$(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_A=\frac{(3)(3{,}9)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3)-\frac{(1{,}5)(3)}{4}\left(\frac{4}{5}\right)(3)+(2)(1)(3+0{,}5)+\frac{(2)(0{,}4)}{2}\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)(2)\right)$$

$$\boxed{(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_A=17{,}47\ \text{kN.m}^3}$$

630. En la viga de la figura, calcular el valor de $(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_A$, y de acuerdo con el resultado obtenido determinar si la tangente a la elástica en el punto B es ascendente o descendente hacia la derecha. *Indicación:* tener en cuenta la ecuación (6-5) y la figura 6-10.



Resolución:



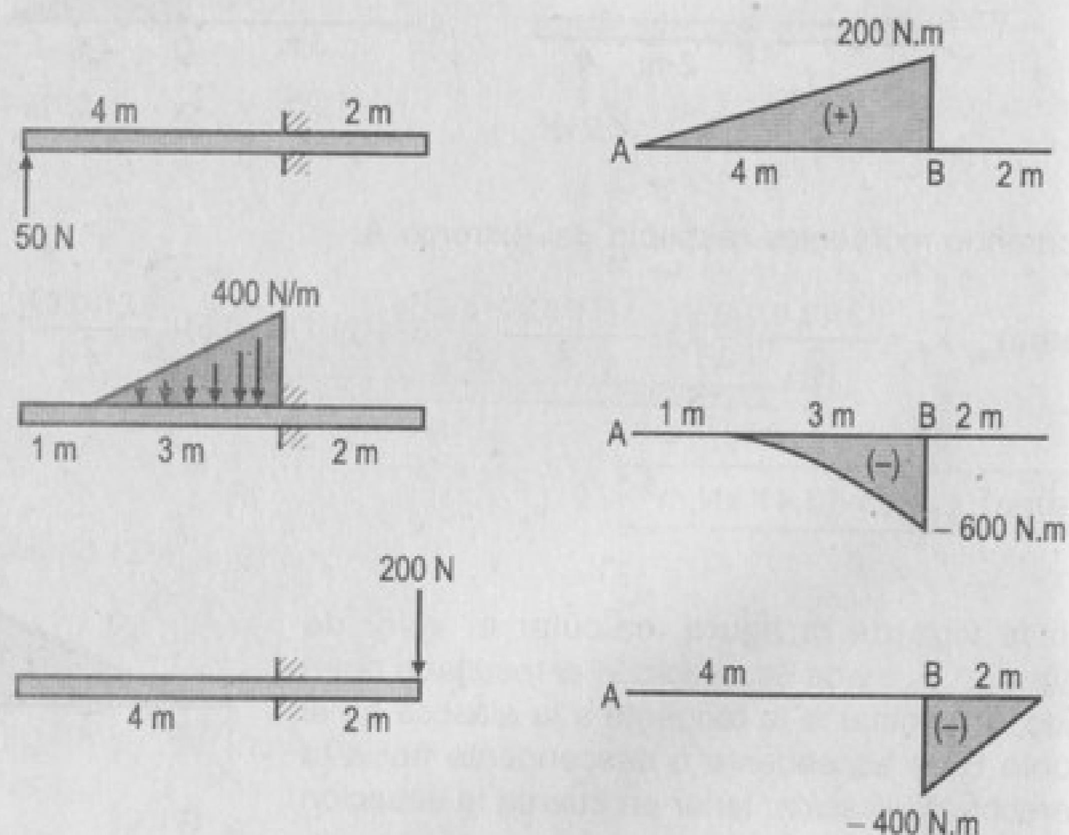
Aplicando las ecuaciones de equilibrio:

$$R_2(4)=(200)(6)+\frac{(3)(400)}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)(3)\right)\quad\Rightarrow\quad R_2=750\ \text{N}$$

Equilibrio en el eje vertical:

$$R_1 + R_2 = \frac{(3)(400)}{2} + 200 \Rightarrow R_1 = 50 \text{ N}$$

Elaboramos diagramas de momentos por partes 200 N.m (respecto a B).



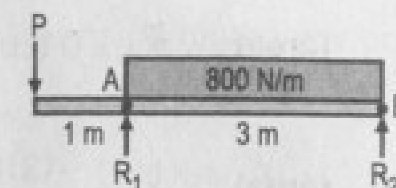
Debido a que nos piden $(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A$, calcularemos solo los momentos de áreas de aquellas que se encuentran comprendidas entre A y B respecto de A.

$$(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = \frac{(4)(200)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4) - \frac{(3)(600)}{4}\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)3\right)$$

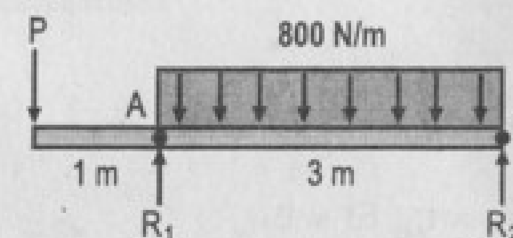
$$\boxed{(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = -463{,}33 \text{ N.m}^3}$$

Debido al signo que se obtiene, la tangente a la elástica en el punto B desciende a la derecha.

631. Determinar el valor de P en la viga de la figura, de manera que el momento respecto de A del área de momentos entre los apoyos sea nulo. ¿Qué significado físico tiene este resultado?



Resolución:



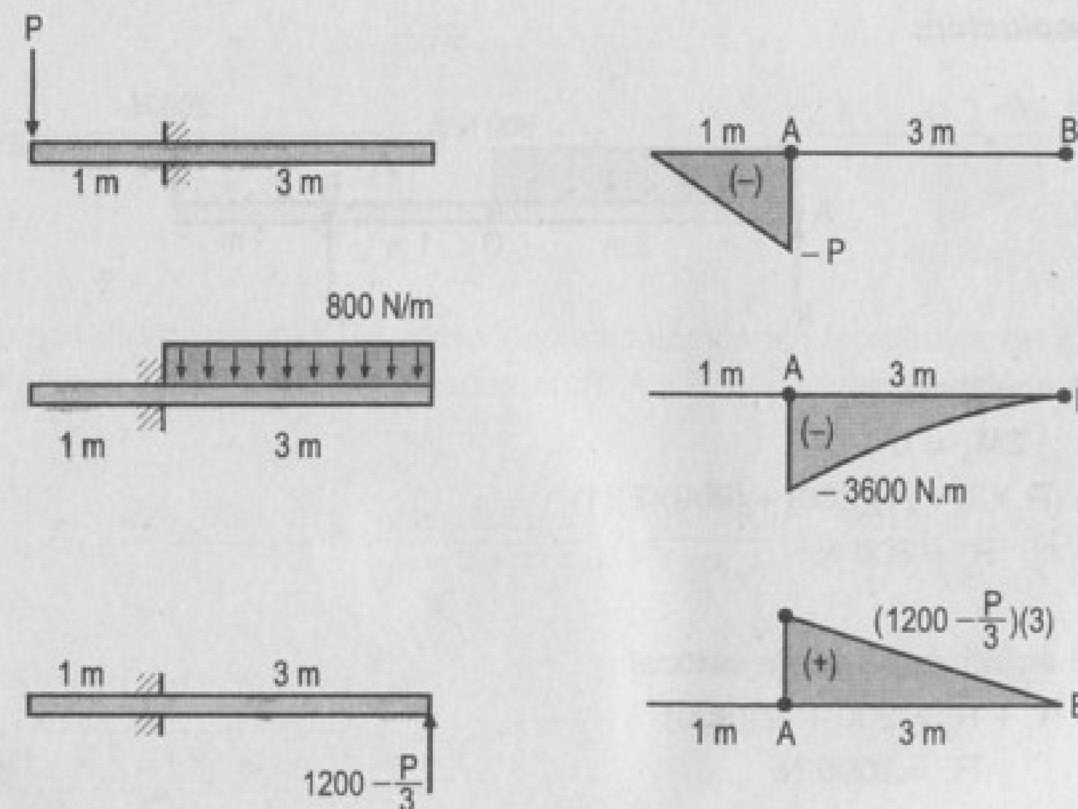
Aplicando el equilibrio a la viga: $(\Sigma M_B = 0)$

$$(P)(4) - (R_1)(3) + \frac{(800)(3)^2}{2} = 0 \Rightarrow R_1 = 1\,200 + \frac{4}{3}P$$

Del equilibrio en el eje vertical:

$$R_1 + R_2 = P + (3)(800) \Rightarrow R_2 = 1200 - \frac{P}{3}$$

Elaboramos diagramas de momentos por partes (respecto de A):



$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 0$ (condición del problema)

$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = \frac{-(3)(3600)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(3) + \frac{\left(1200 - \frac{P}{3}\right)(3)(3)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3) = 0 \quad ...(1)$$

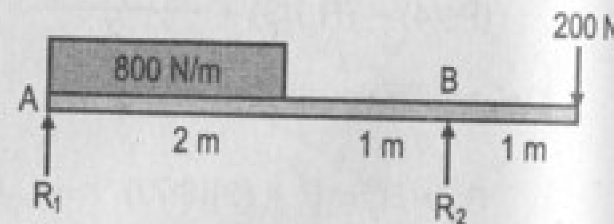
De (1): $\boxed{P = 1800\ N}$

Interpretación: sabemos $t_{B/A} = \frac{1}{E}(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B$

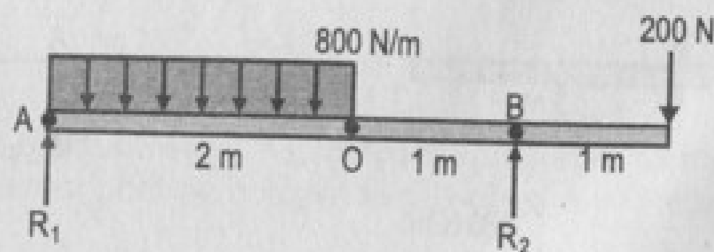
Entonces: $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = t_{A/B}\ EI = 0$

Esta última expresión nos indica que la tangente a la viga en B pasa por A.

632. En la viga de la figura, calcular el valor de $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$. De acuerdo con el resultado obtenido, determinar si la tangente a la elástica en el punto B se dirige hacia arriba o hacia abajo, de izquierda a derecha. *Indicación:* tener en cuenta la ecuación (6-5) y la figura 6 - 10.



Resolución:



Del equilibrio:

$\Sigma M_A = 0$

$(R_2)(3) = (4)(200) + (800)(2)(1)$

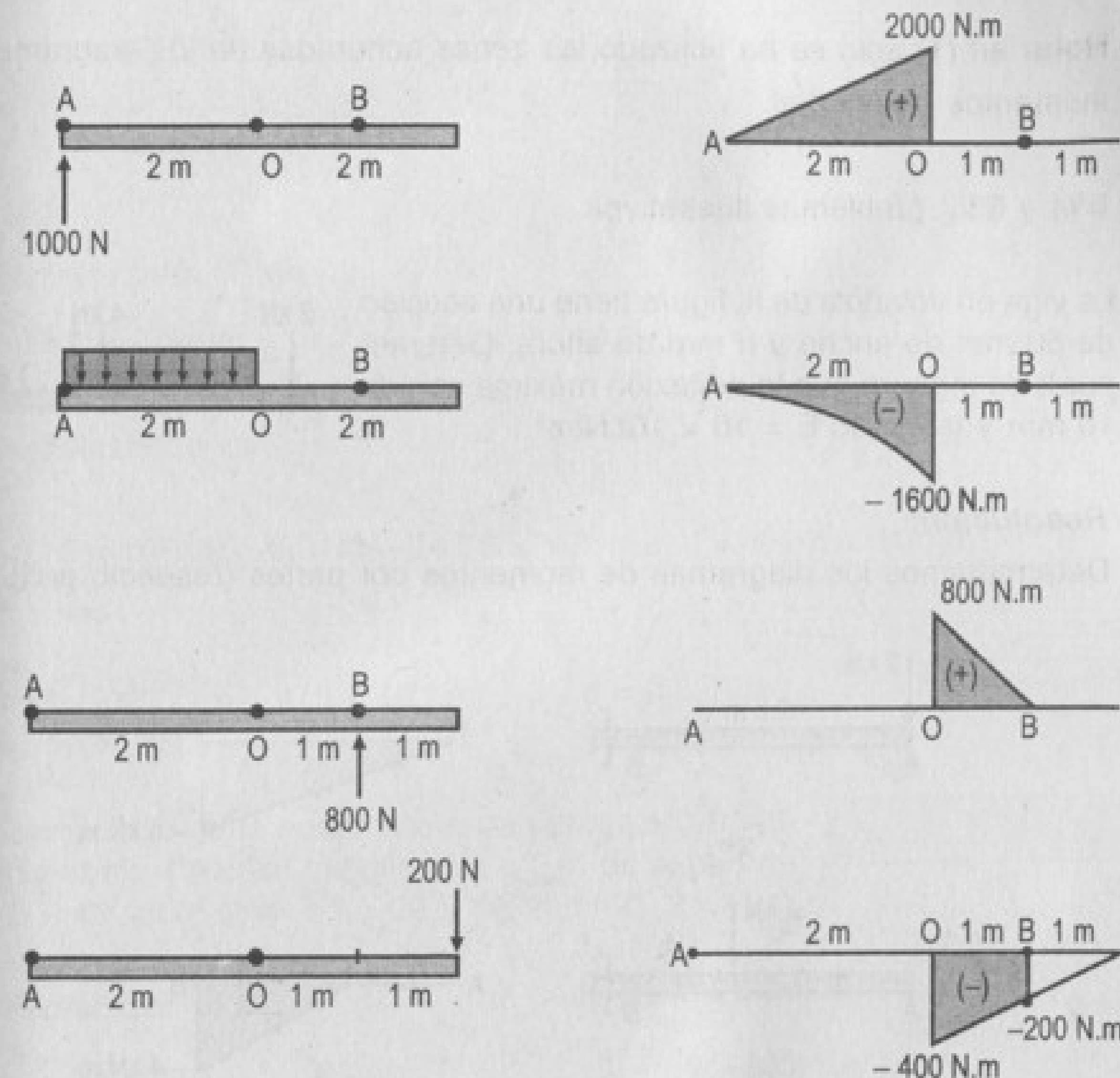
$R_2 = 800\ N$

Del equilibrio en el eje vertical:

$R_1 + R_2 = 200 + (2)(800)$

$R_1 = 1000\ N$

Elaborando los esquemas de cargas en volado y diagramas de momentos por partes:



Como nos piden $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$, entonces calculamos los momentos de áreas de aquellas que se encuentran ubicadas entre A y B, con respecto de A.

$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = \frac{(2)(2000)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2) - \frac{(2)(1600)}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(2) + \frac{(1)(800)}{2}\left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)(1)\right] - (200)(1)(2+0{,}5)$$
$$- \frac{(1)(200)}{2}\left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)(1)\right] \quad ...(1)$$

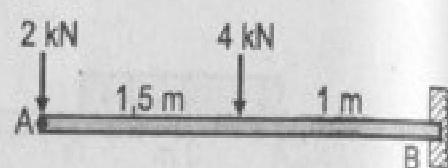
$\boxed{(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 1{,}27\ kN.m^3}$

Debido al signo, la tangente a la elástica en el punto B se dirige hacia arriba a la derecha.

Nota: en (1) solo se ha utilizado las zonas achuradas de los diagramas de momentos por partes.

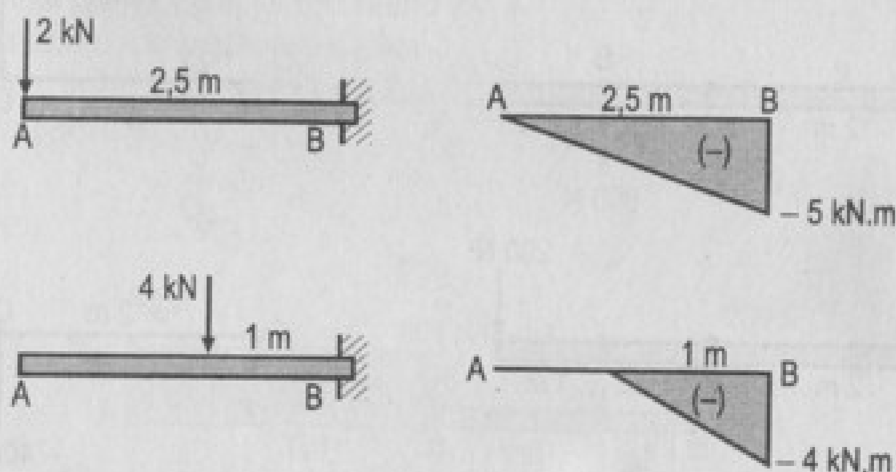
633; 634 y 635: problemas ilustrativos.

636. La viga en voladizo de la figura tiene una sección de 50 mm de ancho y h mm de altura. Determinar h de manera que la deflexión máxima sea de 10 mm y teniendo E = 10 × 10^9 N/m^2.



Resolución:

Determinamos los diagramas de momentos por partes (respecto a B).



Nos piden:

$$\delta_A = -t_{A/B} \quad ...(1) \quad ; \quad t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A \quad ...(2)$$

$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -\frac{(5)(2,5)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2,5) - \frac{(1)(4)}{2}\left(1,5+\left(\frac{2}{3}\right)(1)\right)$$

$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -14,75 \text{ kN.m}^3$$

Del enunciado del problema tenemos:

$$E = 10 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \; ; \; \delta_A = 0,01 \text{ m}$$

sección: (cuadro de 0,05 m × h)

$$I = \frac{0,05h^3}{12} \quad ...(3)$$

Reemplazando (1) en (2):

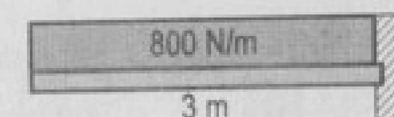
$$EI\, t_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A \Rightarrow EI(-\delta_A) = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$$

Reemplazando valores:

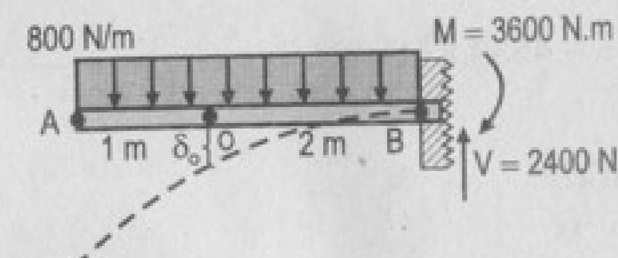
$$(10 \times 10^9)(I)(-0,01) = -14,75 \times 10^3 \Rightarrow I = 1,475 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

De (3): $\dfrac{0,05h^3}{12} = 1,475 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \Rightarrow h = 0,328 \text{ m} \quad \therefore \boxed{h = 328 \text{ mm}}$

637. Sobre la viga de la figura actúa una carga repartida hacia abajo. Calcular la deflexión, a 2 m de la pared, si E = 10 × 10^9 N/m^2 e I = 20 × 10^6 mm^4.



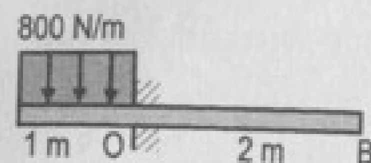
Resolución:

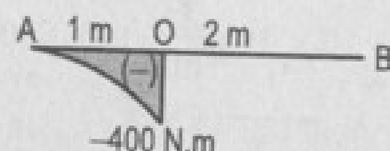


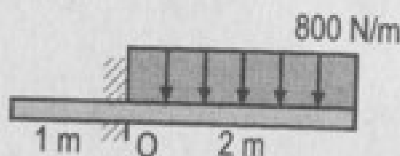
Nos piden $\delta_O = -t_{O/B}$ ...(1)

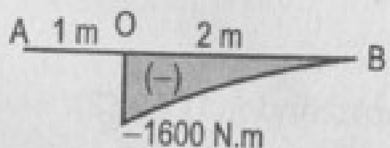
Como $t_{O/B} = \left(\dfrac{1}{EI}\right)(\text{área})_{OB} \cdot \bar{x}_o$ ...(2)

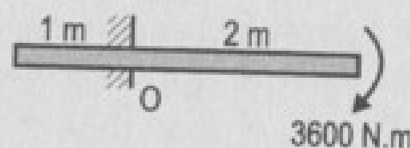
Elaboramos los diagramas de momentos por partes a partir de los esquemas de vigas en volado (respecto de O):

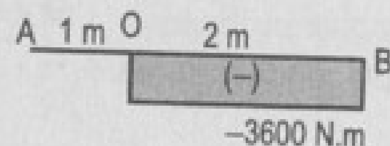


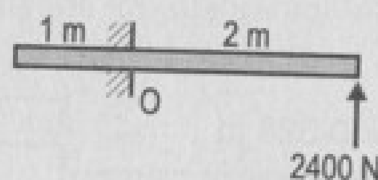


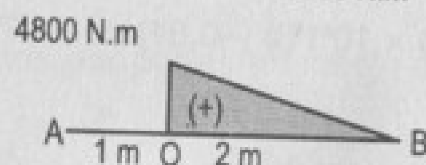












Nota: solo se consideran las áreas ubicadas entre "O" y "B".

$$(\text{área})_{OB} \cdot \bar{x}_O = \frac{-(1600)(2)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(2) - (3600)(2)\left(\frac{2}{2}\right) + \frac{(12)(4800)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2)$$

$$(\text{área})_{OB} \cdot \bar{x}_O = -4533{,}33 \text{ N.m}^3$$

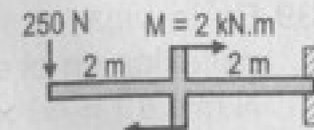
Reemplazando en (2):

$$t_{O/B} = (-4533{,}33)\left(\frac{1}{10\times10^9\times20\times10^{-6}}\right)$$

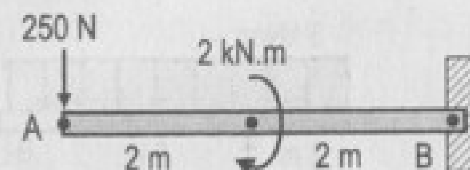
$$t_{O/B} = -0{,}02266 \text{ m}$$

De (1): $\boxed{\delta_o = 22{,}66 \text{ mm}}$

638. Calcular el valor de EIδ en el extremo izquierdo de la viga mostrada en la figura. ¿Qué sentido tiene la deflexión?

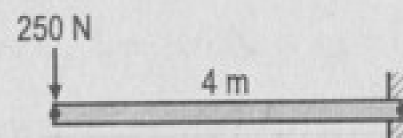


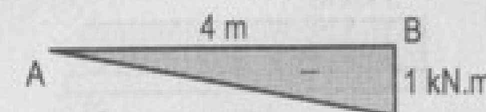
Resolución:

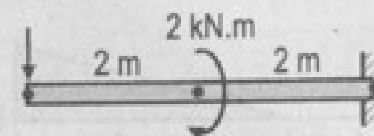


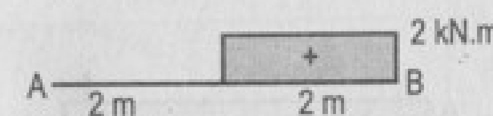
Nos piden: $EI\delta_A$ ...(1)

Calculamos $t_{A/B} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$ ...(2)









$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -\frac{(1)(4)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4) + (2)(2)(2+1)$$

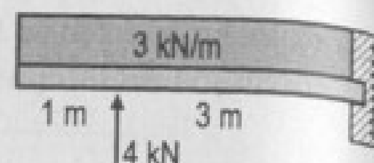
$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 6{,}67 \text{ kN.m}^3$$

En (1): $EIt_{A/B} = 6{,}67 \text{ kN.m}^3$

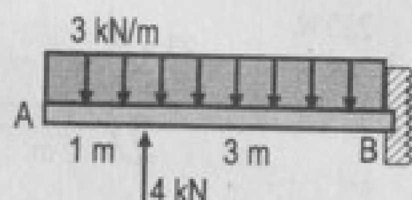
Como $\delta = -t_{A/B} \Rightarrow \boxed{EI\delta_A = -6{,}67 \text{ kN.m}^3}$

El signo negativo que se observa en la respuesta nos indica que el punto A se ha desplazado hacia arriba.

639. En la viga en ménsula de la figura determinar la deflexión en el extremo libre, dado que E = 10 × 10⁹ N/m² e I = 60 × 10⁶ mm⁴.



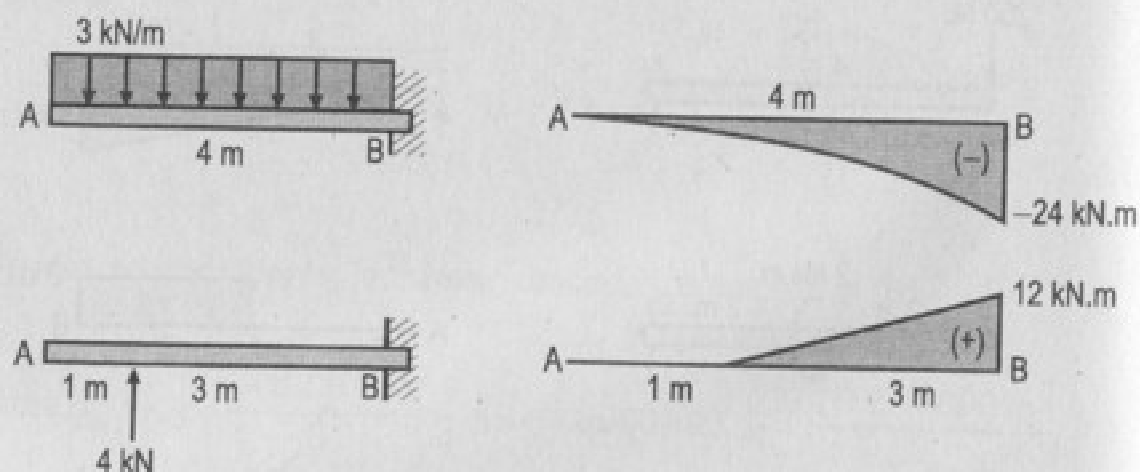
Resolución:



Se requiere calcular: $\delta_A = -t_{A/B}$ ...(1)

pero $t_{A/B} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{A/B} \cdot \bar{x}_A$ ...(2)

Elaboramos los diagramas de momentos por partes (respecto a B):



$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -\frac{(4)(24)}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(4) + \frac{(3)(12)}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)(3)\right)$$

$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -42$ kN.m³

Del dato del problema:

E = 10 × 10⁹ N/m² ; I = 60 × 10⁻⁶ m⁴

Reemplazando en (2):

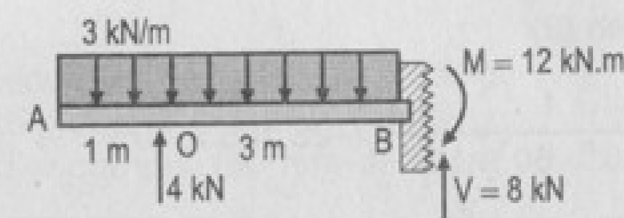
$$t_{A/B} = \left(\frac{1}{10\times10^9\times60\times10^{-6}}\right)(-42\times10^3) \Rightarrow t_{A/B} = -0{,}07 \text{ m}$$

De (1): $\boxed{\delta = 70 \text{ mm}}$

Del signo se observa que el punto se ha desplazado hacia abajo.

640. En la viga de la figura del problema 639 calcular la deflexión en el punto de aplicación de la carga concentrada. ¿Qué sentido tiene?

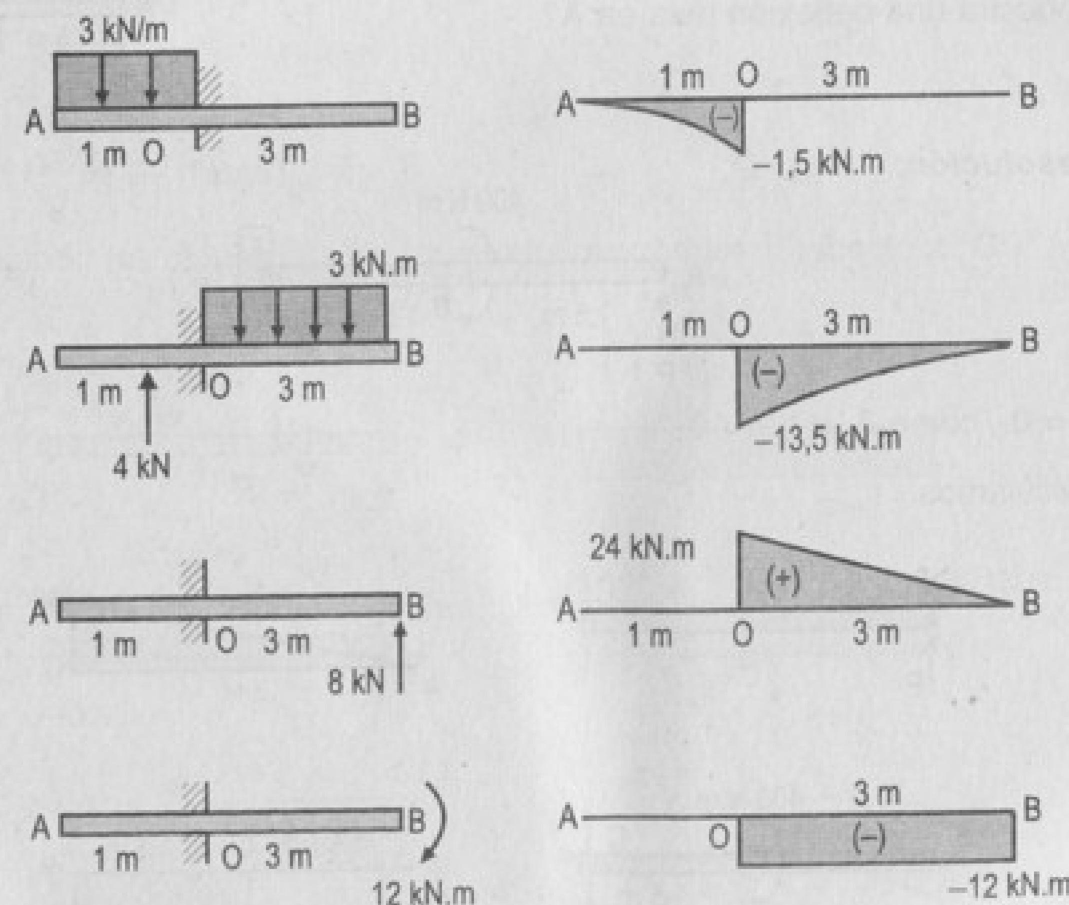
Resolución:



Se requiere $\delta_O = -t_{O/B}$ ...(1)

Como $t_{O/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{OB} \cdot \bar{x}_O$ ...(2)

Diagramas de momentos por partes:



Considerando las áreas que se encuentren entre "O" y "B":

$$(\text{área})_{OB}.\bar{x}_O = -\frac{(3)(13,5)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(3)+\frac{(3)(24)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3)-(3)(12)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(\text{área})_{OB}.\bar{x}_O = -28,125 \text{ kN.m}$$

Del dato del problema: $E = 10 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$; $I = 60 \times 10^{-6}$ m^4

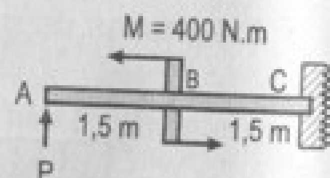
Reemplazando en (2):

$$t_{O/B} = \left(\frac{1}{10\times10^9\times60^6\times10^{-6}}\right)(-28,125\times10^3) \Rightarrow t_{O/B} = -0,046870 \text{ m}$$

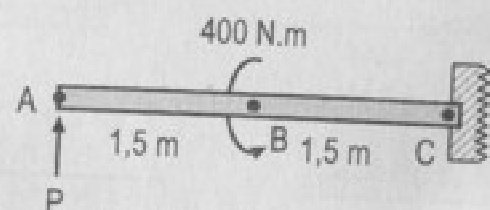
De (1): $\boxed{\delta_O = 46,87 \text{ mm}}$

Del signo de δ_O vemos que el punto se ha desplazado hacia abajo.

641. Dada la viga en voladizo, de la figura, ¿qué valor de P producirá una deflexión nula en A?

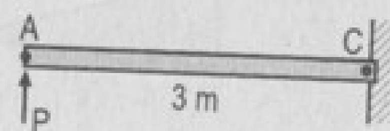


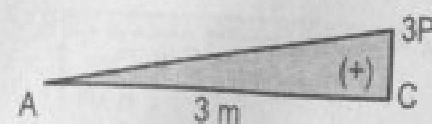
Resolución:

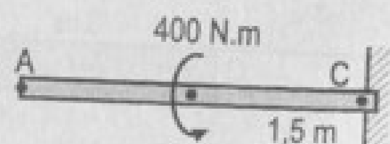


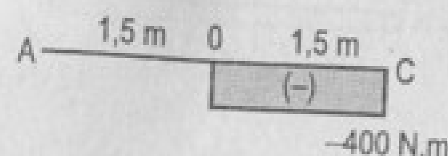
$\delta_A = 0$, como $\delta_A = t_{A/C} = 0$ ...(1)

Calculamos $t_{A/C}$







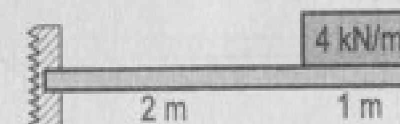


$$(\text{área})_{AC}.\bar{x}_A = \frac{(3)(3P)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3)-(400)(1,5)\left(1,5+\frac{1,5}{2}\right)$$

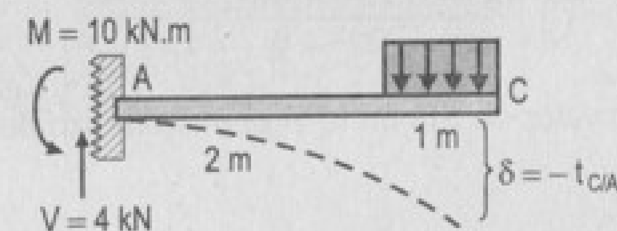
$$(\text{área})_{AC}.\bar{x}_A = (9P - 1350) \text{ N.m}^3$$

De (1): $\left(\frac{1}{EI}\right)(9P - 1350) = 0$; por lo tanto $\boxed{P = 150 \text{ N}}$

642. Determinar la deflexión máxima en la viga de la figura, cargada como se indica, si la sección es rectangular, de 50 mm de ancho por 150 mm de altura y E = 69 GN/m².

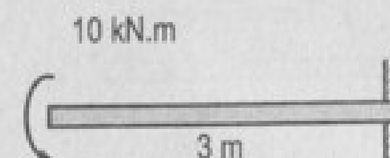


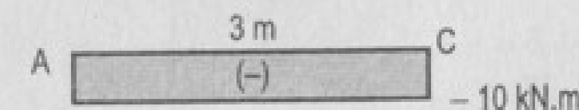
Resolución:

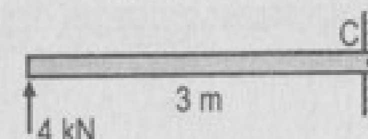


Como $t_{C/A} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{CA}.\bar{x}_C$ ...(1)

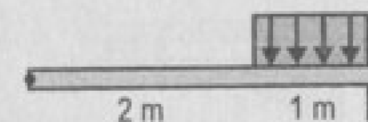
Calculando los diagramas de momentos por partes (respecto a "C"):

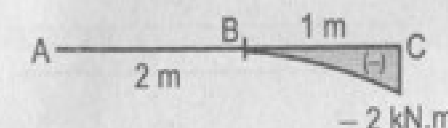












$$(\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C = -(10)(3)\left(\frac{1}{2}\right)(3) + \frac{(3)(12)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3) - \frac{(1)(2)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(1)$$

$$(\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C = -27{,}17 \text{ kN.m}^3$$

De los datos del problema:

$$E = 69 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \Rightarrow I = \frac{0{,}5 \times 1{,}5^3}{12} = 1{,}4 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

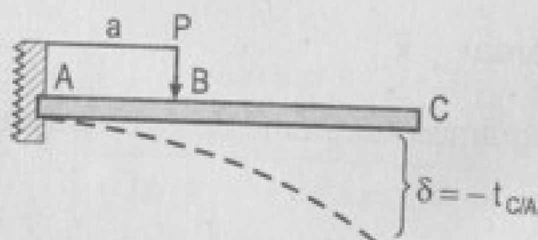
Reemplazando en (1):

$$t_{C/A} = \left(\frac{1}{69 \times 10^9 \times 1{,}4 \times 10^{-5}}\right)(-27{,}17 \times 10^3) \Rightarrow t_{C/A} = -0{,}02812 \text{ m}$$

Como: $\delta = -t_{C/A} \Rightarrow \boxed{\delta = 28{,}13 \text{ mm}}$

643. Hallar el máximo valor de $EI\delta$ en la viga en voladizo de la figura.

Resolución:

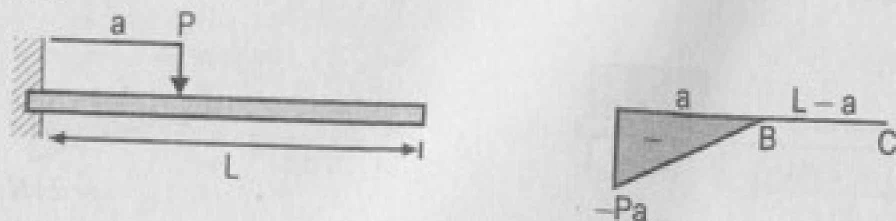


$$\delta = -t_{C/A} \quad \text{...(1)}$$

El máximo valor de $EI\delta$ sucede en el extremo libre:

$$t_{C/A} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C \quad \text{...(2)}$$

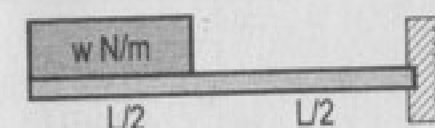
Calculamos:



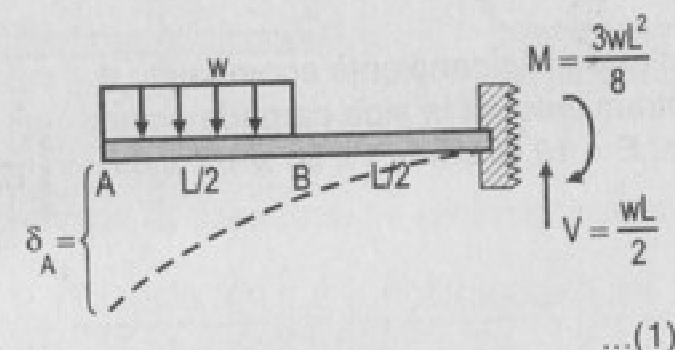
$$(\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C = \frac{-(a)(Pa)}{2}\left(L - a + \left(\frac{2}{3}\right)a\right) \Rightarrow (\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C = \frac{-Pa^2}{2}\left(L - \frac{a}{3}\right)$$

De (2): $t_{C/A} = -\left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{Pa^2}{2}\right)\left(L - \frac{a}{3}\right)$; de (2) observamos: $\boxed{EI\delta = \frac{Pa^2}{6}(3L - a)}$

644. Determinar la máxima deflexión para la viga de la figura.



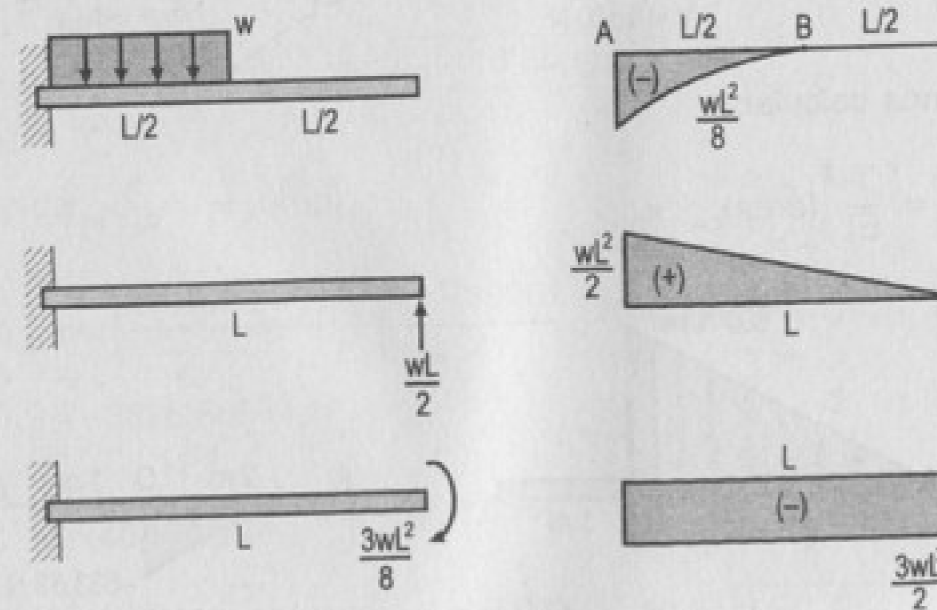
Resolución:



$$\delta_A = -t_{A/C} \quad \text{...(1)}$$

$$t_{A/C} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C \quad \text{...(2)}$$

Diagrama de momentos por partes (respecto de A):



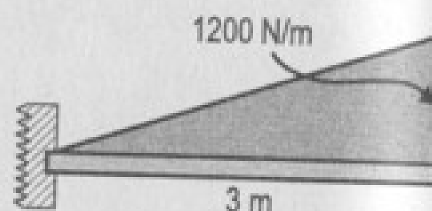
$$(\text{área})_{A/C}\cdot\bar{x}_C=-\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL^2}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)(L)+(L)\left(\frac{wL^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(L)-\left(\frac{3wL^2}{8}\right)(L)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$(\text{área})_{AC}\cdot\bar{x}_A=-\frac{41wL^4}{384}$$

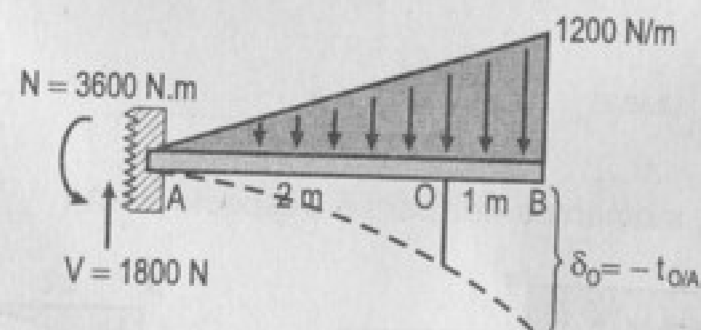
De (2): $t_{A/C}=\left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{-41wL^4}{384}\right)\Rightarrow t_{A/C}=\frac{-41wL^4}{384EI}$

De (1): $\boxed{\delta=\frac{41wL^4}{384EI}}$

645. Calcular la deflexión y la pendiente en un punto a 2 m del empotramiento en la viga cargada como indica la figura. E = 10 GN/m² e I = 30 × 10⁶ mm⁴.

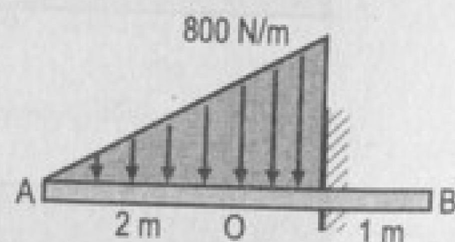


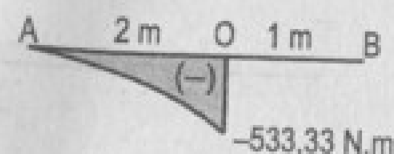
Resolución:

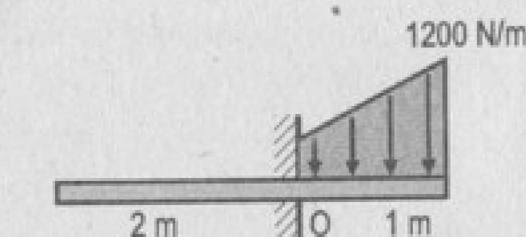


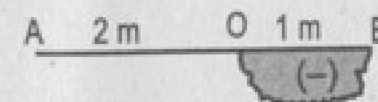
Debemos calcular:

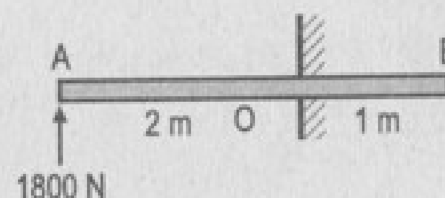
$$t_{O/A}=\left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{OA}\cdot x_O \qquad ...(1)$$

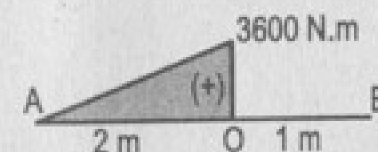


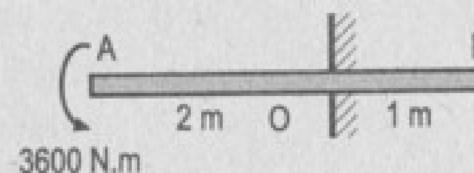


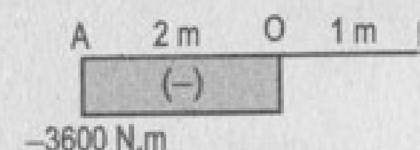












Calculando los momentos de áreas que se encuentren ante "O" y "A".

$$(\text{área})_{OA}\cdot\bar{x}_O=-\left[\frac{(2)(533{,}33)}{4}\right]\left(\frac{2}{5}\right)+\left[\frac{(2)(3600)}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\right)-[(3600)(2)]\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$(\text{área})_{OA}\cdot\bar{x}_O=-4906{,}67\ \text{N.m}^3$$

De (1): $t_{O/A}=\left(\frac{1}{10\times10^9\times30\times10^{-6}}\right)(-4906{,}67)$

$t_{O/A}=-0{,}01635\ \text{m}\Rightarrow\boxed{\delta_O=16{,}35\ \text{mm}}$

También piden: $\theta_{AO}=\frac{1}{EI}(\text{área})_{AO}$

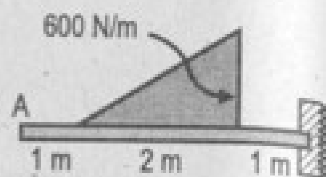
$$(\text{área})_{AO}=-\left[\frac{(2)(533{,}33)}{4}\right]+\left[\frac{(2)(3600)}{2}\right]-(3600)(2)$$

$$(\text{área})_{AO}=-3826{,}665\ \text{N.m}^2$$

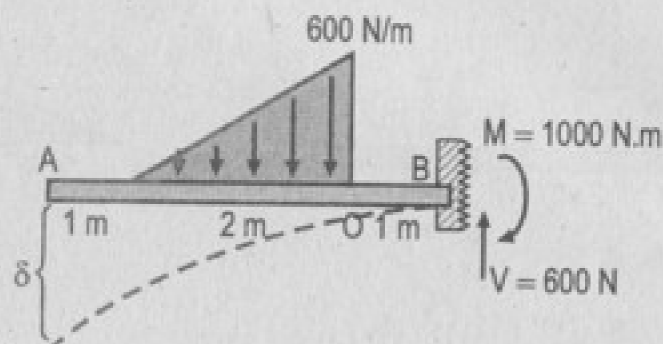
$$\theta_{AO}=\left(\frac{1}{10\times10^9\times30\times10^{-6}}\right)(-3826{,}665)$$

$\theta_{AO}=-0{,}01276$ rad, entonces: $\theta=0{,}01276$ rad $\therefore\ \boxed{\theta=0{,}73°}$

646. En la viga de la figura, determinar el valor de I, que limite la deflexión máxima a 20 mm; $E = 10 \times 10^9$ N/m².



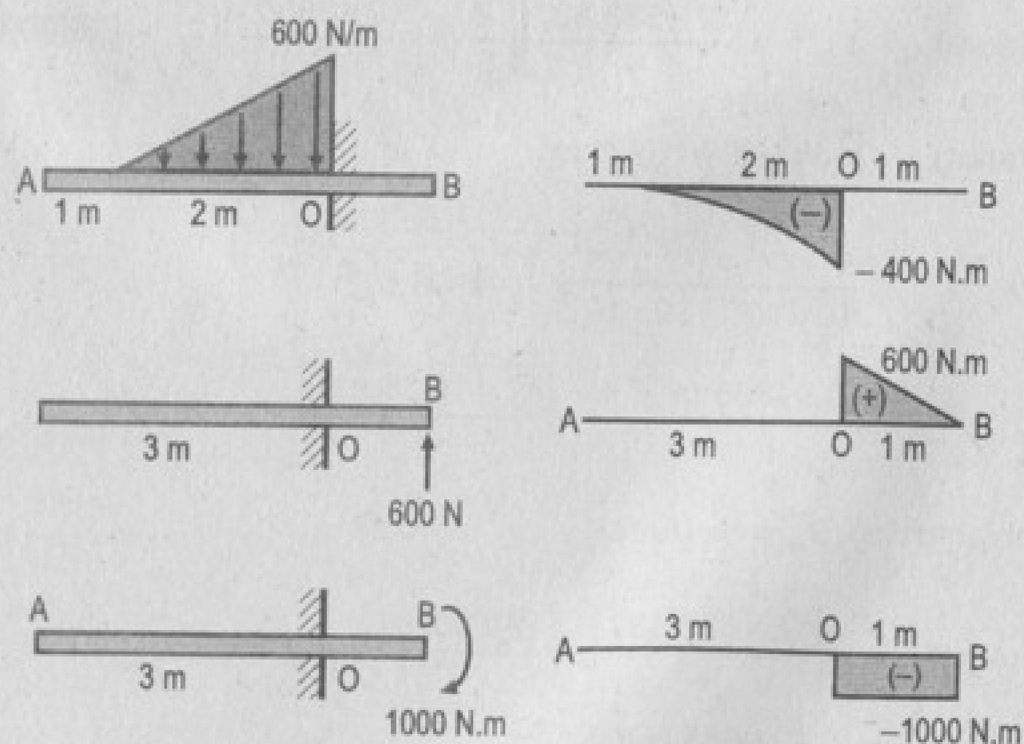
Resolución:



$$\delta = -t_{A/B} \qquad ...(1)$$

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A \qquad ...(2)$$

Diagrama de momentos por partes (respecto de "O"):



$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -\frac{(2)(400)}{4}\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)(2)\right)+\frac{(1)(600)}{2}\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)(1)\right)-(1)(1000)\left(3+\left(\frac{1}{2}\right)(1)\right)$$

$$(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -3353{,}33 \text{ N.m}$$

De los datos del problema:

$E = 10 \times 10^9$ N/m² ; $\delta = 20$ mm $= 0{,}02$ m ; $t_{A/B} = -0{,}02$ m

Reemplazando en (2):

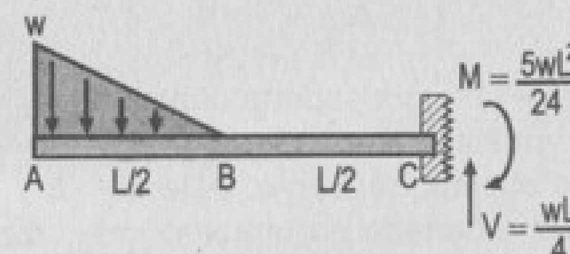
$$-0{,}02 = \left(\frac{1}{10\times10^9 . I}\right)(-3353{,}33)$$

$$I = 1{,}676 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 16{,}77\times10^6 \text{ mm}^4}$$

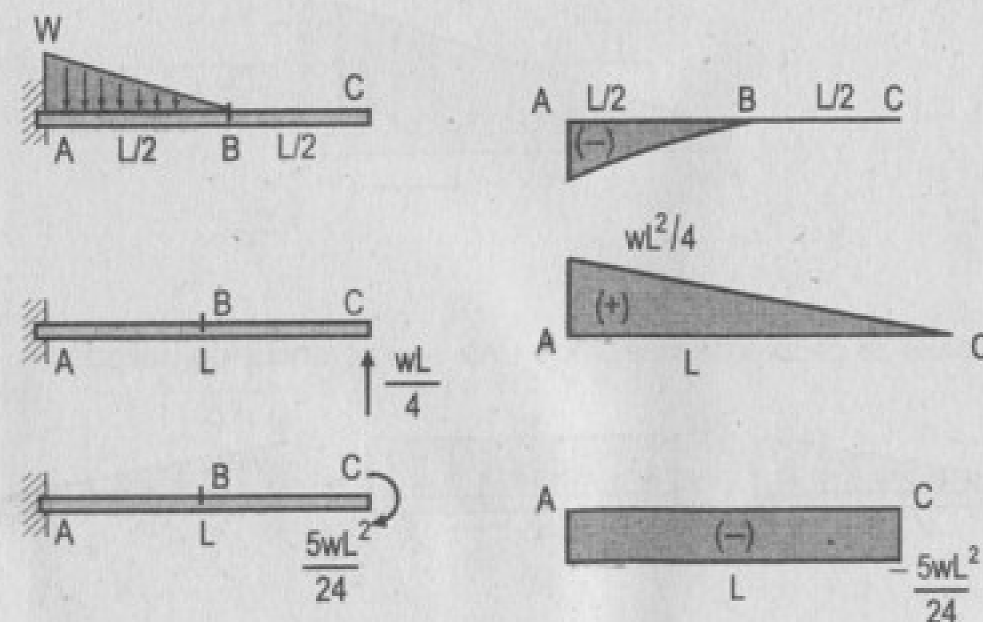
647. Determinar el máximo valor de EIδ en la viga de la figura.



Resolución:



EIδ máximo sucede en el extremo A. Diagrama de momentos por partes respecto de A:



como $t_{A/C} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{AC}\cdot \bar{x}_A$

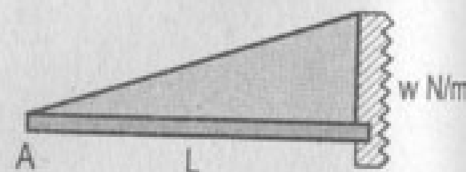
$$(\text{área})_{AC}\cdot\bar{x}_A = \left[-\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left[(L)\left(\frac{wL^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]\left(\frac{1}{3}\right)(L)$$

$$-\left[\left(\frac{5w^2}{24}\right)(L)\right]\left(\frac{1}{2}\right)(L)$$

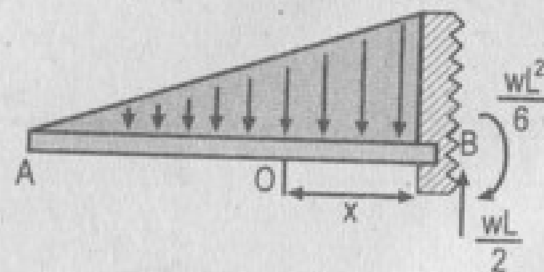
$$(\text{área})_{AC}\cdot\bar{x}_A = -\frac{121wL^4}{1920}$$

Como $\delta_A = -t_{A/C} \Rightarrow$ $\boxed{EI\delta_A \frac{121wL^4}{1920}}$

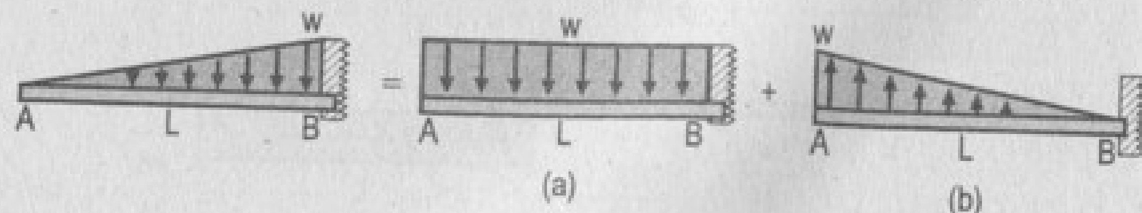
648. La viga en voladizo de la figura soporta una carga uniformemente variable de cero en el extremo libre a w N/m en el empotramiento. Determinar la pendiente y la ordenada en una sección cualquiera a una distancia x del empotramiento.



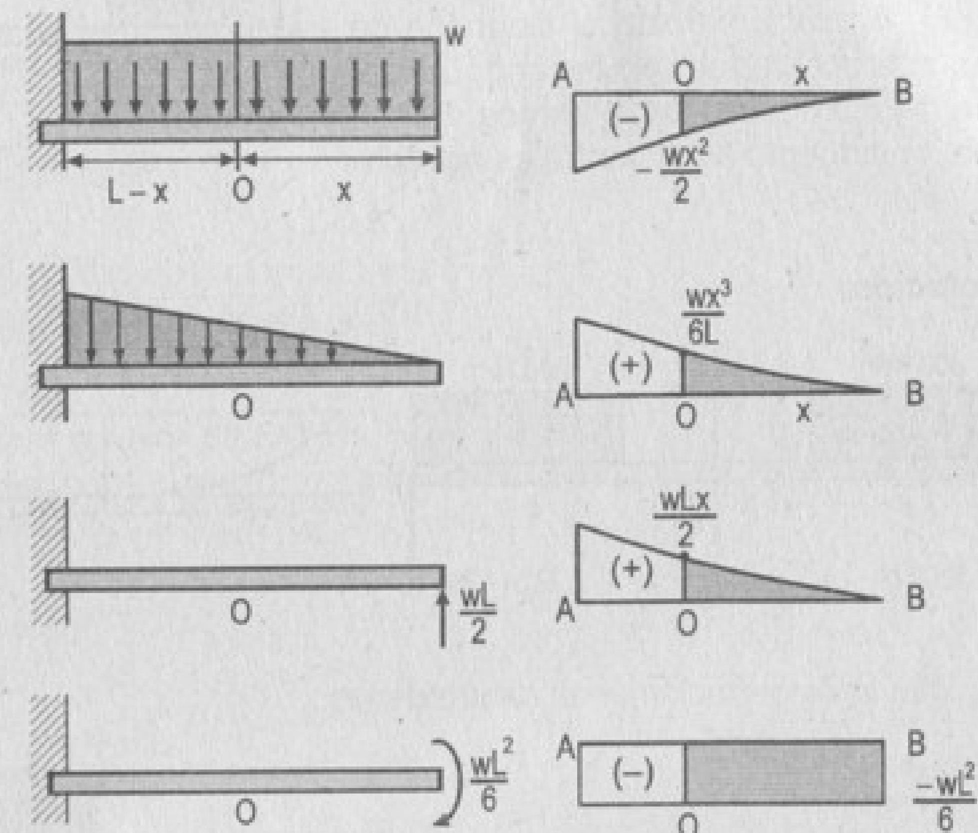
Resolución:



Para resolver el problema hacemos una equivalencia de cargas:



Con (a) y (b) trazamos las gráficas de momentos por partes (respecto de "A"):



Se requiere $(\text{área})_{OB}\cdot\bar{x}_O$, por lo cual solo consideraremos las áreas que encuentran entre "O" y "B".

$$(\text{área})_{OB}\cdot\bar{x}_O = \frac{-(x)\left(\frac{wx^2}{2}\right)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(x) + \frac{(x)\left(\frac{wx^3}{6L}\right)}{4}\left(\frac{1}{5}\right)(x)$$

$$+\frac{(x)\left(\frac{wLx}{2}\right)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(x) - \left(\frac{wL^2}{6}\right)(x)\left(\frac{1}{2}\right)(x)$$

$$(\text{área})_{OB}\cdot\bar{x}_O = \frac{wx^2}{120L}(-5x^2L + x^3 + 10L^2x - 10L^3)$$

Como $\delta_O = -t_{O/B} \Rightarrow \delta_O = \left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{wx^2}{120L}\right)(5x^2L - x^3 - 10L^2x + 10L^3)$

649; 650; 651; 652: problemas ilustrativos.

653. Calcular el valor de la deflexión en el punto medio del claro en la viga representada en la figura. *Indicación:* trazar el diagrama de momentos por partes, empezando por el centro del claro hacia los extremos. Por simetría, la tangente en el centro es horizontal.

Resolución:

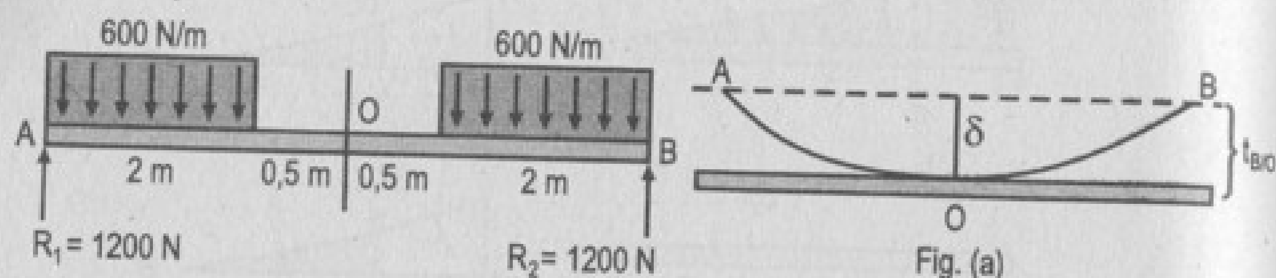
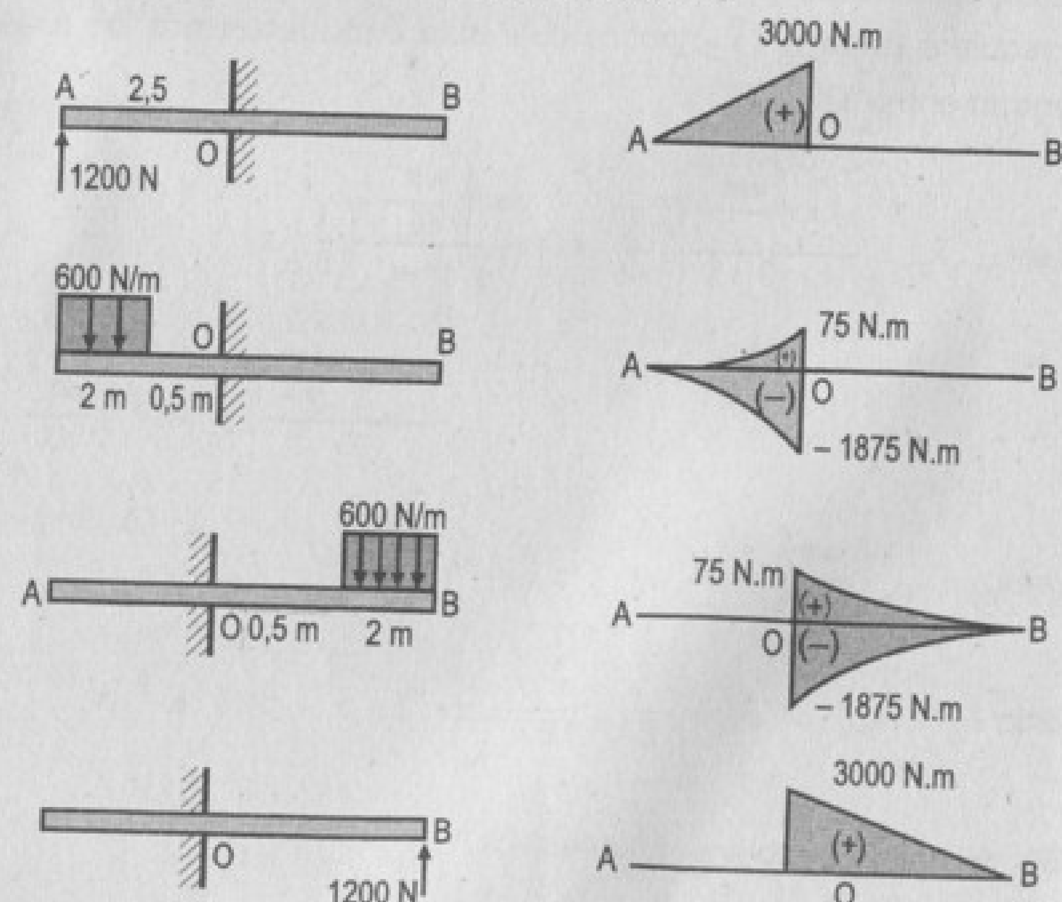


Fig. (a)

Nos piden la deformación en el centro de luz:

$$Eit_{B/O} = (\text{área})_{B/O} \cdot \bar{x}_B \qquad ...(1)$$

Dibujando los diagramas de momentos por partes:



Debido a que solo se consideran las áreas entre B y O, se consideran solamente las áreas achuradas:

$$Elt_{B/O} = \frac{(2{,}5)(3000)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2{,}5) - \frac{(2{,}5)(1875)}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(2{,}5) + \frac{(0{,}5)(75)}{3}\left(2 + \left(\frac{3}{4}\right)(0{,}5)\right)$$

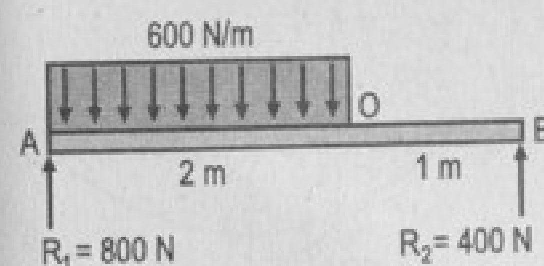
$$Elt_{B/O} = 3350 \text{ N.m}^3$$

De la figura (a), observamos que: $\delta = t_{B/O}$

Por lo tanto: $\boxed{El\delta = 3350 \text{ N.m}^3}$

654. Determinar el valor de $El\delta$ a 1 m de R_2 en la viga de la figura. *Indicación:* trazar la tangente de referencia en el apoyo derecho.

Resolución:



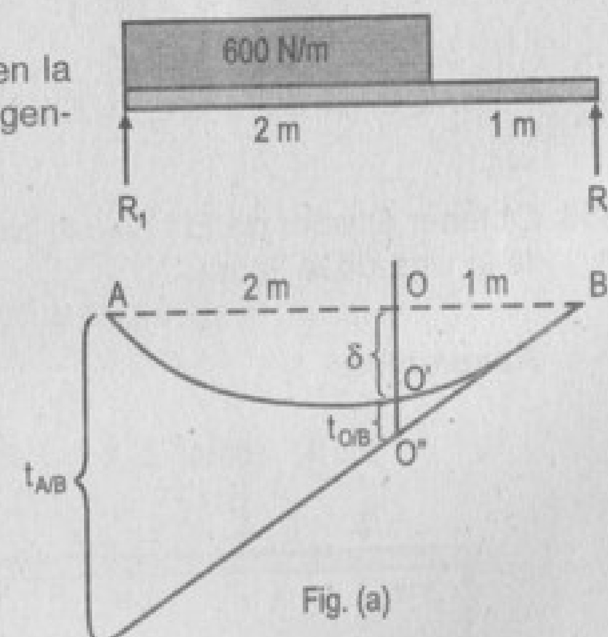
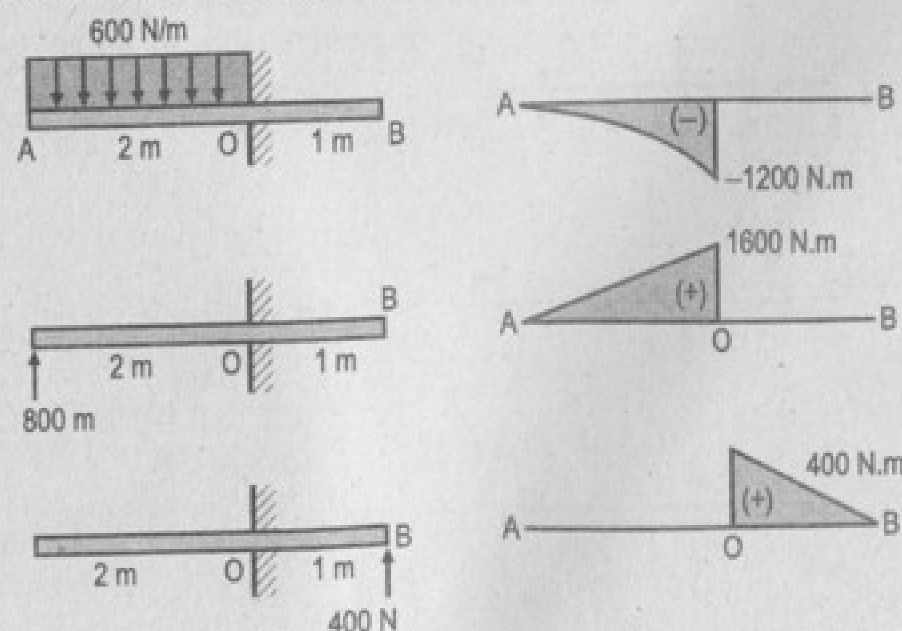


Fig. (a)

El desplazamiento en "O" es δ. Primero calculamos el $t_{A/B}$, luego el $t_{O/B}$, para ello debemos elaborar los diagramas de momentos por partes:



$$Elt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \overline{x}_A = -\frac{(2)(1200)}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(2) + \frac{(2)(1600)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2) + \frac{(1)(400)}{2}\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)(1)\right)$$

$$Elt_{A/B} = 1400\ N.m^3 \qquad ...(1)$$

$$Elt_{O/B} = (\text{área})_{OB} \cdot \overline{x}_O = -\frac{(1)(400)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1)$$

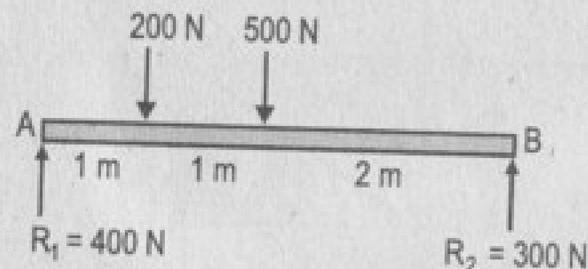
$$Elt_{O/B} = 66{,}67\ N.m^3 \qquad ...(2)$$

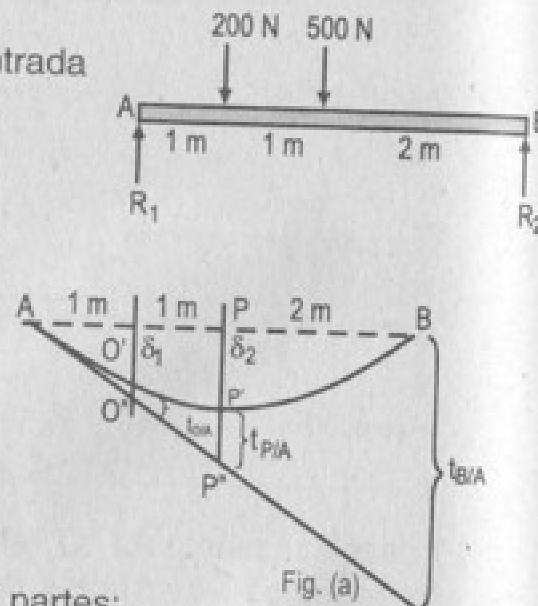
De la figura (a): $\frac{Elt_{A/B}}{3} = \frac{\overline{OO''}}{1} \Rightarrow \overline{OO''} = \frac{Elt_{A/B}}{3} \quad \therefore \quad \overline{OO''} = 466{,}67\ N.m^3$

Pero: $\overline{OO''} = EI\delta + Elt_{O/B} = EI\delta + 66{,}67 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 400\ N.m^3}$

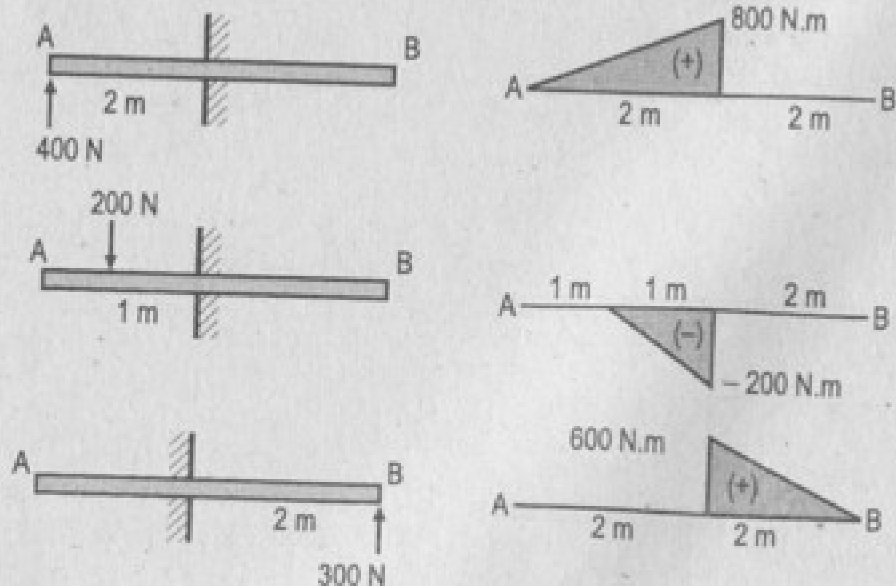
655. Obtener el valor de EIδ bajo la carga concentrada de la viga de la figura.

Resolución:





Elaborando los diagramas de momentos por partes:



$$Elt_{B/A} = (\text{Área})_{BA} \cdot \overline{x}_B = \frac{(2)(800)}{2}\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)(2)\right) - \frac{(1)(200)}{2}\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)(1)\right) + \frac{(2)(600)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2)$$

$$Elt_{B/A} = 2700\ N.m^3$$

$$Elt_{P/A} = (\text{Área})_{PA} \cdot \overline{x}_P = \frac{(2)(800)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(2) - \frac{(1)(200)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1)$$

$$Elt_{P/A} = 500\ N.m^3$$

De la figura (a): $\frac{Elt_{B/A}}{4} = \frac{\overline{PP''}}{2}$; $\overline{PP''} = \frac{Elt_{B/A}}{2} = 1350\ N.m^3$

Pero: $\overline{PP''} = EI\delta_2 + Elt_{P/A}$

$1350 = EI\delta_2 + 500$

$EI\delta_2 = 850\ N.m^3$

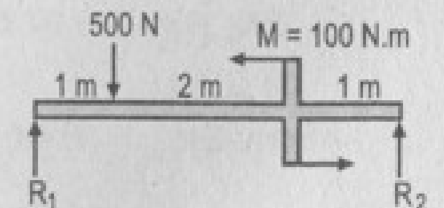
$Elt_{O/A} = (\text{área})_{OA} \cdot \overline{x}_O = \frac{(1)(400)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1) = 66{,}67\ N.m^3$

De la figura (a): $\frac{t_{B/A}}{4} = \frac{\overline{OO''}}{1} \Rightarrow \overline{OO''} = \frac{t_{B/A}}{4} = 675\ N.m^3$

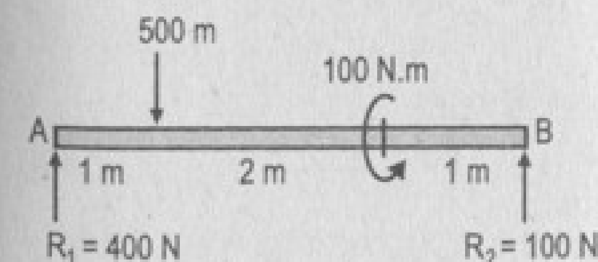
Pero: $\overline{OO''} = EI\delta_1 + Elt_{P/A}$

$675 = EI\delta_1 + 66{,}75 \quad \therefore \quad \boxed{EI\delta_1 = 608{,}25\ N.m^3}$

656. Calcular el valor de EIδ bajo la carga concentrada de 100 N.m en la viga representada en la figura.



Resolución:



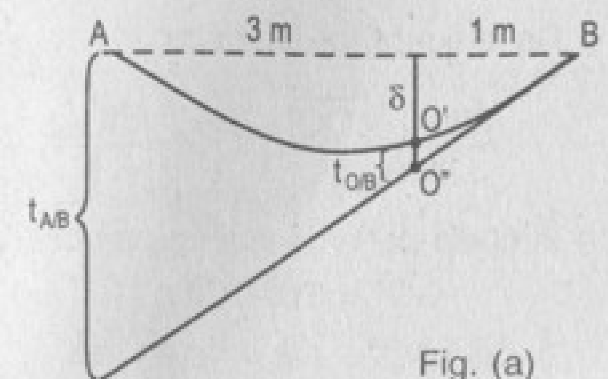
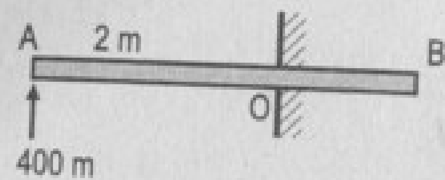
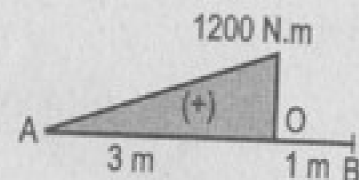
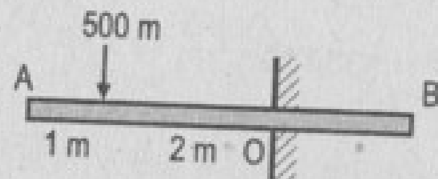


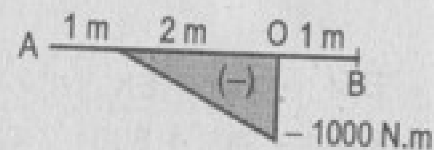
Fig. (a)

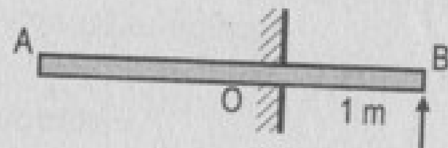
Diagramas de momentos por partes:

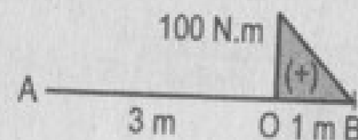












Calculando:

$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$

$$EIt_{A/B} = \frac{(3)(1200)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3) - \frac{(2)(1000)}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right) + \frac{(1)(100)}{2}\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)(1)\right)$$

$EIt_{A/B} = 1433,34\ N.m^3$

Ahora: $EIt_{O/B} = (\text{área})_{OB} \cdot \bar{x}_O$

$$EIt_{O/B} = \frac{(1)(100)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1) = 16,67\ N.m^3$$

De la figura (a) tenemos:

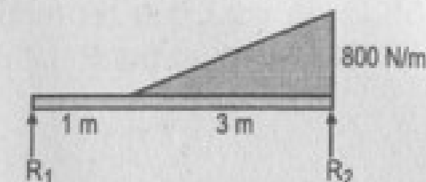
$$\frac{EIt_{A/B}}{4} = \frac{\overline{OO''}}{1};\quad \overline{OO''} = \frac{EIt_{A/B}}{4} = 358,335\ N.m^3$$

También de la misma figura observamos:

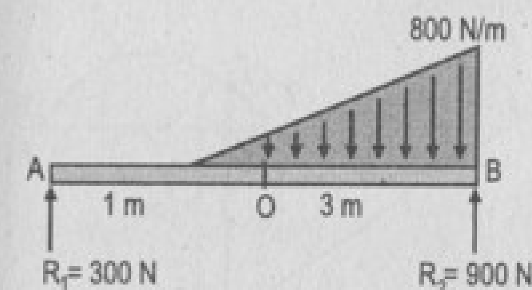
$OO'' = EI\delta + EIt_{O/B}$

$358,335 = EI\delta + 16,67 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 341,66\ N.m^3}$

657. Calcular la deflexión en el centro de la viga que representa la figura.



Resolución:



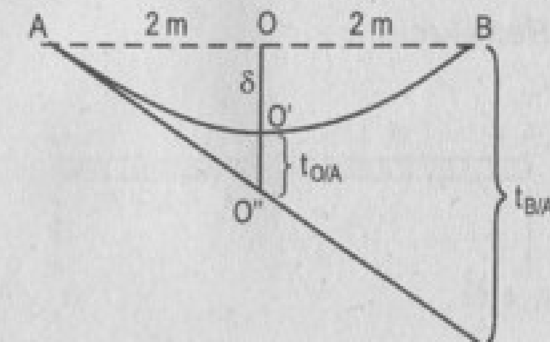
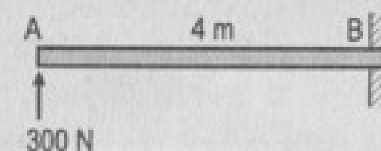
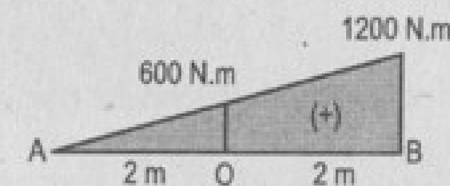
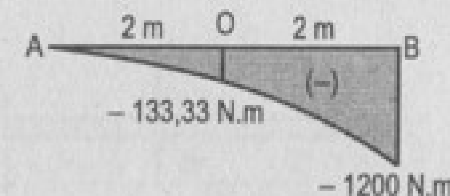


Diagrama de momentos por partes:









Como: $EIt_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B$

$$EIt_{B/A} = \frac{(4)(1200)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(4) - \frac{(3)(1200)}{4}\left(\frac{1}{5}\right)(3) \Rightarrow EIt_{B/A} = 2660\ N.m^3$$

También: $EIt_{O/A}(\text{área})_{OA} \cdot \bar{x}_O$

$$EIt_{O/A} = \frac{(2)(600)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) - \frac{(1)(133,33)}{4}\left(\frac{1}{5}\right)(1) \Rightarrow EIt_{O/A} = 393,33\ N.m^3$$

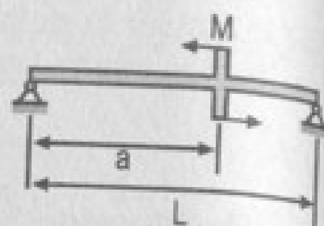
De la fig. (a): $\frac{EIt_{B/A}}{4} = \frac{\overline{OO''}}{2};\quad \overline{OO''} = \frac{EIt_{B/A}}{2} = 1330\ N.m^3$

También, del mismo gráfico:

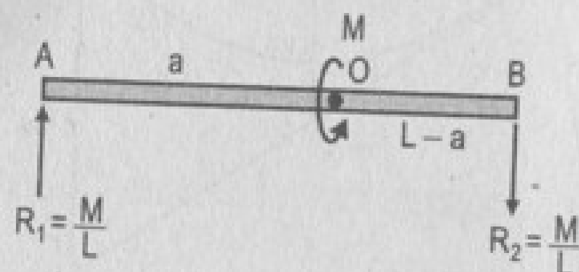
$EI\delta + EIt_{O/A} = OO'' \Rightarrow EI\delta + 393,33 = 1330$

$EI\delta = 936,67\ N.m^3$

658. En la viga que representa la figura, determinar el valor de $EI\delta$ en el punto de aplicación del par M.



Resolución:



Deformada:

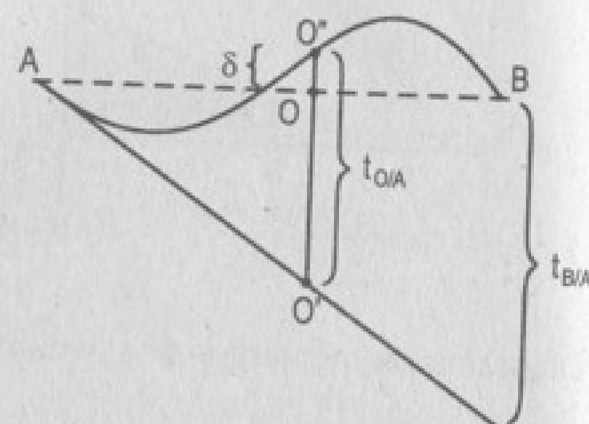
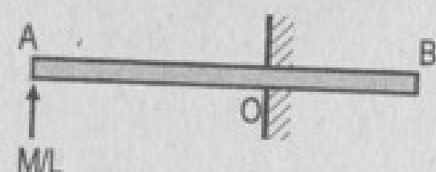
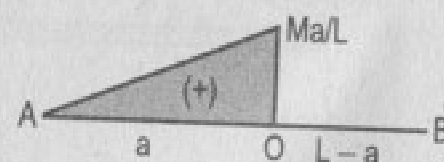
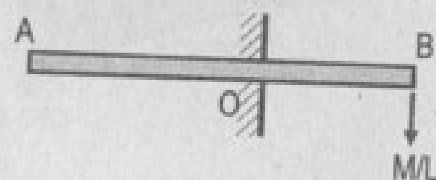
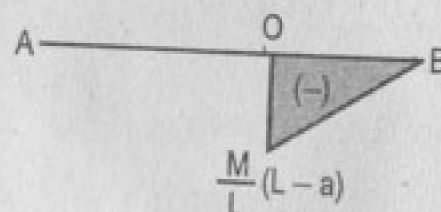


Diagrama de momentos por partes:









$$EIt_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B$$

$$EIt_{B/A} = (a)\left(\frac{Ma}{L}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(L - a + \frac{a}{3}\right) - (L-a)\left(\frac{M}{L}\right)(L-a)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(L-a)$$

$$EIt_{B/A} = \left(\frac{M}{6}\right)(-3a^2 - 2L^2 + 6La)$$

$$EIt_{O/A} = (\text{área})_{OA} \cdot \bar{x}_O$$

$$EIt_{O/A} = (a)\left(\frac{Ma}{L}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{Ma^3}{6L}$$

Del gráfico de la deformada:

$$\frac{t_{B/A}}{L} = \frac{\overline{OO"}}{a} \Rightarrow \overline{OO"} = \left(\frac{a}{L}\right)(t_{B/A})$$

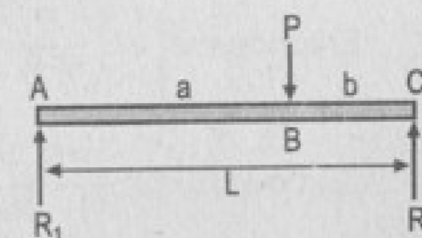
$$\delta + \overline{OO"} = t_{O/A}$$

$$EI\delta = EIt_{O/A} - (\overline{OO"})EI \Rightarrow EI\delta = \left(\frac{Ma^3}{6L}\right) - \left(\frac{a}{L}\right)\left(\frac{M}{6}\right)(-3a^2 - 2L^2 + 6La)$$

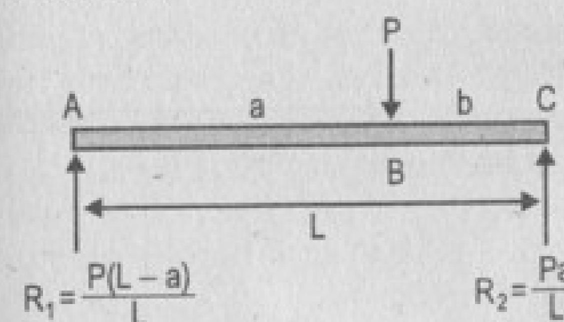
Reduciendo términos:

$$\boxed{EI\delta = \left(\frac{Ma}{3L}\right)(L^2 - 3La + 2a^2)}$$

659. Una viga simplemente apoyada soporta una carga concentrada aplicada en un punto cualquiera de su claro, como se indica en la figura. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia de A igual a: $x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$



Resolución:



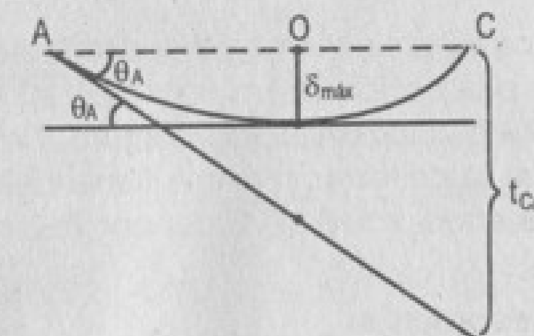
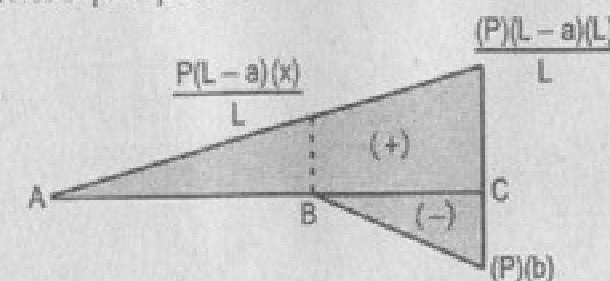


Diagrama de momentos por partes:



Como: $\theta_{AO} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AO}$ y $\theta_{AO} = \theta_A \Rightarrow \theta_{AO} = \frac{1}{EI}(x)\frac{(P)(L-a)}{L}(x)\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\theta_{AO} = \frac{P(L-a)x^2}{2EIL} \quad ...(1)$$

Pero: $\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L}$

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\cdot\bar{x}_B = \left(\frac{1}{EI}\right)\left[(L)(P)\frac{(L-a)}{L}(L)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(L) - (b)\frac{(P)(b)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(b)\right]$$

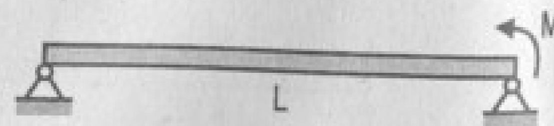
$$t_{B/A} = \left(\frac{P}{EI}\right)\left[\frac{(L-a)L^2 - b^3}{6}\right]$$

Entonces: $\theta_A = \left(\frac{P}{6EIL}\right)((L-a)L^2 - b^3) \quad ...(2)$

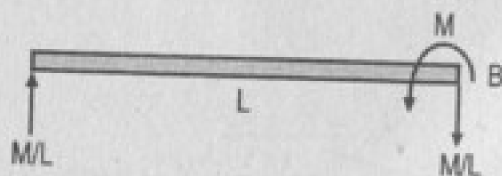
Como (1) = (2): $\frac{P(L-a)x^2}{2EIL} = \left(\frac{P}{6EIL}\right)((L-a)L^2 - b^3)$

Reduciendo términos: $\boxed{x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}}$

660. Una viga simplemente apoyada se somete a la acción de un par M en su extremo derecho, como indica la figura. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia x = 0,577L del apoyo izquierdo.



Resolución:



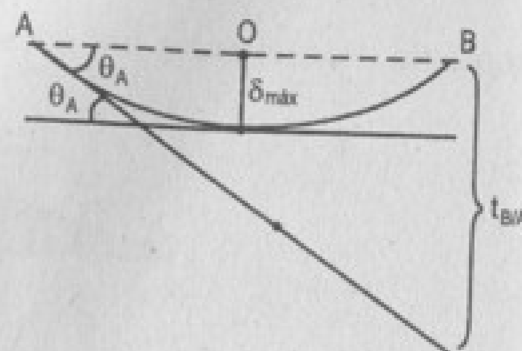
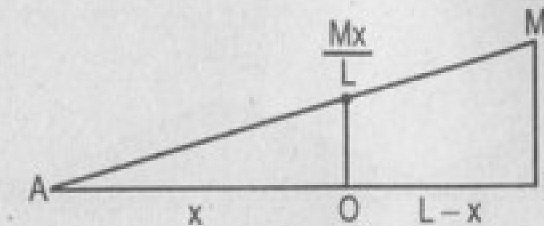


Diagrama de momentos por partes:



Como: $\theta_{AO} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AO}$

$$\theta_{AO} = \left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{Mx}{L}\right)(x)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{Mx^2}{2EIL} \quad ...(1)$$

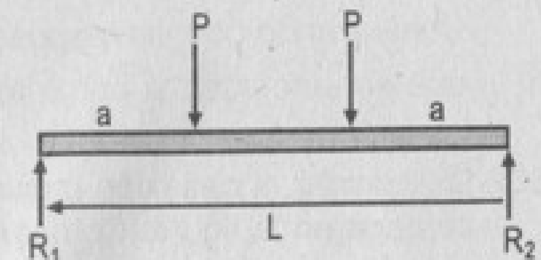
Pero: $\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} \quad ...(2)$

$$t_{B/A} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{BA}\cdot\bar{x}_B = \left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{ML}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(L) = \frac{ML^2}{6EI}$$

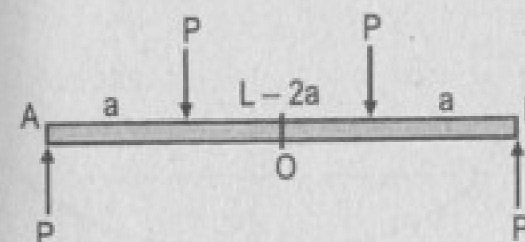
De (2): $\theta_A = \left(\frac{ML}{6EI}\right) \quad ...(3)$

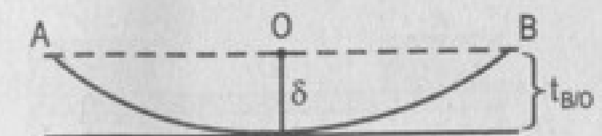
Como: (1) = (3) $\quad \frac{Mx^2}{2EIL} = \frac{ML}{6EI} \Rightarrow \boxed{x = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)L = 0{,}577L}$

661. Calcular la deflexión en el centro del claro de la viga simétricamente cargada representada en la figura. Cotejar el resultado, haciendo a = L/2, con el caso 6 de la tabla 6-2. Compararlo también con la deflexión en el centro para el caso 7 de la tabla 6-2.

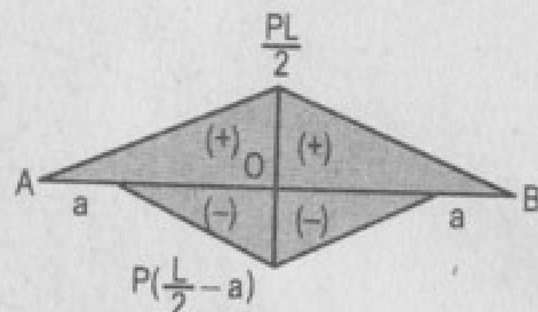


Resolución:





Elaborando los diagramas de momentos por partes (respecto de O):



Del gráfico: $\delta = t_{B/O} = (\text{área})_{BO} . \overline{x}_B$

$$t_{B/O} = \left(\frac{1}{EI}\right)\left[-\left(\frac{L}{2}-a\right)(P)\left(\frac{L}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(a+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}-a\right)\right)+\left(\frac{L}{2}\right)(P)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right]$$

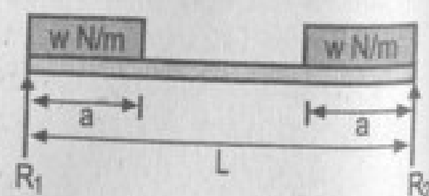
$$t_{B/O} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2) = \delta$$

Observación: solo se ha utilizado las áreas achuradas del gráfico de diagramas de momentos por partes.

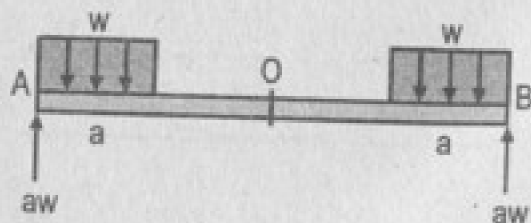
Si: $a = \frac{L}{2} \Rightarrow \delta = \left(\frac{P}{24EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(3L^2 - \frac{4L^2}{4}\right) \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{24EI}$

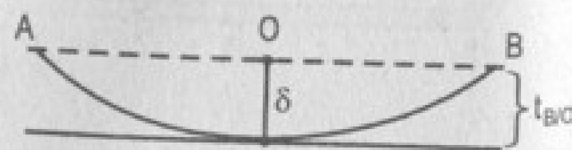
Comparando con las respuestas de la tabla 6 - 2 vemos que es coherente, ya que en este caso la carga total no es P, sino 2P.

662. Determinar la deflexión máxima en la viga representada en la figura. Comparar el resultado obtenido, poniendo a = L/2, con el caso 8 de la tabla 6-2. Utilizar el resultado para comprobar el obtenido en el problema 653.

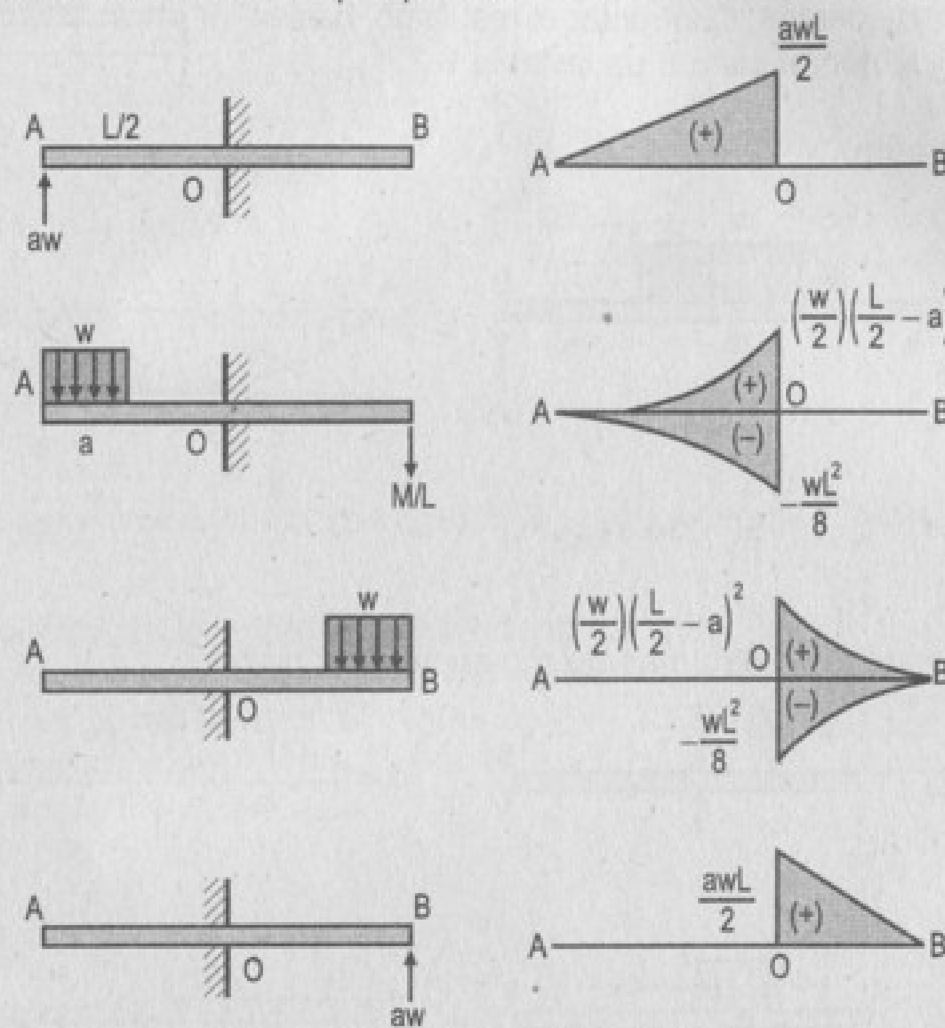


Resolución:





Considerando un sistema de cargas equivalentes y las relaciones, elaboramos los diagramas de momentos por partes:



$$EIt_{B/O} = (\text{área})_{BO} . \overline{x}_B = \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{awL}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right)-\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL^2}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{L}{2}-a\right)\left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L}{2}-a\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\left\{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{L}{2}-a\right)+a\right\}$$

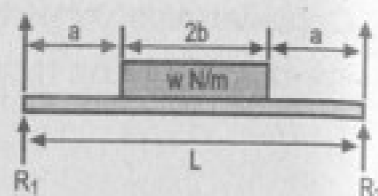
Reduciendo términos tenemos: $EIt_{B/O} = \frac{wa^2}{48}(3L^2 - 2a^2)$

Del gráfico: $\delta = t_{B/O} \Rightarrow$ $\boxed{EI\delta\left(\frac{wa^2}{48}\right)(3L^2 - 2a^2)}$

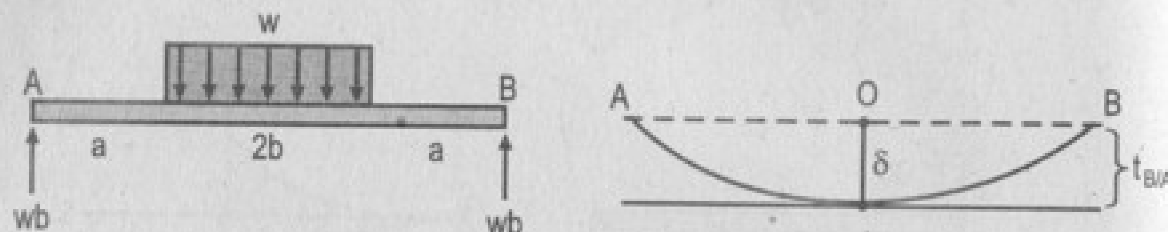
Si $a = \left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow EI\delta = \left(\frac{wa^2}{48}\right)\left(3L^2 - 2\frac{L^2}{4}\right) = \frac{5wL^4}{384}$

Lo cual es coherente con la tabla 6-2.

663. Calcular la deflexión máxima en la viga de la figura que soporta una carga uniformemente repartida sobre la parte central. Confrontar el resultado, haciendo 2b = L, con el caso 8 de la tabla 6-2.

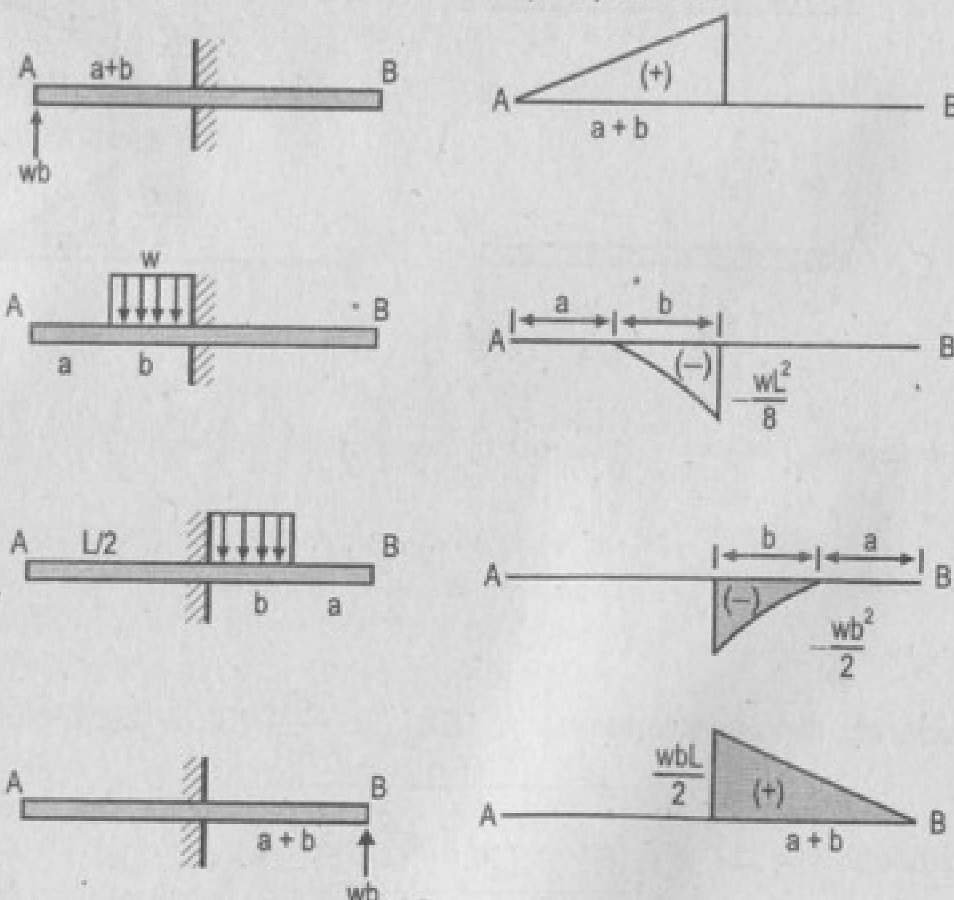


Resolución:



Como $\delta = t_{B/O} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{BO} \cdot \bar{x}_B$

Elaborando los diagramas de momentos por partes:



$$EIt_{B/O} = \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wbL}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - (b)\left(\frac{wb^2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(a + \frac{3b}{a}\right)$$

Reducimos términos y considerando que $a = \frac{L}{2} - b$.

$$EIt_{B/O} = \left(\frac{wb}{24}\right)[L^3 - 2Lb^2 + b^3]$$

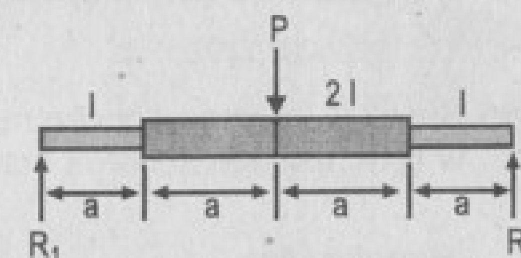
Del gráfico de la deformada: $\boxed{EI\delta = \left(\frac{wb}{24}\right)(L_3 - 2Lb^2 + b^3)}$

Si consideramos 2b = L, tenemos:

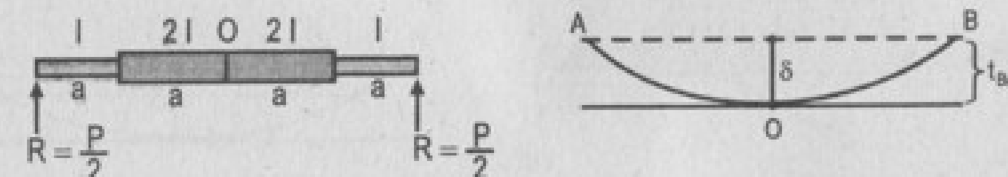
$$EI\delta = \left(\frac{wb}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(L^3 - 2L\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^3\right) \Rightarrow EI\delta = \frac{5wL^4}{384}$$

Esta respuesta es concordante con la que se observa en la tabla 6-2.

664. La mitad central de la viga de la figura tiene un momento de inercia doble que el del resto. Determinar la deflexión en el centro. *Indicación:* transformar el diagrama de M en diagrama de M/EI.

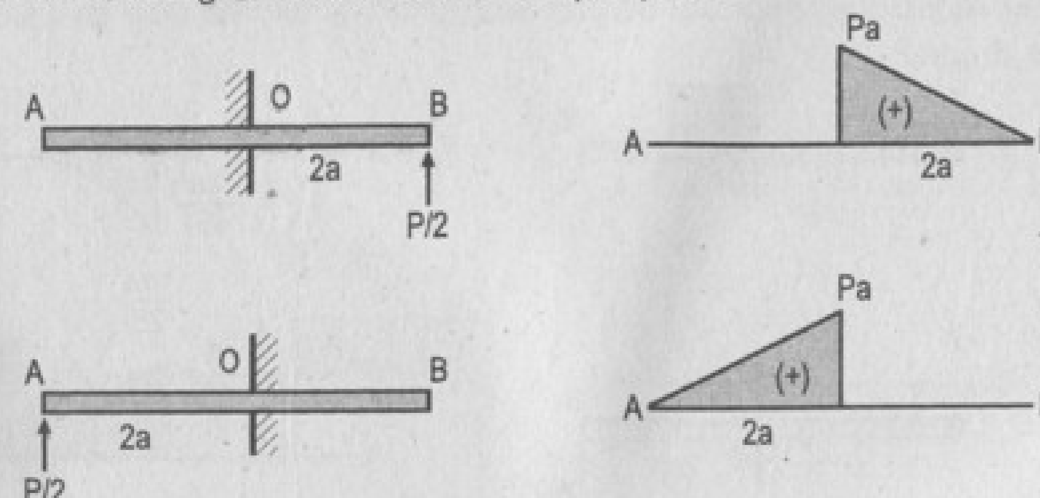


Resolución:

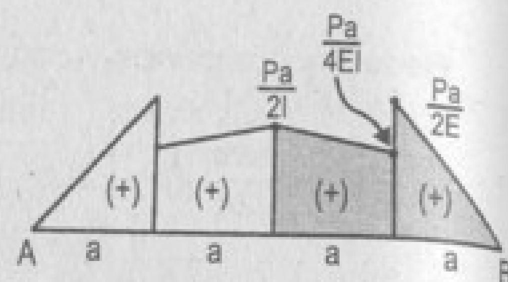


Nos piden δ, pero $\delta = t_{B/O}$.

Dibujamos los diagramas de momentos por partes:



Debido a que la viga presenta variación en la inercia, es conveniente trabajar con el diagrama de momentos por partes reducido.



$$t_{B/O} = \left(\frac{\text{área}_{BO}}{EI}\right)\bar{x}_B$$

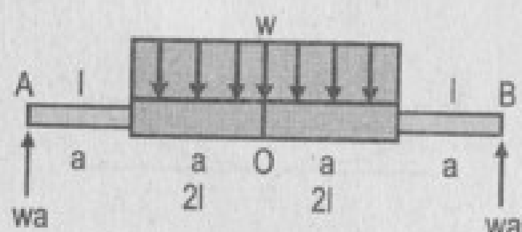
$$t_{B/O} = (a)\left(\frac{Pa}{2EI}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(a) + (a)\left(\frac{Pa}{4EI}\right)\left(a+\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{Pa}{4EI}\right)(a)\left(\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{2a}{3}\right)$$

$$t_{B/O} = \frac{3Pa^3}{4EI}$$

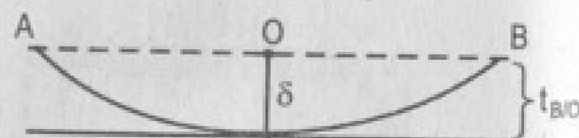
Del gráfico de deformaciones: $\boxed{\delta = \frac{3Pa^3}{4EI}}$

665. Sustituir la carga concentrada del problema 664 por una carga uniforme de w N/m aplicada sobre la mitad central de la viga. Hallar la deflexión máxima.

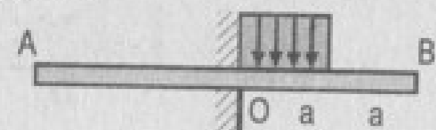
Resolución:

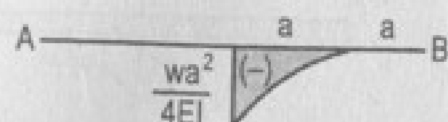


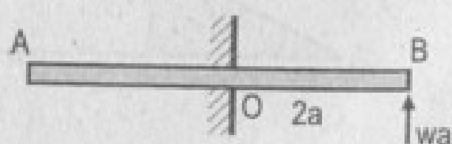
Deformación:

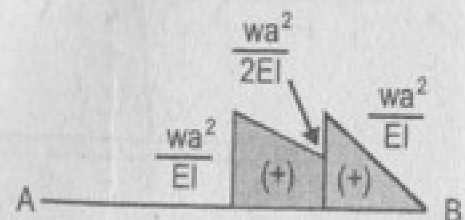


Igual que en el caso anterior, elaboramos los diagramas de momentos por partes reducidos y solo entre los nudos "Θ" y "B", ya que solo se necesitan esas áreas.









como $\delta = t_{B/O} = \left(\frac{(\text{área})_{BO}}{EI}\right)\bar{x}_B$

Entonces: $t_{B/O} = -(a)\left(\frac{wa^2}{4EI}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{3a}{4}\right) + (a)\left(\frac{wa^2}{EI}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)$

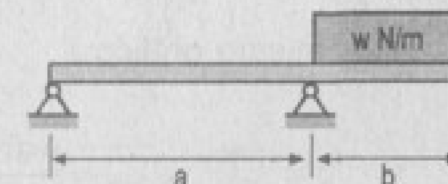
$$+(a)\left(\frac{wa^2}{2EI}\right)\left(a+\frac{a}{2}\right) + (a)\left(\frac{wa^2}{2EI}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{2a}{3}\right)$$

Reduciendo términos: $t_{B/O} = \frac{65wa^4}{48EI}$

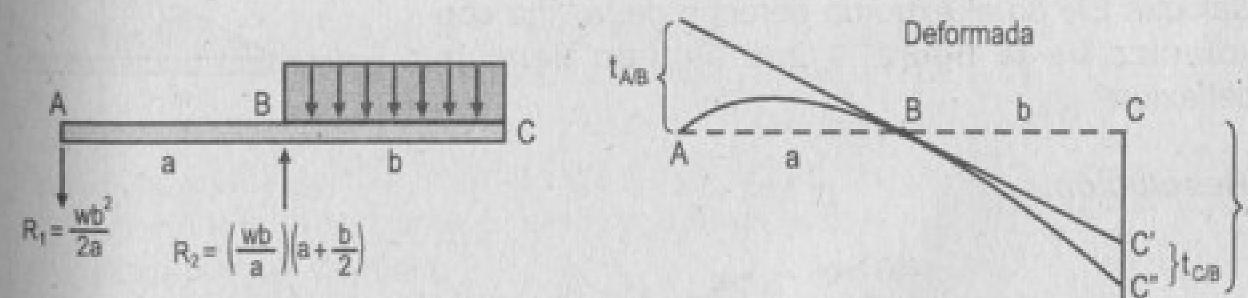
Del gráfico de las deformaciones observamos:

$\delta = t_{B/O} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{65wa^4}{48EI}}$

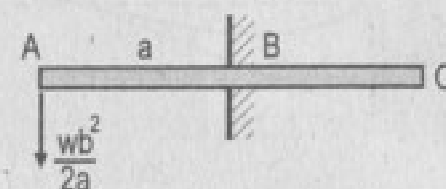
666. Calcular EIδ en el extremo derecho de la viga con voladizo.

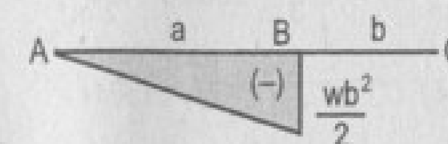


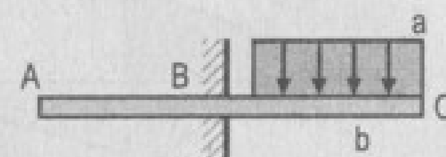
Resolución:

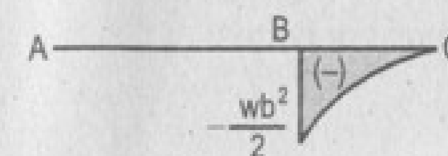


Elaborando el diagrama de momentos por partes:









$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\cdot \bar{x}_A = \left(\frac{1}{EI}\right)\left\{-(a)\left(\frac{wb^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(a)\right\} = -\frac{wa^2b^2}{6EI} \quad ...(1)$$

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{CB}\cdot \bar{x}_C = \left(\frac{1}{EI}\right)\left\{-(b)\left(\frac{wb^2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)(b)\right\} = -\frac{wb^4}{8EI} \quad ...(2)$$

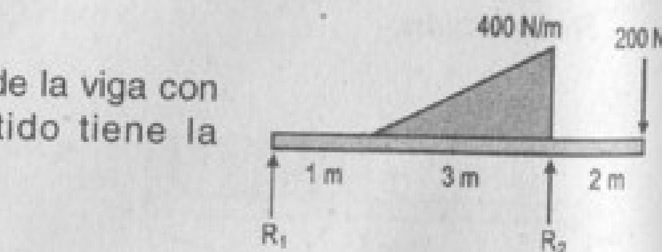
Del gráfico de la deformada: $\frac{t_{A/B}}{a} = \frac{\overline{CC}'}{b} \Rightarrow \overline{CC}' = \left(\frac{b}{a}\right)(t_{A/B})$

$$\overline{CC}' = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{wa^2b^2}{6EI}\right) = \frac{wab^3}{6EI}$$

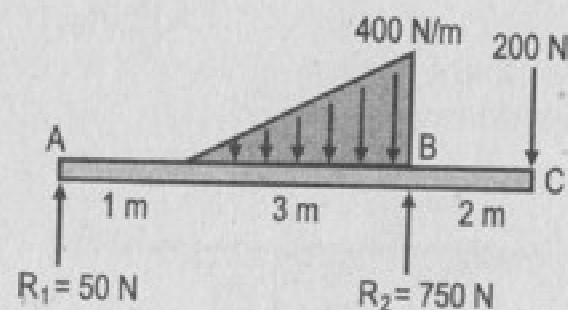
Del mismo gráfico:

$$\delta = \overline{CC}' + t_{C/B} = \frac{wab^3}{6EI} + \frac{wb^4}{8EI} \Rightarrow \boxed{\delta = \left(\frac{wb^3}{24EI}\right)(4a+3b)}$$

667. Calcular EIδ en el extremo derecho de la viga con voladizo de la figura. ¿Qué sentido tiene la deflexión?



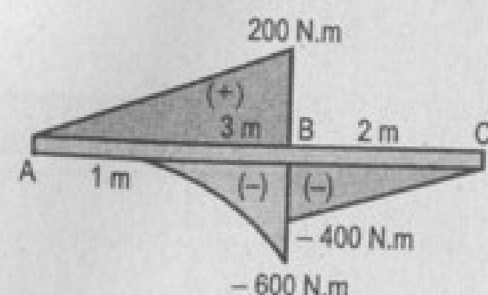
Resolución:



Deformada tentativa



Elaboramos los diagramas de momentos por partes:



$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\cdot \bar{x}_A \Rightarrow t_{A/B} = \left(\frac{1}{EI}\right)\left[\frac{(4)(200)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4) - \frac{(3)(600)}{4}\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)(3)\right)\right]$$

$$t_{A/B} = -\frac{463{,}33}{EI}$$

Como se observa, $t_{A/B}$ es negativa, por lo cual "A" se encuentra por debajo de la tangente en "B".

Deformada definitiva:

$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{Área})_{CB}\cdot \bar{x}_C$$

$$t_{C/B} = -\left(\frac{1}{EI}\right)\left[\frac{(2)(400)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right] = -\frac{533{,}33}{EI}$$

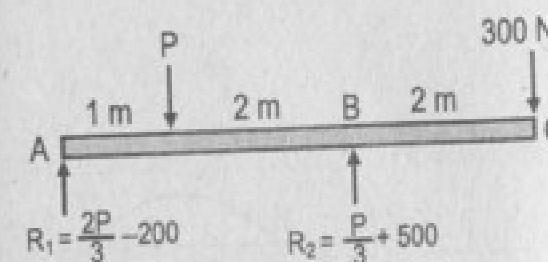
Del gráfico de deformada definitiva: $\frac{t_{A/B}}{4} = \frac{\overline{CC}'}{2} \Rightarrow \overline{CC}' = \frac{t_{A/B}}{2} = -\frac{231{,}67}{EI}$

Del mismo gráfico: $\delta = |\overline{CC}'| + |t_{C/B}| = \frac{231{,}67}{EI} + \frac{533{,}33}{EI}$

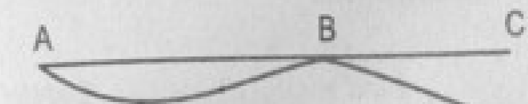
$$\therefore \boxed{EI\delta = 765 \text{ N.m}^3}$$

668. Calcular el valor de P en la viga de la figura, de manera que la tangente a la elástica en el apoyo derecho sea horizontal.

Resolución:



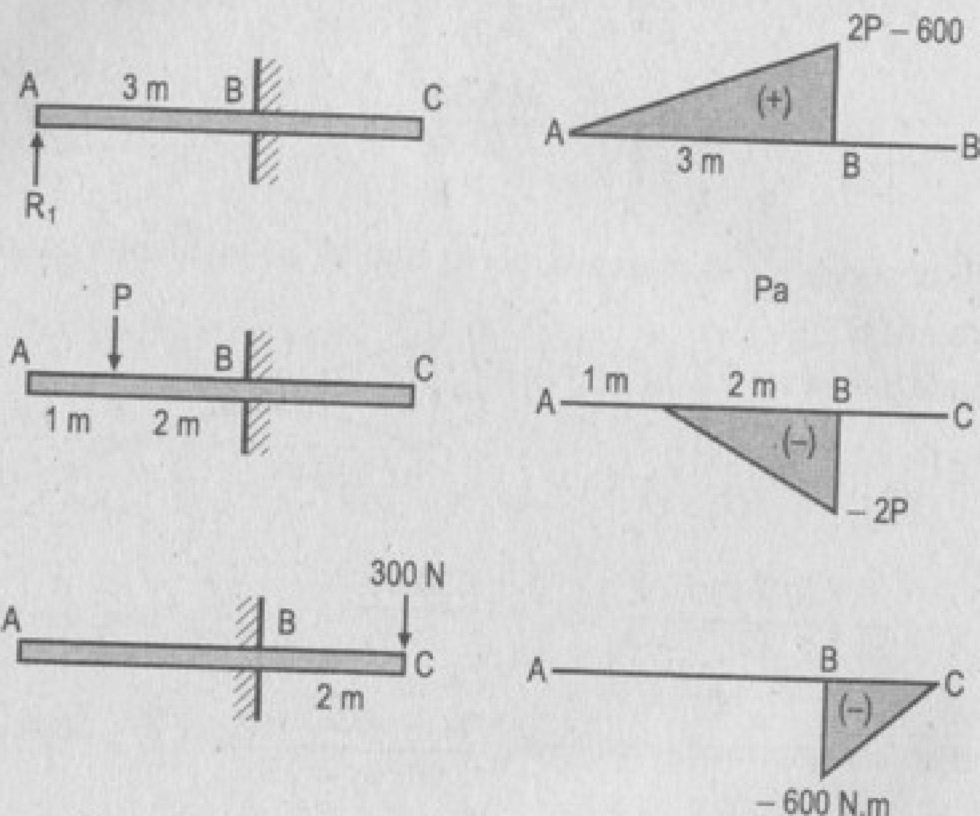
Deformada:



Por condición del problema:

$t_{A/B} = 0 \quad ...(1)$

Elaboramos las diagramas de momentos por partes:

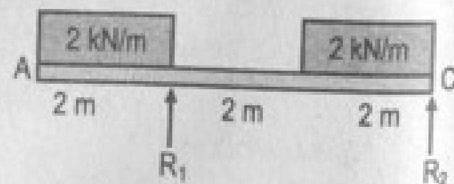


Aplicamos (1):

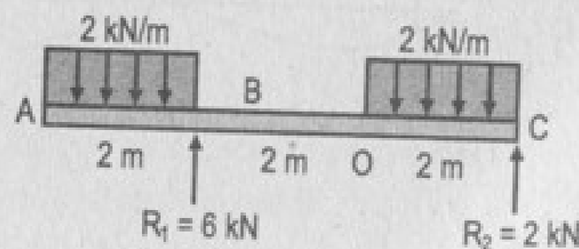
$$t_{A/B} = \frac{(\text{área})_{AB}}{EI}.\bar{x}_A = 0 \Rightarrow t_{A/B} = \frac{(3)(2P-600)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3) - \frac{(2)(2P)}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right) = 0$$

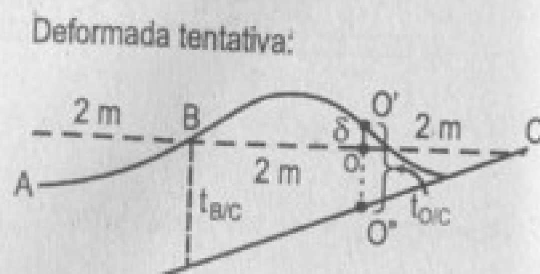
De lo cual tenemos: $\boxed{P = 1350\ N}$

669. Calcular el valor de $EI\delta$ en el punto medio entre apoyos de la viga de la figura.

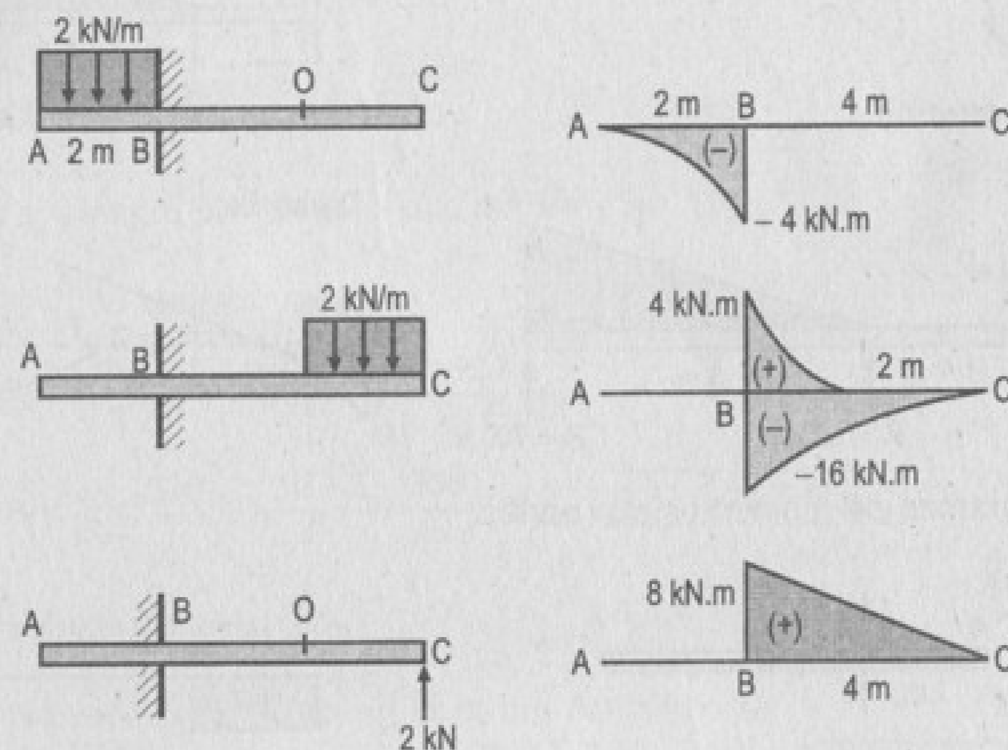


Resolución:





Elaboramos los diagramas de momentos por partes:



$EIt_{B/C} = (\text{área})_{BC}.\bar{x}_B$

$$EIt_{B/C} = \frac{(2)(4)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(2) - \frac{(4)(16)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(4) + \frac{(4)(8)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(4)$$

$EIt_{B/C} = 1{,}33\ kN.m^3$

El signo positivo nos indica que se encuentra sobre la tangente.

$EIt_{O/C} = (\text{área})_{OC}.\bar{x}_O$

$$EIt_{O/C} = -\frac{(2)(4)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(2) + \frac{(2)(4)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) \Rightarrow EIt_{O/C} = 1{,}33\ kN.m^3$$

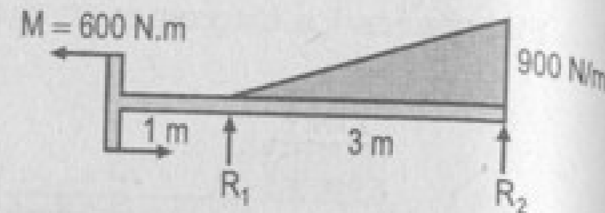
En este caso el signo positivo nos indica que "O" se encuentra sobre la tangente.

De la figura de la deformada: $\frac{EIt_{B/C}}{4} = \frac{\overline{OO"}}{2} \Rightarrow \overline{OO"} = 0{,}665\ kN.m^3$

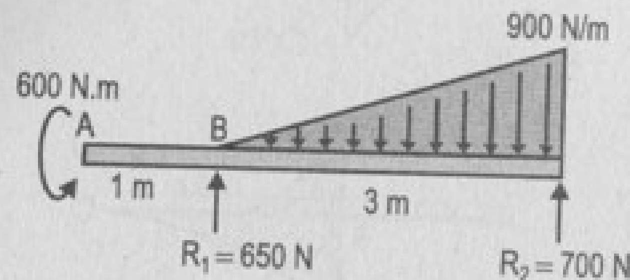
De la misma gráfica:

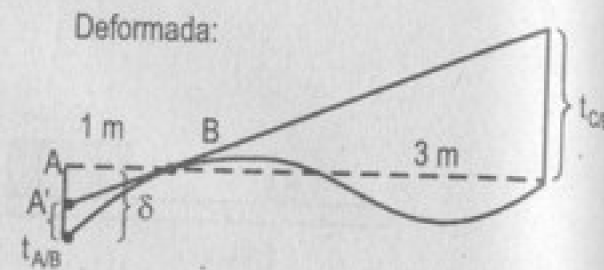
$$\delta = EIt_{O/C} - \overline{OO"} = 1{,}33 - 0{,}665 \Rightarrow \boxed{\delta = 0{,}665\ kN.m^3}$$

670. Calcular el valor de EIδ en el extremo izquierdo de la viga con voladizo de la figura.

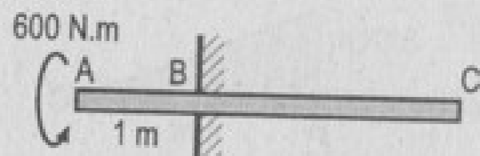


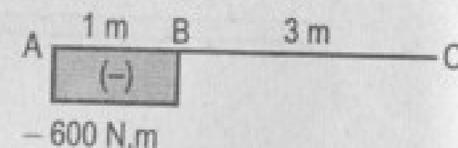
Resolución:

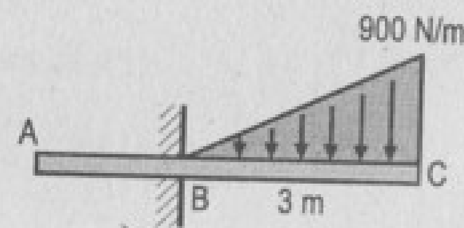


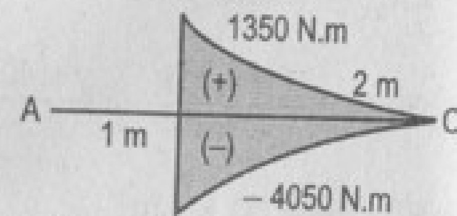


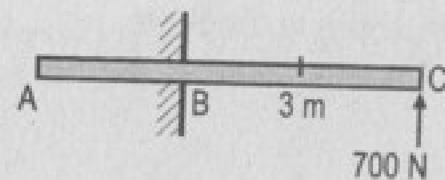
Diagramas de momentos por partes:

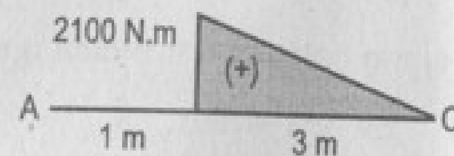












$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{CB} \cdot \bar{x}_C \qquad \text{...(1)}$$

$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{EI}\right)\left\{-\frac{(3)(4050)}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(3) + \frac{(3)(1350)}{4}\left(\frac{4}{5}\right)(3) + \frac{(3)(2100)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3)\right\}$$

$t_{C/B} = -\dfrac{382,5}{EI}$ ("C" se encuentra por debajo de la tangente en "B")

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A \qquad \text{...(2)}$$

$$t_{A/B} = -\frac{1}{EI}(1)(600)\frac{1}{2}(1) = -\frac{300}{EI}$$

("A" se encuentra por debajo de la tangente en "B")

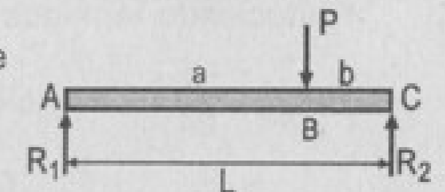
Del gráfico de la deformada:

$$\frac{t_{C/B}}{3} = \frac{\overline{AA'}}{1} \Rightarrow \overline{AA'} = \frac{t_{C/B}}{3} = \frac{127,5}{EI}$$

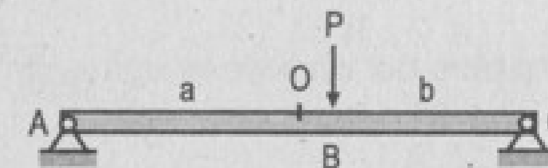
$$\delta = |AA'| + |t_{A/B}| = \frac{127,5}{EI} + \frac{300}{EI} \Rightarrow \boxed{EI\delta = 427,5 \text{ N.m}^3}$$

671; 672. problemas ilustrativos

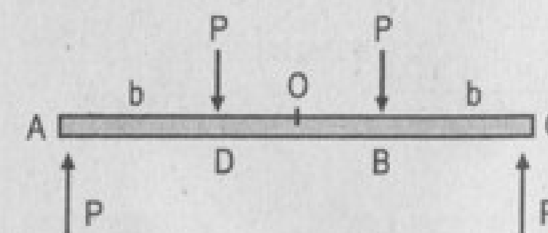
673. Demostrar que la deflexión en el centro del claro de la viga de la figura es $\delta = (Pb/48EI)(3L^2 - 4b^2)$.



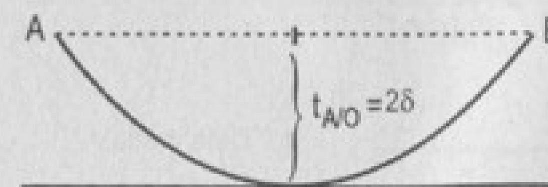
Resolución:



(a) Carga original

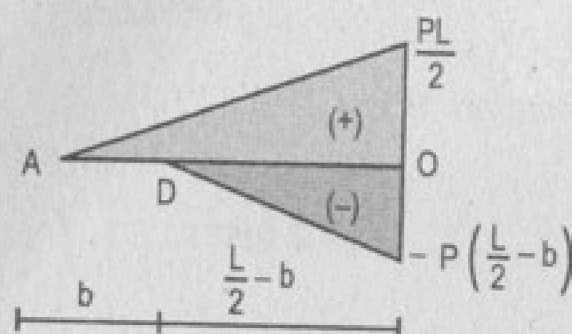


(b) Transformación para producir simetría



(c) Deformada

Debemos calcular $t_{A/O} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{A_O} \cdot \bar{x}_A$, como se observa solo debemos calcular las áreas entre "A" y "O".



(d) Diagrama de momentos por partes.

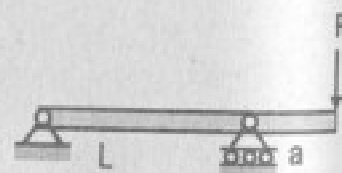
$$EIt_{A/O} = \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{PL}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2} - b\right)(P)\left(\frac{L}{2} - b\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(b + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2} - b\right)\right)$$

Reduciendo términos tenemos:

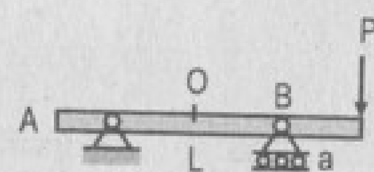
$EI\, t_{A/O} = \frac{Pb}{24}(3L^2 - 4b^2)$, pero $t_{A/O} = 2\delta$

$$EI(2\delta) = \frac{Pb}{24}(3L^2 - 4b^2) \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{Pb}{48EI}(3L^2 - 4b^2)}$$

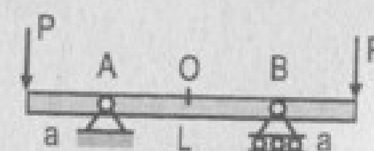
674. Determinar la deflexión en el centro del claro de la viga de la figura.



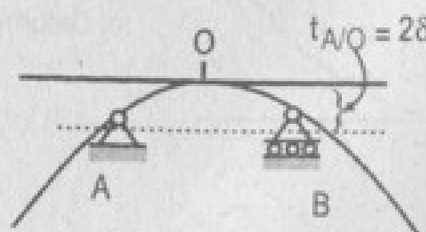
Resolución:



(a) Carga original

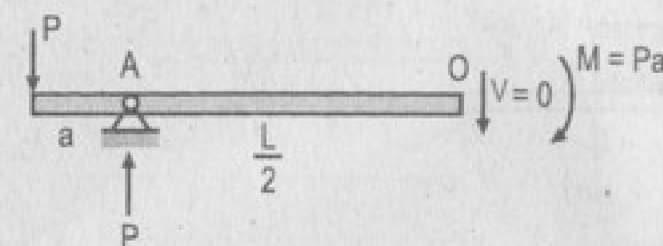


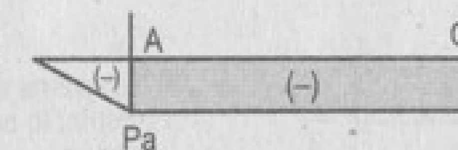
(b) Transformación para producir simetría



(c) Deformada

Como $t_{A/O} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})A_O \cdot \bar{x}_A$, entonces trabajamos con el lado izquierdo de la viga.





(d) Diagrama de momento por partes

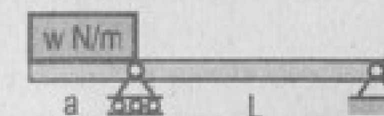
$$EIt_{A/O} = -(Pa)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PaL^2}{8}$$

El signo negativo nos indica que "A" se encuentra por debajo de la tangente en "O", pero $T_{A/O} = 2\delta$

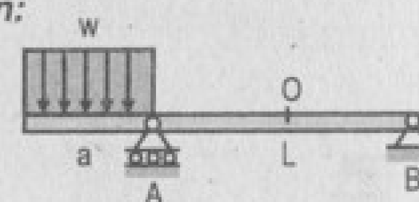
Entonces:

$$EI(2\delta) = -\frac{PaL^2}{8} \Rightarrow \boxed{\delta = -\frac{PaL^2}{16EI}}$$

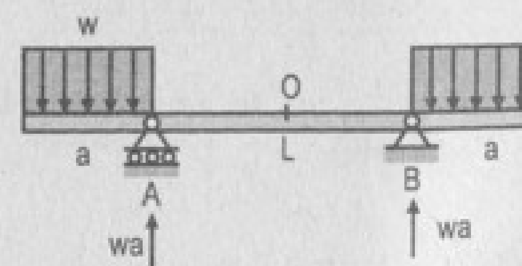
675. Repetir el problema anterior en el caso de la figura.



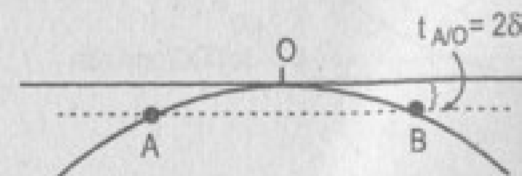
Resolución:



(a) Carga original

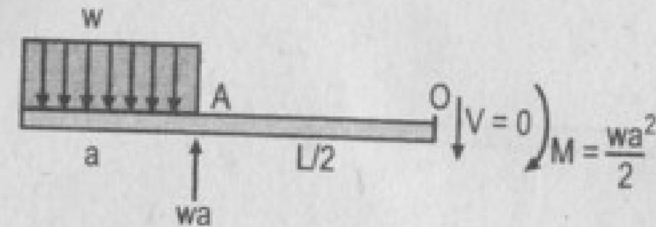


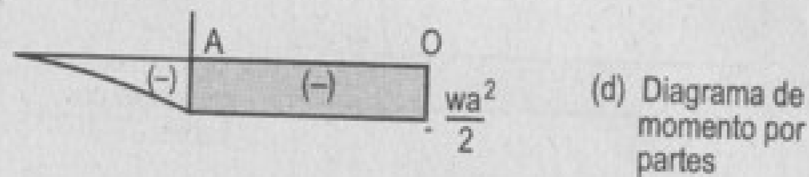
(b) Transformación para producir simetría



(c) Deformada

Debemos calcular $t_{A/O}$, por lo tanto debemos calcular las áreas que se encuentran entre los puntos "A" y "O".





(d) Diagrama de momento por partes

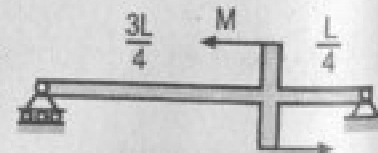
$$EI\, t_{A/O} = (\text{área})_{A_O} \cdot \bar{x}_A \Rightarrow EI\, t_{A/O} = -\left(\frac{wa^2}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{wa^2L^2}{16}$$

Como se observa en la deformación: $t_{A/O} = 2\delta$

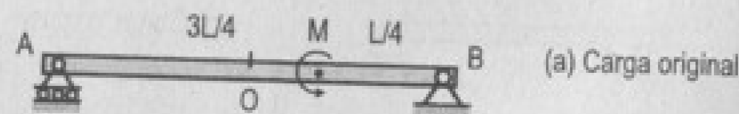
Por lo tanto: $EI(2\delta) = -\dfrac{wa^2L^2}{16} \Rightarrow \boxed{\delta = -\dfrac{wa^2L^2}{32\,EI}}$

El signo negativo nos indica que el punto "A" se encuentra por debajo de la tangente a la viga en "O".

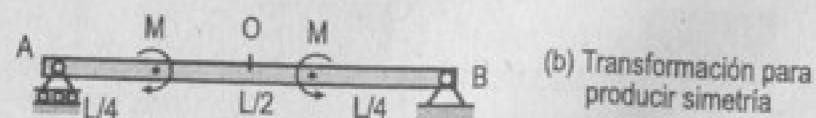
676. Calcular la deflexión en el centro del claro en el caso de una viga con un par aplicado como se indica en la figura.



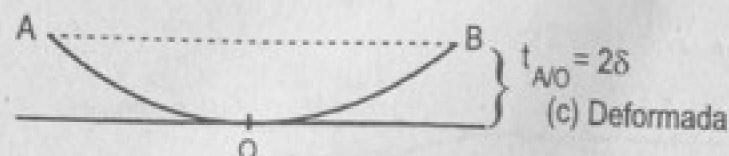
Resolución:



(a) Carga original

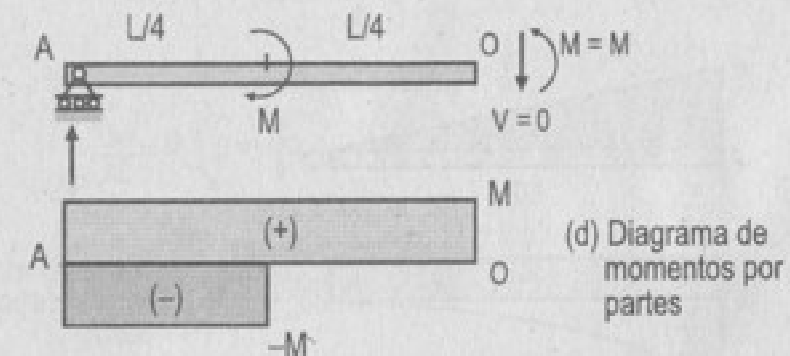


(b) Transformación para producir simetría



(c) Deformada

Como $t_{A/O} = \left(\dfrac{1}{EI}\right)(\text{área})_{AO} \cdot \bar{x}_A$ ...(1)



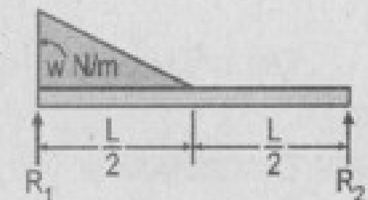
(d) Diagrama de momentos por partes

De (1) y (d):

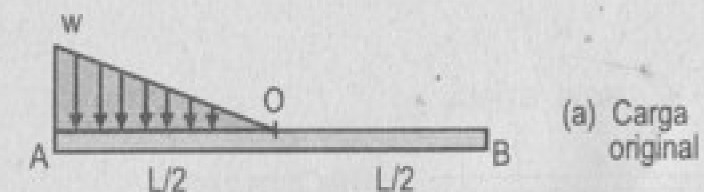
$$EIt_{A/O} = \left(\frac{L}{2}\right)(M)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{4}\right)(M)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) \Rightarrow EIt_{A/O} = 3\frac{ML^2}{32}$$

Del gráfico de la deformada: $EI(2\delta) = 3\dfrac{ML^2}{32} \Rightarrow \boxed{\delta = \dfrac{3ML^2}{64EI}}$

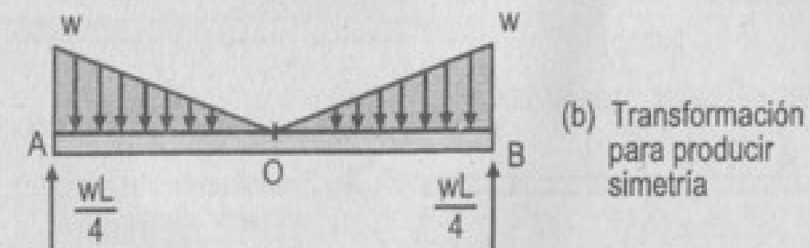
677. Determinar la deflexión en el centro del claro en la viga cargada como indica la figura.



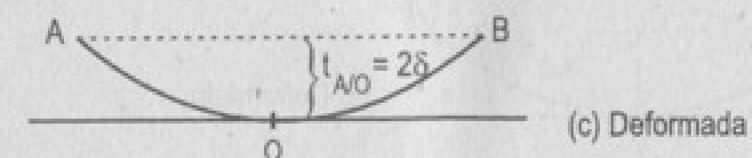
Resolución:



(a) Carga original



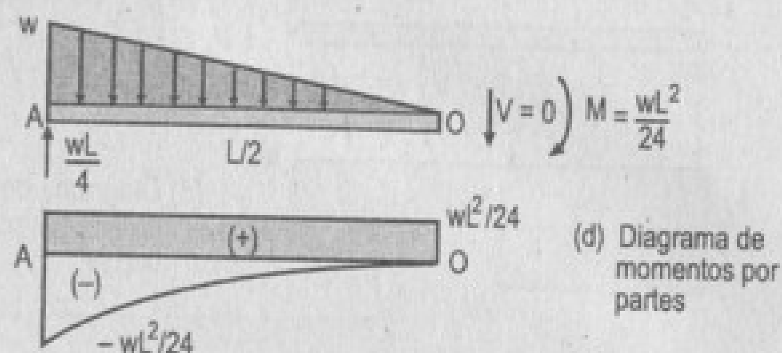
(b) Transformación para producir simetría



(c) Deformada

El desplazamiento de "A" respecto a una tangente en "O" se calcula como:

El $t_{A/O} = (\text{área})_{AO} \cdot \bar{x}_A$ ...(1)



(d) Diagrama de momentos por partes

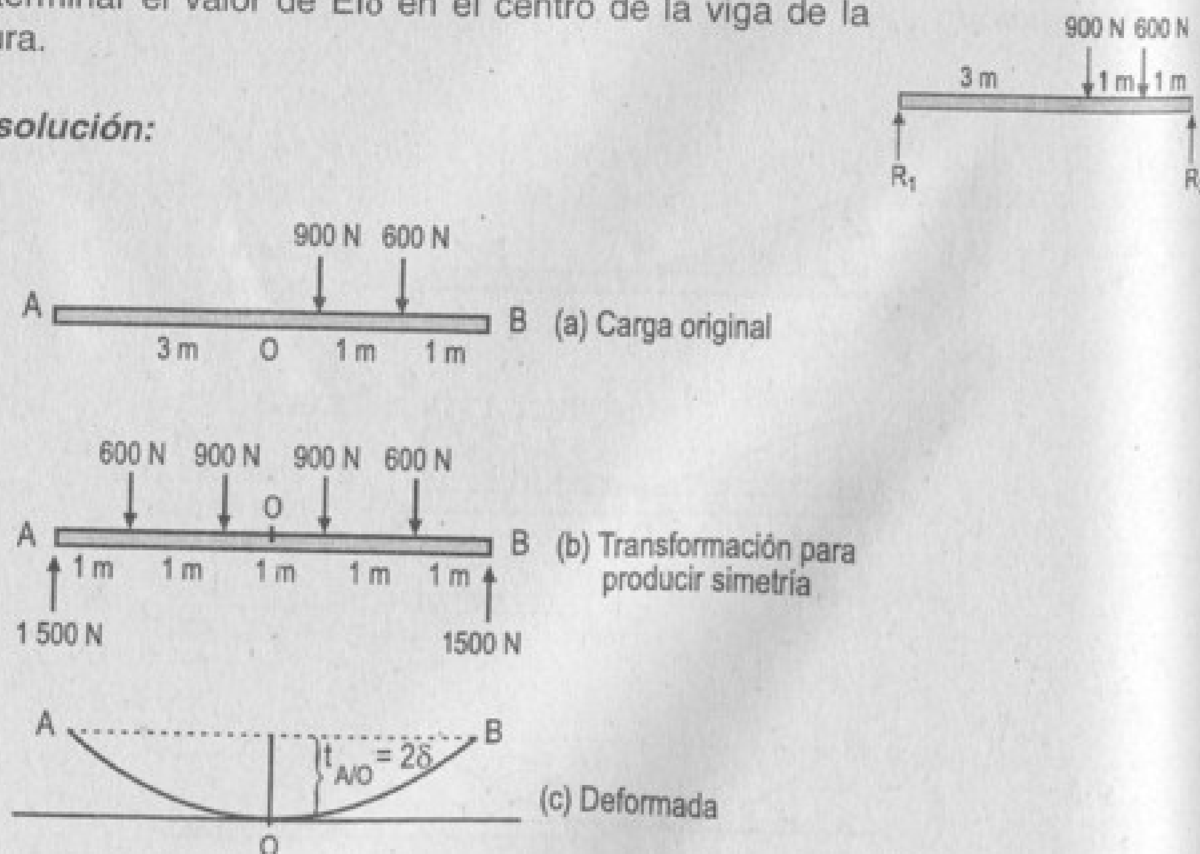
De (1) y (d):

$$EIt_{A/O} = \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{L}{4}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow EI\,t_{A/O} = \frac{9wL^4}{1920}$$

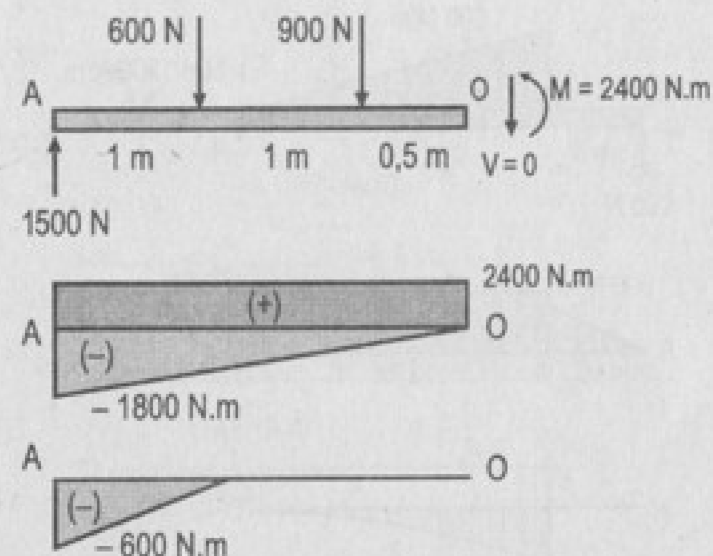
Del gráfico de la deformada: $EI\,(2\delta) = \dfrac{9wL^4}{1920} \Rightarrow \boxed{\delta = \dfrac{9wL^4}{3840\,EI}}$

678. Determinar el valor de EIδ en el centro de la viga de la figura.

Resolución:



Trazando las áreas comprendidas entre "A" y "O":



$EIt_{A/O} = (\text{área})_{AO} \cdot \bar{x}_A$

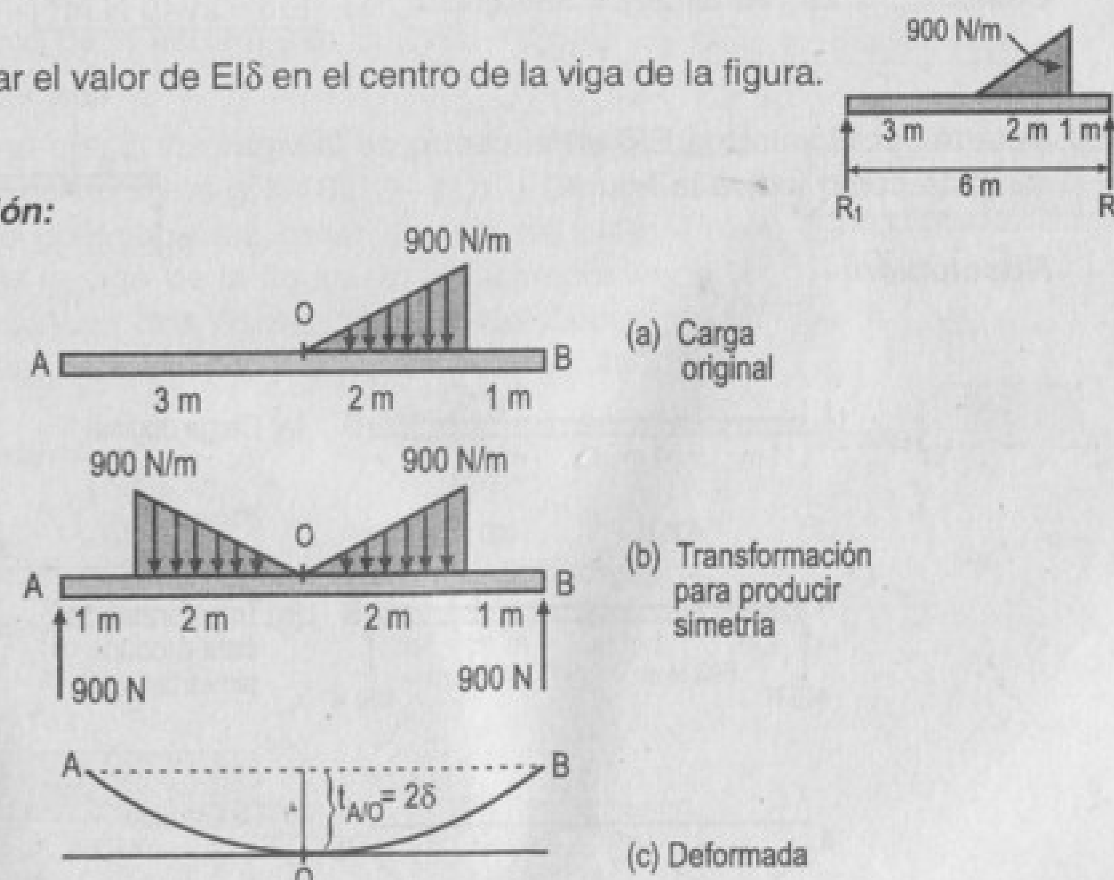
$$EIt_{A/O} = (2{,}5)\,(2400)\left(\frac{2{,}5}{2}\right) - \frac{(2)(1800)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) - \frac{(1)(600)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1)$$

$EIt_{A/O} = 6200\ N.m^3$

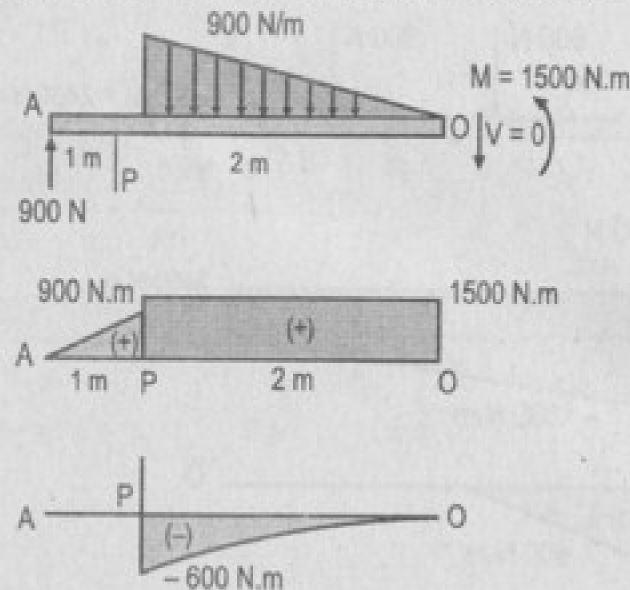
Del gráfico de la deformada: $EI(2\delta) = 6200\ N.m^3 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 3100\ N.m^3}$

679. Determinar el valor de EIδ en el centro de la viga de la figura.

Resolución:



Elaborando los diagramas de momentos por partes entre "A" y "O".



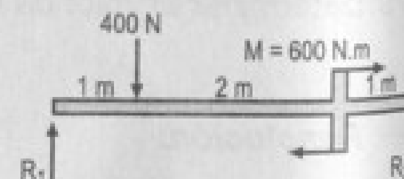
Como $EI\,t_{A/O} = (\text{área})_{AO} \cdot \bar{x}_A$

$$EI\,t_{A/O} = \frac{(1)(900)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(1) + (2)(1500)(1+1) - \frac{(2)(600)}{4}\left(1+\frac{2}{5}\right)$$

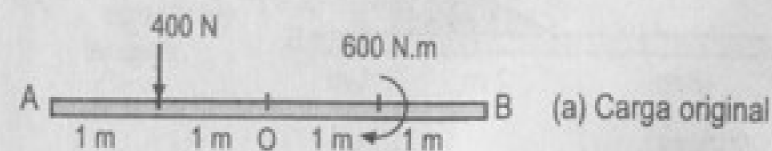
$EI\,t_{A/O} = 5880\ N.m^3$

Como: $t_{A/O} = 2\delta \Rightarrow EI(2\delta) = 5880\ N.m^3 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 2940\ N.m^3}$

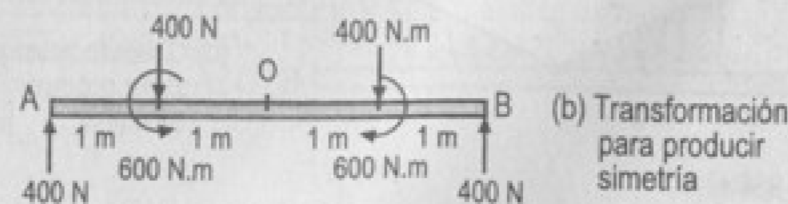
680. Determinar el valor de EIδ en el centro de la viga cargada como indica la figura.



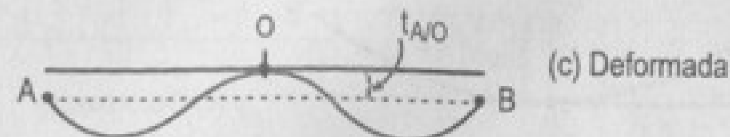
Resolución:



(a) Carga original

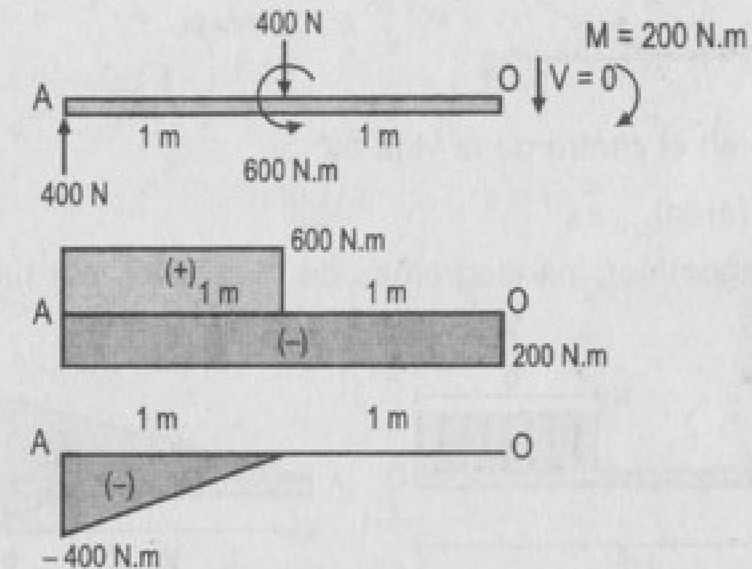


(b) Transformación para producir simetría



(c) Deformada

Trabajando entre "A" y "O":



Sabemos que:

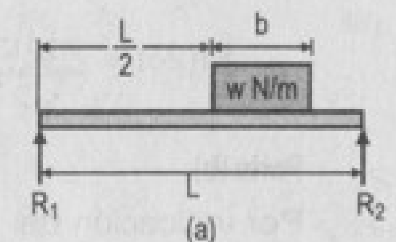
$EI\,t_{A/O} = (\text{área})_{AO} \cdot \bar{x}_A$

$$EI\,t_{A/O} = (1)(600)(0{,}5) - (2)(200)(1) - \frac{(1)(400)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1) \Rightarrow EI\,t_{A/O} = -166{,}67\ N.m^3$$

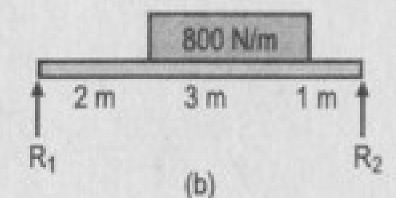
El signo negativo se debe a que el punto "A" se encuentra por debajo de la tangente en "O".

Del gráfico de la deformada: $EI\,(2\delta) = -166{,}67 \Rightarrow \boxed{EI\delta = -83{,}335\ N.m^3}$

681. Demostrar que el valor de EIδ en el centro de la viga de la figura, parte (a), es $(wb/48)(L^3 - 2Lb^2 + b^3)$. Aplicar el resultado obtenido para hallar el valor del claro en el centro de la viga de la figura (b), descomponiendo la carga dada en dos partes, a partir del centro de la viga, a uno y otro lado, y sumando los resultados.

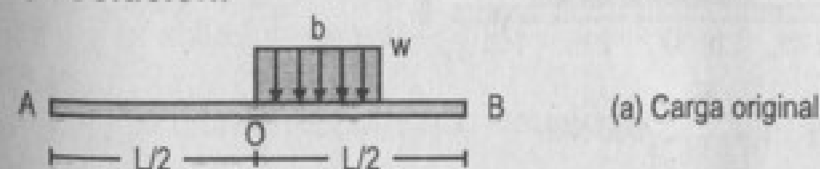


(a)



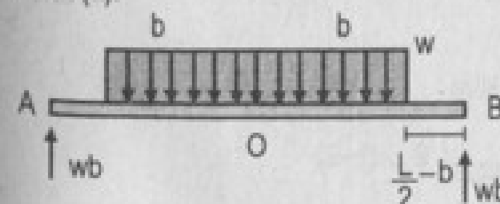
(b)

Resolución:

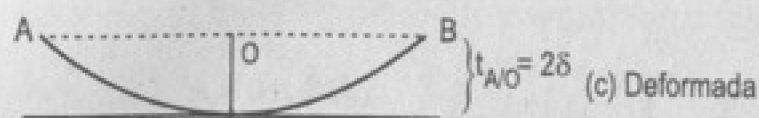


(a) Carga original

Parte (a):



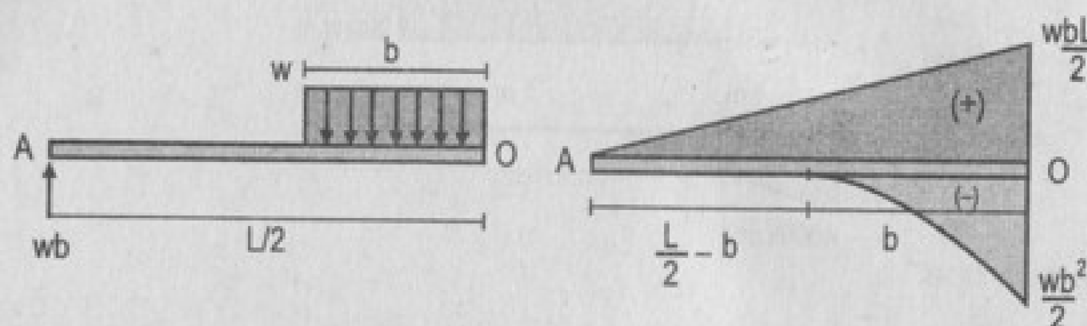
(b) Transformación para producir simetría



La deflexión en el centro de la viga es:

$EI\, t_{A/O} = (\text{área})_{AO} \cdot \bar{x}_A$

Para ello elaboramos los diagramas de momentos por partes:



$$EI\, t_{A/O} = \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wbL}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - (b)\left(\frac{wb^2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{L}{2} - b + \frac{3b}{4}\right)$$

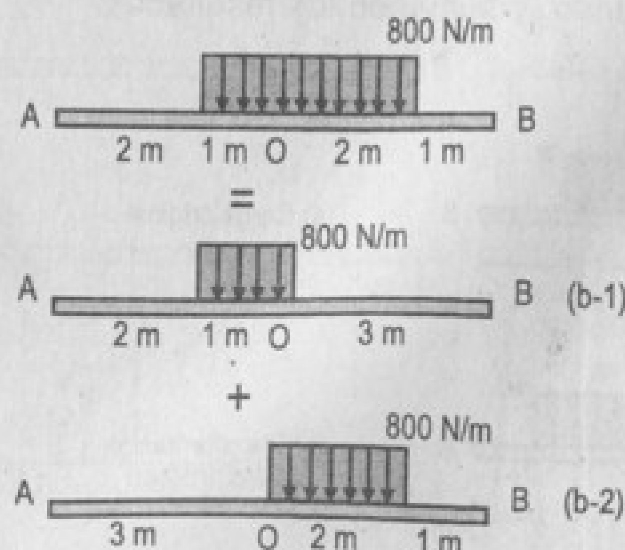
Reduciendo términos: $EIt_{A/O} = \dfrac{wb\left(L^3 - 2Lb^2 + b^3\right)}{24}$

Del gráfico de la deformada:

$$EI(2\delta) = \frac{wb\left(L^3 - 2Lb^2 + b^3\right)}{24} \Rightarrow \boxed{EI\delta = \frac{wb\left(L^3 - 2Lb^2 + b^3\right)}{48}}$$

Parte (b):

Por indicación del problema, separamos la carga en 2 partes como sigue:



Para (b-1): $b = 1$ m ; $w = 800$ N/m ; $L = 6$ m

$$EI\delta_1 = \frac{(800)(1)}{48}\left(6^3 - (2)(6)(1)^2 + (1)^3\right) \Rightarrow EI\delta_1 = 3416{,}67 \text{ N.m}^3$$

Para (b-2): $b = 2$ m ; $w = 800$ N/m ; $L = 6$ m

$$EI\delta_2 = \frac{(800)(2)}{48}\left(6^3 - (2)(6)(2)2 + (2)^3\right) \Rightarrow EI\delta_2 = 5866{,}67 \text{ N.m}^3$$

Finalmente:

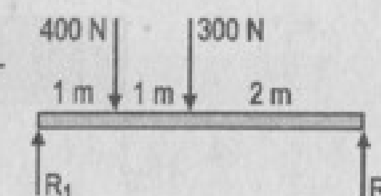
$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2$

$$EI\delta = 3416{,}67 + 5866{,}07 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 9293{,}34 \text{ N.m}^3}$$

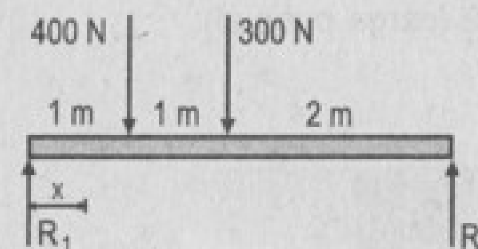
682; 683; 684; 685: problemas ilustrativos.

Para resolver los problemas siguientes utilícese la tabla 6-2.

686. Determinar el valor de $EI\delta$ bajo cada carga concentrada de la figura.



Resolución:



Para la solución de este problema usaremos el caso 7 de la tabla 6-2.

a) Calculando la deflexión debajo de la carga de 400 N (x = 1 m):

$$EI\delta_1 = \frac{(400)(3)(1)}{(6)(4)}(4^2 - 1^2 - 3^2) = 300 \text{ N.m}^3$$

$$EI\delta_2 = \frac{(300)(2)(1)}{(6)(4)}(4^2 - 1^2 - 2^2) = 275 \text{ N.m}^3$$

$$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 575\ N.m^3}$$

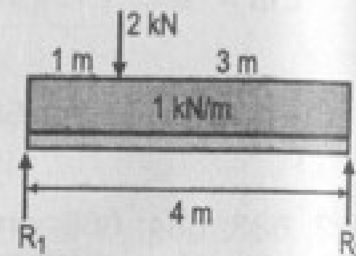
b) Calculando la deflexión debajo de la carga de 300 N (x = 2 m):

$$EI\delta_1 = \frac{(400)(3)}{(6)(4)}\left[\left(\frac{4}{3}\right)(2-1)^3 + (4^2 - 3^2)(2) - 2^3\right] = 366{,}67\ N.m^3$$

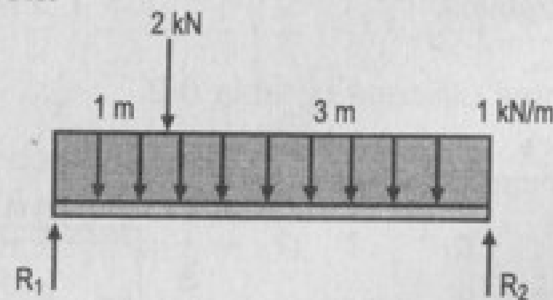
$$EI\delta_2 = \frac{(300)(2)(2)}{(6)(4)}(4^2 - 2^2 - 2^2) = 400\ N.m^3$$

$$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 766{,}67\ N.m^3}$$

687. Calcular la deflexión en el centro del claro, en la viga de la figura, con $E = 10 \times 10^9\ N/m^2$ e $I = 20 \times 10^6\ mm^4$.



Resolución:



Utilizando el caso (7) de la tabla 6-2 (carga puntual):

$$\delta_1 = \frac{Pb}{48\ EI}(3L^2 - 4b^2)\ a > b$$

$P = 2$ kN ; $b = 1$ m , $a = 3$ m , $L = 4$ m

$E = 10 \times 10^9\ N/m^2$, $I = 20 \times 10^{-6}\ m^4$

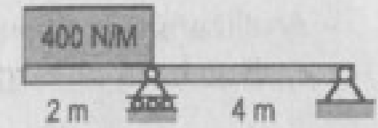
$$\delta_1 = \frac{(2\times10^3)(1)}{(48)(10\times10^9)(20\times10^{-6})}[(3)(4)^2 = (4)(1)^2] \Rightarrow \delta_1 = 9{,}1667 \times 10^{-3}\ m$$

Utilizando el caso (8) de la tabla 6-2 (carga repartida):

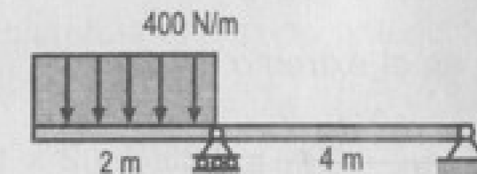
$$\delta_2 = \frac{5wL^4}{384\ EI} \Rightarrow \delta_2 = \frac{(5)(1\times10^3)(4)^4}{(384)(10\times10^9)(20\times10^{-6})} = 0{,}01667\ m$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow \delta = 0{,}02583\ m\ \therefore\ \boxed{\delta = 25{,}83\ mm}$$

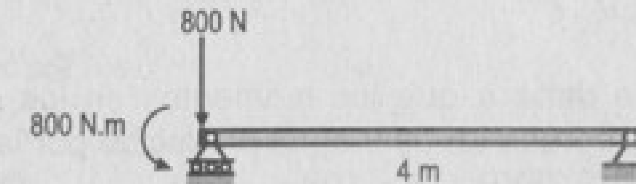
688. Determinar el valor de $EI\delta$ en el punto central entre apoyos de la viga de la figura.



Resolución:



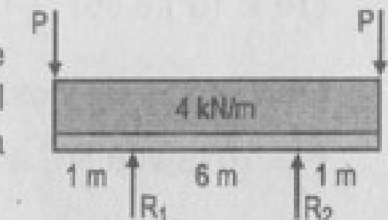
La viga puede ser reemplazada por otra con las siguientes características:



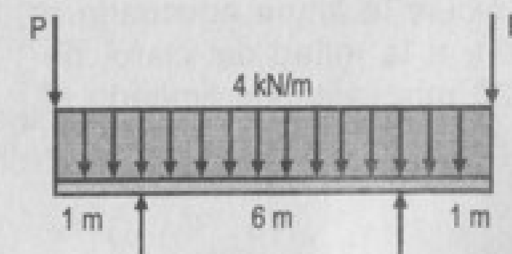
Aplicando el caso (11) de la tabla 6-2:

$$EI\delta = \frac{ML^2}{16} = \frac{(800)(4)^2}{16} \Rightarrow \boxed{EI\delta = 800\ N.m^3}$$

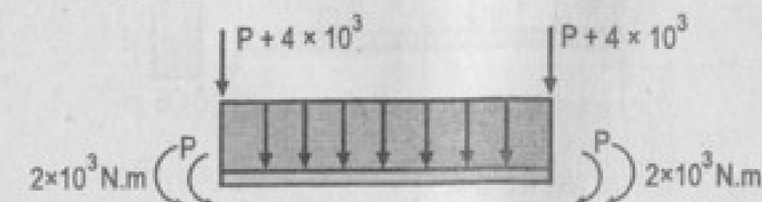
689. La viga de la figura tiene una sección rectangular de 100 mm de ancho por 200 mm de altura. Calcular el valor de P para que la deflexión en el centro valga 40 mm. $E = 10 \times 10^9\ N/m^2$.



Resolución:



Reemplazando la viga por una equivalencia:



Analizando la deflexión en el centro debido a varias cargas:

a) Debido a la carga repartida (caso 8):

$$EI\delta_1 = \frac{5wL^4}{384} = \frac{(5)(4\times10^3)(6)^4}{384} = 67,5 \times 10^3 \text{ N.m}^3$$

b) Debido al momento en el extremo (caso 12):

$$EI\delta_2 = \frac{ML^2}{16} = \frac{(P+2\times10^3)(6)^2}{16} = 2,25(P + 2 \times 10^3) \text{ N.m}^3$$

Como también existe momento en el otro extremo, consideramos dos veces $EI\delta_2$: $EI\delta = EI\delta_1 - 2EI\delta_2$

El signo negativo se debe a que los momentos en los extremos producen deflexiones en el centro que se oponen al producido por la carga repartida:

$EI\delta = 67,5 \times 10^3 - (2)(2,25)(P + 2 \times 10^3)$ ...(1)

Pero: $I = \frac{b\times h^3}{12} = \frac{(0,1)(0,2)^3}{12} = 6,67\times10^{-5}\text{m}^4$

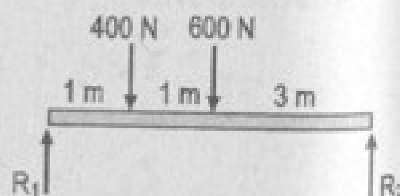
Reemplazando datos en (1):

$(10 \times 10^9)(6,667 \times 10^{-5})(0,04) = 67,5 \times 10^3 - 4,5(P + 2 \times 10^3)$

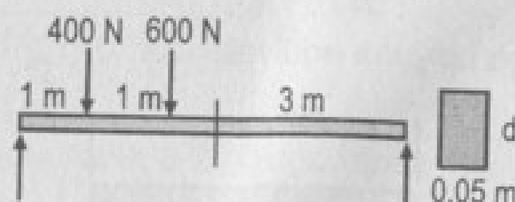
Operando tenemos:

$P = 7073,778$ N $\Rightarrow$ $\boxed{P = 7,07 \text{ kN}}$

690. La viga de la figura tiene una sección rectangular de 50 mm de ancho. Calcule la altura adecuada *d* de la viga si la deflexión, a la mitad del claro, no puede ser mayor que 20 mm, estando limitado el esfuerzo por flexión a un valor de 10 MN/m². Supóngase que E = 10 GN/m².



Resolución:



Aplicando el caso 7 de la tabla 6-2:

$$EI\delta_1 = \frac{(600)(2)}{(48)}[3(5)^2 - 4(3)^2]$$

$$EI\delta_1 = 975 \text{ N.m}^3 \; ; \; EI\delta_2 = \frac{(400)(4)}{(48)}[3(5)^2 - 4(4)^2] \Rightarrow EI\delta_2 = 366,67 \text{ N.m}^3$$

$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2 \quad \therefore \quad EI\delta = 1341,67 \text{ N.m}^3$

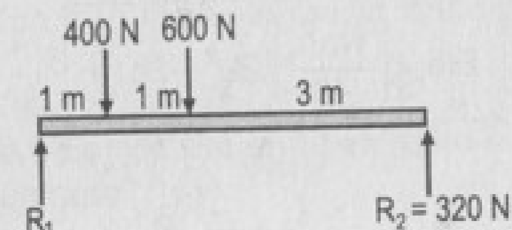
Reemplazando los datos en la expresión anterior:

$(10 \times 10^9)(I)(0,02) = 1341,67 \Rightarrow I = 6,708 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Como $I = \frac{bh^3}{12}$, entonces: $\frac{0,05d^3}{12} = 6,708 \times 10^{-6}$

De donde d = 0,1172 m = 117,2 mm

Análisis por esfuerzos:



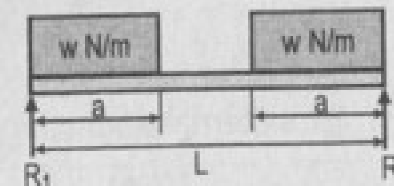
De la viga se tiene $M_{máx} = 960$ N.m

Además: $\sigma = \frac{M}{S}$; $S = \frac{bd^2}{6}$

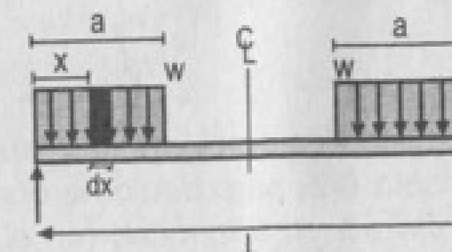
Reemplazando: $10 \times 10^6 = \dfrac{(960)}{\dfrac{(0,05)d^2}{6}} \Rightarrow d = 107,33$ mm

Elegimos: $\boxed{d = 117,2 \text{ mm}}$

691. Determinar la deflexión en el centro del claro en la viga de la figura. *Indicación:* aplicar el caso 7 e integrar.



Resolución:



Aplicamos el caso 7 de la tabla 6-2 para la carga de la izquierda:

$$EI\delta_1 = \Sigma \frac{Pb}{48}(3L^2 - 4b^2)$$

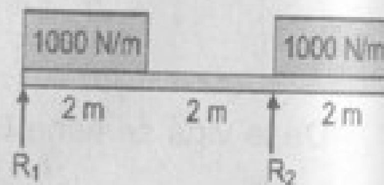
$$= \int_0^a \frac{(wdx)(x)}{48}\left[3L^2 - 4x^2\right] = \int_0^a \left[\frac{3wL^2x}{48} - \frac{4wx^3}{48}\right]dx$$

$$= \frac{3wL^2}{(2)(48)}(x^2)\Big|_0^a - \frac{4w}{(4)(48)}(x^4)\Big|_0^a \Rightarrow EI\delta_1 = \frac{3wL^2a^2}{(2)(48)} - \frac{wa^4}{(48)}$$

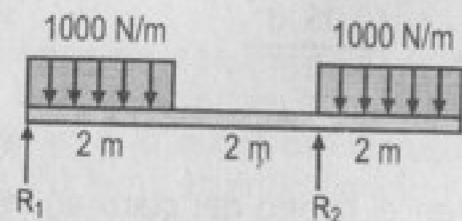
Debido a que existe simetría, la deflexión en el centro se duplica:

$$EI\delta = 2EI\delta_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{EI\delta = \left(\frac{wa^2}{48}\right)(3L^2 - 2a^2)}$$

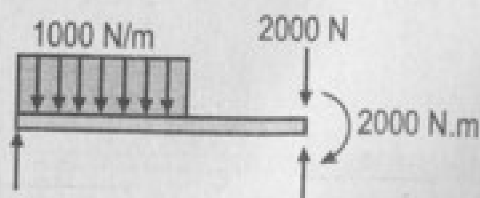
692. Calcular EIδ en el punto medio entre apoyos, en la viga con voladizo de la figura. *Indicación:* combinar el caso 11 y parte del caso 8.



Resolución:



El sistema equivalente es:



Considerando el caso 8: si la viga estuviera cargada en su totalidad, la deflexión sería la indicada en la tabla 6-2, pero debido a que solo está cargada la mitad de la viga, la deflexión se reduce a la mitad (en el centro de luz).

$$EI\delta_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5wL^4}{384}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(5)(1000)(4)^4}{384} \Rightarrow EI\delta_1 = 1666{,}67 \text{ N.m}^3$$

Considerando el caso 11 para la deflexión debido al momento:

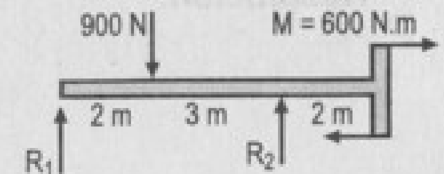
$$EI\delta_2 = \frac{ML^2}{16} = \frac{(2000)(4)^2}{16} \Rightarrow EI\delta_2 = 2000 \text{ N.m}^3$$

Entonces, la deflexión en el centro de luz es:

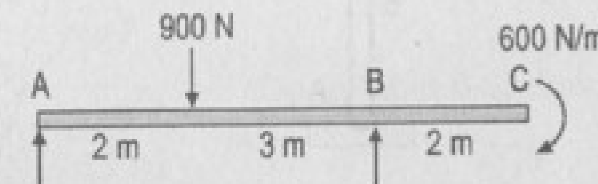
$$EI\delta = 1666{,}67 - 2000 = -333{,}33 \text{ N.m}^3 \;\therefore\; \boxed{EI\delta = -333{,}33 \text{ N.m}^3}$$

El signo negativo indica que el punto medio entre apoyos se ha desplazado hacia arriba.

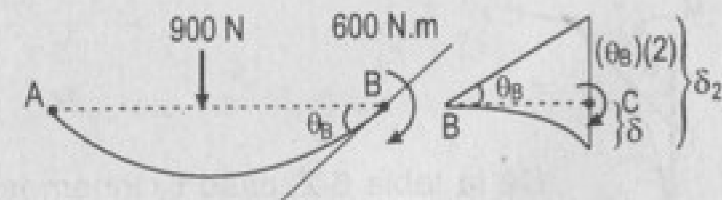
693. En la figura calcular el valor de EIδ en el extremo derecho de la viga mostrada.



Resolución:



Dibujando la viga por partes:



$$\theta_1 = \left.\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}\right\} \text{Ángulo debido a la carga puntual de 900 N} \Rightarrow \theta_1 = \frac{(900)(2)(5^2 - 2^2)}{(6)(5)EI} = \frac{1260}{EI}$$

$$\theta_2 = \left.\frac{ML}{3EI}\right\} \text{Ángulo debido al momento} \Rightarrow \theta_2 \frac{(600)(5)}{(3)EI} = \frac{1000}{EI}$$

Por tanto: $\theta_B = \frac{1260}{EI} - \frac{1000}{EI} = \frac{260}{EI}$

En el tramo BC:

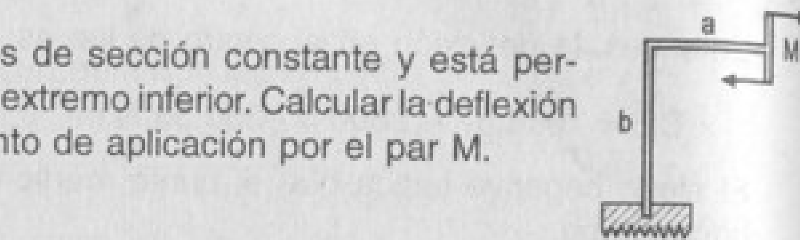
$$\delta = \delta_2 - (\theta_B)(2) \qquad ...(1)$$

$$\delta_2 = \frac{ML^2}{2EI}\Bigg\}\begin{matrix}\text{deflexión debido al}\\ \text{momento en el volado}\end{matrix} \Rightarrow \delta_2 = \frac{(600)(2)^2}{2EI} = \frac{1200}{EI}$$

Reemplazando en (1): $\delta = \delta_2 - (\theta_B)(2) = \frac{1200}{EI} - \left(\frac{260}{EI}\right)(2)$

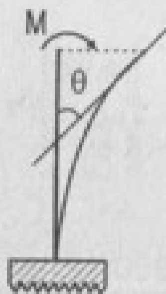
De lo cual: $\boxed{EI\delta = 680\ N.m^3}$ descendente

694. La estructura de la figura es de sección constante y está perfectamente empotrada en su extremo inferior. Calcular la deflexión vertical producida en su punto de aplicación por el par M.



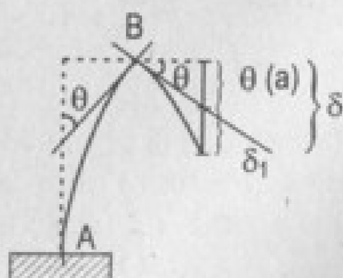
Resolución:

Trabajando en el tramo AB:



De la tabla 6-2, caso 5, tenemos: $\theta = \frac{Mb}{EI}$

Debido a que existe continuidad en el nodo B:



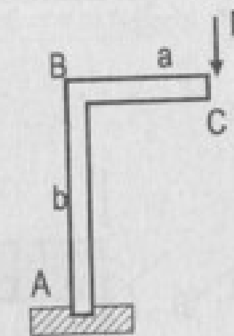
De la tabla 6-2, caso 5: $\delta_2 = \frac{Ma^2}{2EI}$

Entonces:

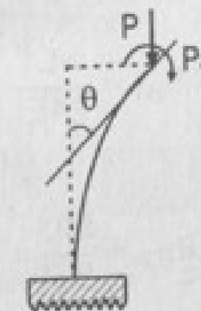
$$\delta = (\theta)(a) + \delta_2 \Rightarrow \delta = \left(\frac{Mb}{EI}\right)(a) + \frac{Ma^2}{2EI} \quad \therefore \quad \boxed{\delta = \frac{Ma}{EI}\left(b + \frac{a}{2}\right)}$$

695. Resolver el problema anterior si se sustituye el par por una fuerza P vertical y hacia abajo.

Resolución:

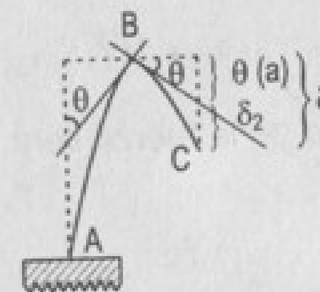


Trabajando en el tramo AB:



De la tabla 6-2, caso 5: $\theta = \frac{(Pa)(b)}{EI}$

Debido a que debe existir una continuidad en el nodo B:



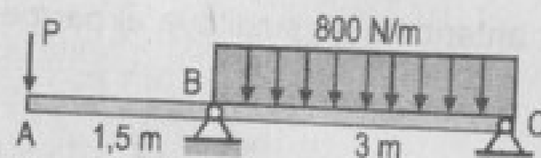
De la tabla 6-2, caso 1: $\delta_1 = \frac{Pa^3}{3EI}$

Entonces:

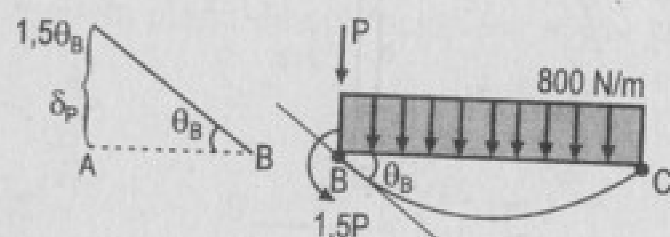
$$\delta = (\theta)(a) + \delta_1 \Rightarrow \delta = \frac{(Pa)(b)(a)}{EI} + \frac{Pa^3}{3EI} \quad \therefore \quad \boxed{\delta = \frac{Pa^2}{EI}\left(b + \frac{a}{3}\right)}$$

696. En la figura, calcular el valor de P para el cual la deflexión debajo de esta fuerza sea nula.

Resolución:



Analizando la viga por partes:



En el tramo BC: considerando la carga repartida: $\theta_{B1} = \dfrac{wL^3}{24EI} = \dfrac{(800)(3)^3}{24EI} = \dfrac{900}{EI}$

En el mismo tramo: considerando el momento: $\theta_{B2} = \dfrac{ML}{3EI} = \dfrac{(1,5P)(3)}{3EI} = \dfrac{1,5P}{EI}$

Entonces: $\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} = \dfrac{900 - 1,5P}{EI}$ ...(1)

En el tramo AB: $\delta_p = \dfrac{(P)(1,5)^3}{3EI}$ ...(2)

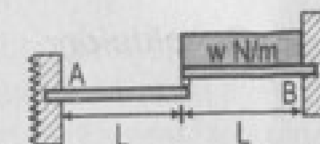
Por condición del problema, la deflexión debajo de la fuerza será nula:

De (1) y (2):

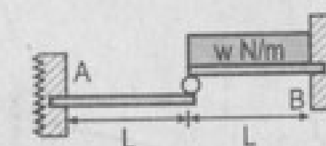
$$(\theta)(1,5) = \delta_p \Rightarrow \frac{(900 - 1,5P)}{EI}(1,5) = \frac{(P)(1,5)^3}{3EI}$$

De donde: $\boxed{P = 400\ N}$

697. Dos vigas idénticas, conectadas en sus extremos, soportan una carga repartida sobre una de ellas, como se indica en la figura. Determinar los momentos en el empotramiento.



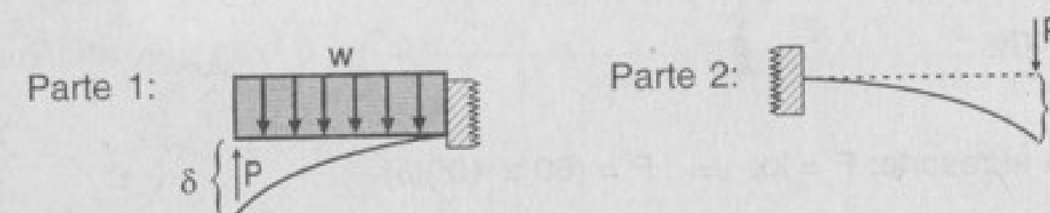
Resolución:



Deformada:



Debido a la geometría del problema, ambos extremos de los volados se desplazan la misma distancia (δ). Pero al llevar a cabo el análisis dividimos el sistema en 2 partes:

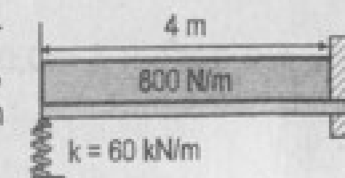


En la parte 2 : usando el caso 1 de la tabla 6-2: $\delta = \dfrac{PL^3}{3EI}$ ...(1)

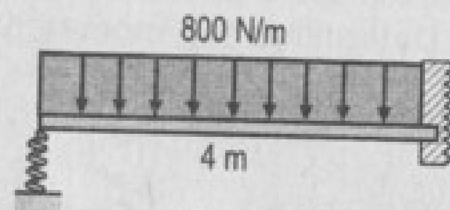
En la parte (1): usando los casos 3 ó 1 de la tabla 6 - 2: $\delta = \dfrac{wL^4}{8EI} - \dfrac{PL^3}{3EI}$ ...(2)

Como (1) = (2), entonces: $\dfrac{PL^3}{3EI} = \dfrac{wL^4}{8EI} - \dfrac{PL^3}{3EI} \Rightarrow \boxed{P = \dfrac{3wL}{16}}$

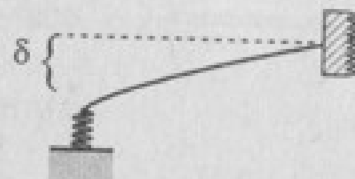
698. La viga de la figura está apoyada en su extremo izquierdo en un resorte de constante k = 60 kN/m. En la viga, $E = 10 \times 10^9\ N/m^2$ e $I = 60 \times 10^6\ mm^4$. Calcular la deflexión en el extremo.



Resolución:

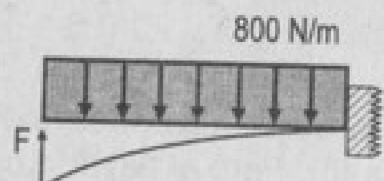


Deformada:

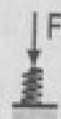


Dividiendo el sistema:

Viga:



Resorte:



Para el resorte: $F = kx \Rightarrow F = (60 \times 10^3)(\delta)$

Para la viga: de la tabla 6-2:

$$\delta = \frac{wL^4}{8EI} - \frac{FL^3}{3EI} \Rightarrow \delta = \frac{(800)(4)^4}{8EI} - \frac{(60\times10^3)(\delta)(4)^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{25\,600}{EI} - \frac{1\,280\,000\delta}{EI} \Rightarrow EI\delta = 25\,600 - 1\,280\,000\delta$$

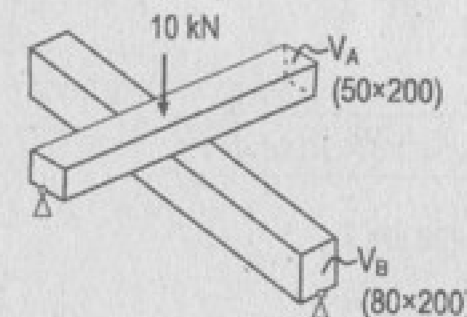
Reemplazando datos:

$$(10 \times 10^9)(60 \times 10^{-6})(\delta) = 25\,600 - 1\,280\,000\delta$$

De donde: $\delta = 0{,}013617$ m $\therefore$ $\boxed{\delta = 13{,}62 \text{ mm}}$

699. Dos vigas de madera están colocadas en ángulo recto y en contacto en su punto medio. La viga superior A tiene una sección de 50 mm de ancho por 200 mm de alto y un claro de 3 m. Está simplemente apoyada en sus extremos. La viga inferior B tiene una sección de 80 mm de ancho por 200 mm de altura y está simplemente apoyada sobre un claro de 4 m. En el cruce, el conjunto soporta una carga de 10 kN. Determinar el esfuerzo normal máximo en cada viga.

Resolución:



De los datos: $I_A = \frac{(0{,}05)(0{,}2)^3}{12} = 3{,}33\times10^{-5}\ m^4$; $I_B = \frac{(0{,}08)(0{,}2)^3}{12} = 5{,}33 \times 10^{-5}\ m^4$

Analizando la viga A (V_A): 10 kN, F $\quad \delta = \frac{PL_A^3}{48EI_A} - \frac{FL_A^3}{48EF_A}$ ...(1)

Analizando la viga B(V_B): F $\quad \delta = \frac{FL_B^3}{48EI_B}$ ...(2)

Como (1) y (2) deben ser iguales: $\frac{PL_A^3}{48\,EI_A} - \frac{FL_A^3}{48\,EI_A} = \frac{FL_B^3}{48\,EI_B}$

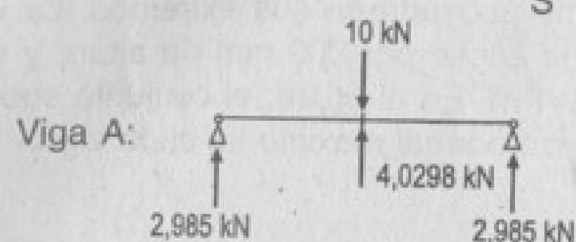
De donde: $F = \frac{PL_A^3\ I_B}{\left[I_BL_A^3 + I_AL_B^3\right]}$

Reemplazando valores tenemos:

$$F = \frac{(10\times10^3)(3)^3(5{,}33\times10^{-5})}{\left[(5{,}33\times10^{-5})(3)^3 + (3{,}33\times10^{-5})(4)^3\right]} \Rightarrow F = 4029{,}85 \text{ N}$$

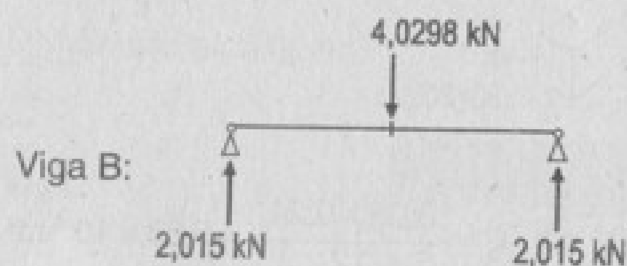
$\therefore$ $\boxed{F = 4{,}0298 \text{ kN}}$

Calculando los esfuerzos: $\sigma = \frac{M}{S}$; $S = \frac{bh^2}{6}$



$M_{máx} = 4,48$ kN.m

$S = 0,000333$ m³ $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_A = 13\,490 \text{ kN/m}^2}$



$M_{máx} = 4,03$ kN.m

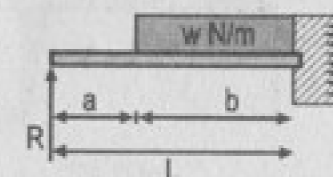
$S = 0,000533$ m³ $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_B = 7556,25 \text{ kN/m}^2}$

CAPÍTULO 7

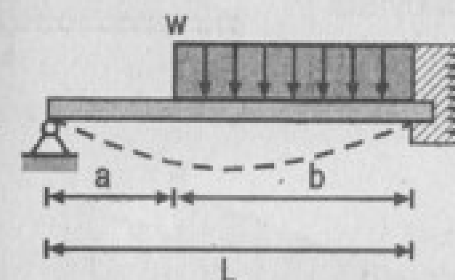
VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

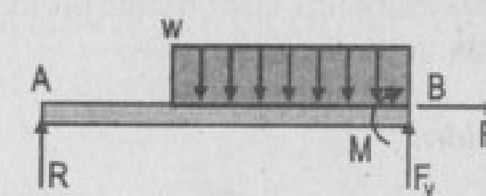
701 y 702: problemas ilustrativos.

703. En la viga apoyada y empotrada de la figura, calcular R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



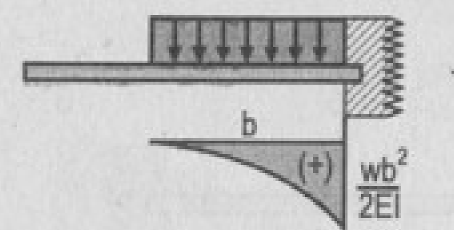
Resolución:



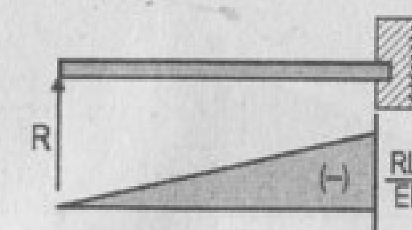


$$\sum M_B = 0$$

$$RL = \frac{wb^2}{2} - M \Rightarrow R = \frac{wb^2}{2L} - \frac{M}{L}$$



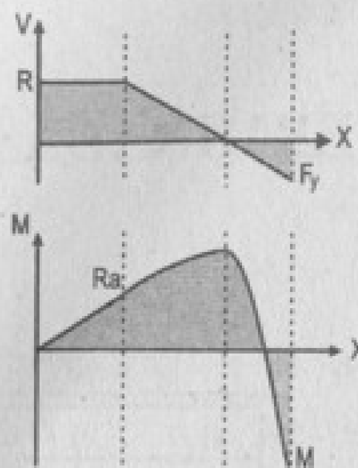
+



$$t_{AB} = 0 = -\frac{1}{3}\left(b \times \frac{wb^2}{2}\right)\left(a + \frac{3}{4}b\right) + \frac{1}{2}(L)(RL)\left(\frac{2}{3}L\right) \Rightarrow \frac{1}{6}wb^3\left(\frac{4a+3b}{4}\right) = \frac{1}{3}RL^3$$

$$\frac{1}{8}wb^3(4L-b) = RL^3 \Rightarrow \boxed{R = \frac{wb^3}{8L^3}(4L-b)}$$

Diagramas:



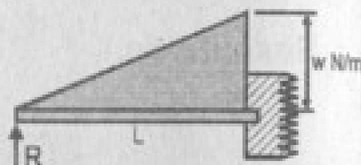
$\Sigma F_y = 0:$

$F_y = wb - R$

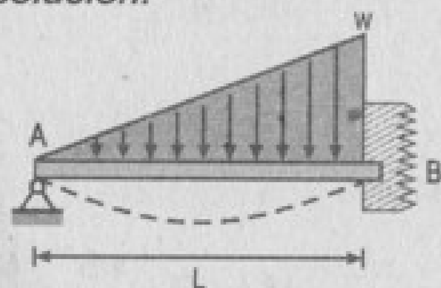
$F_y = wb - \frac{wb^3}{8L^3}(4L-b) \Rightarrow F_y = \frac{wb}{8L^3}[8L^3 - b^2(4L-b)]$

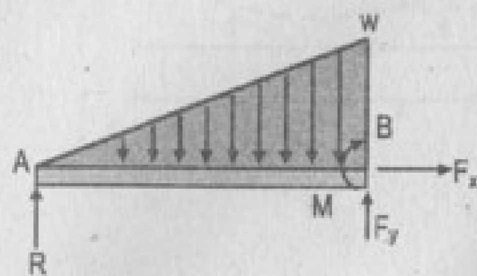
$M = \frac{wb^2}{2} - RL \Rightarrow M = -\frac{wb^2}{8L^2}(2L-b)^2$

704. Calcular el valor de R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga apoyada y empotrada de la figura.



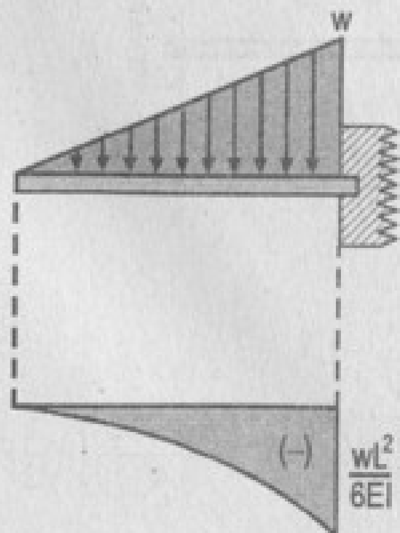
Resolución:



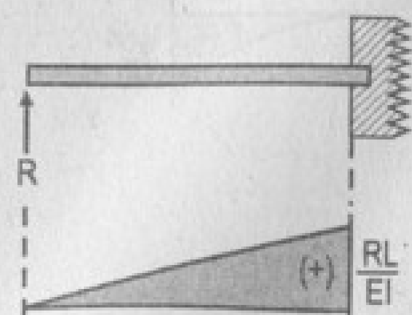


$\Sigma M_B = 0$

$RL = \frac{wL^2}{6} - M \Rightarrow M = \frac{wL^2}{6} - RL$

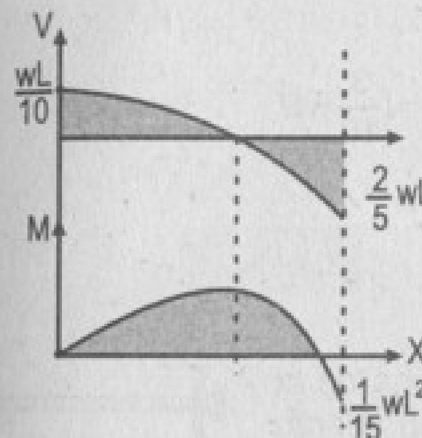


+



$t_{AB} = 0 = -\frac{1}{4}\left(L \times \frac{wL^2}{6}\right)\left(\frac{4}{5}L\right) + \frac{1}{2}(RL \times L)\left(\frac{2}{3}L\right) \Rightarrow \boxed{R = \frac{wL}{10}}$

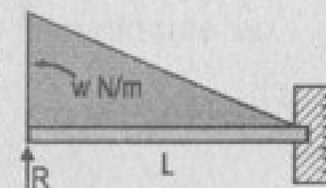
Diagramas:



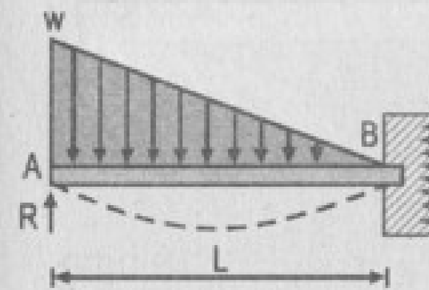
$\Sigma F_y = 0:$

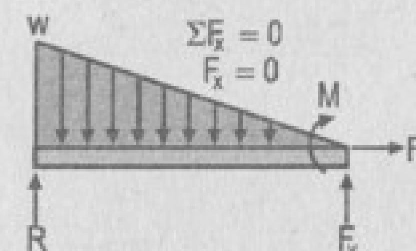
$F_y = \frac{wL}{2} - R = \frac{4wL}{10} = \frac{2wL}{5}$

705. En la viga de la figura, determinar la reacción R en el apoyo redundante y trazar los diagramas de cortante y de momento.



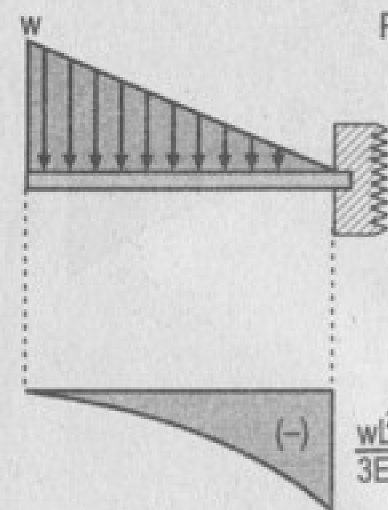
Resolución:



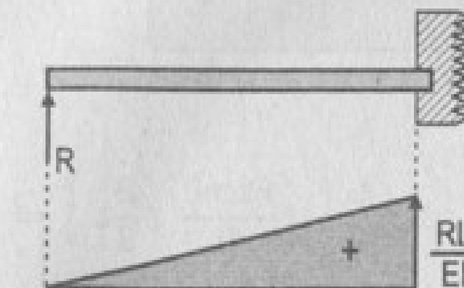


$\Sigma M_B = 0:$

$RL = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) - M \Rightarrow M = \frac{wL^2}{3} - RL = \frac{2}{15}wL^2$

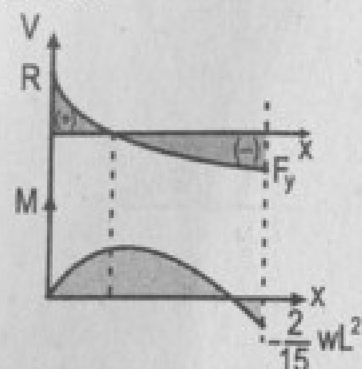


+



$t_{AB} = 0 = -\frac{1}{4}L\left(\frac{wL^2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}L\right) + \frac{1}{2}L \times RL\left(\frac{2}{3}L\right) \Rightarrow \boxed{R = \frac{wL}{5}}$

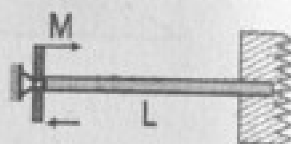
Diagramas:



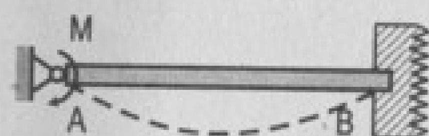
$\Sigma F_y = 0$:

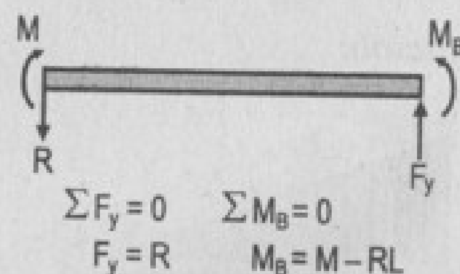
$$F_y = \frac{wL}{2} - \frac{wL}{5} = \frac{3}{10}wL$$

706. Se aplica un par M al extremo articulado de la viga de la figura. Calcular la reacción en este extremo y el momento de empotramiento.



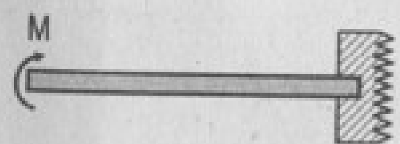
Resolución:

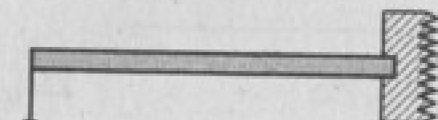




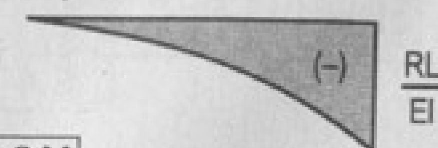
$\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_B = 0$

$F_y = R \quad M_B = M - RL$





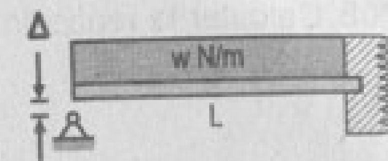




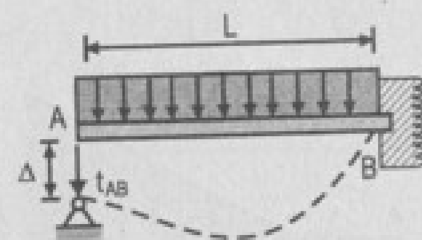
$$t_{AB} = 0 = ML\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{RL \times L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) \Rightarrow \boxed{R = \frac{3M}{2L}}$$

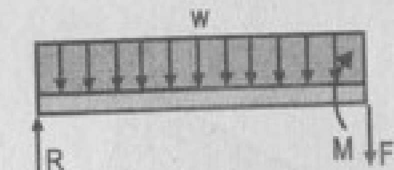
$$M_B = M - \frac{3}{2}M = -\frac{1}{2}M$$

707. Determinar la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga estáticamente indeterminada de la figura.



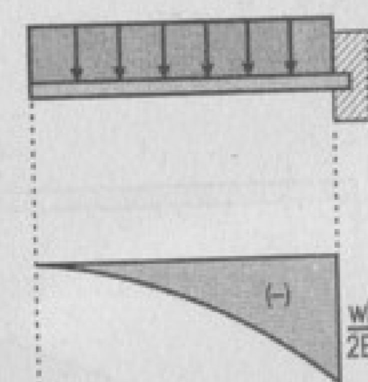
Resolución:

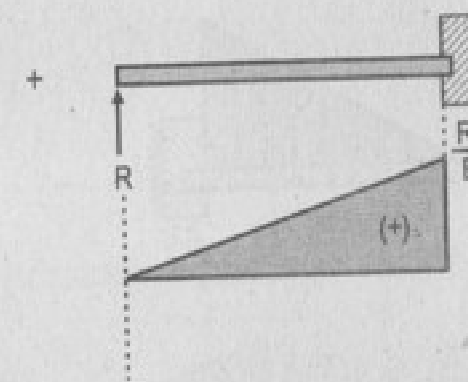




$\Sigma F_y = 0: \quad \Sigma M_B = 0:$

$F_y = wL - R \quad M = \frac{wL^2}{2} - RL$

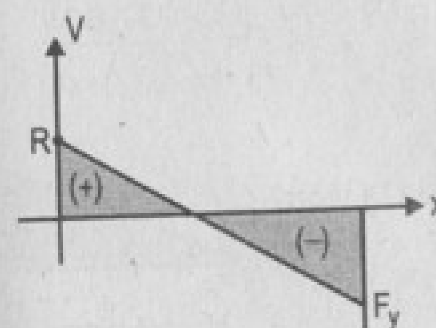


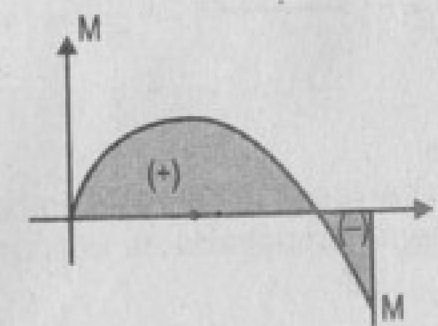


$$EIt_{AB} = -\Delta EI = -\frac{1}{3}\left(L \times \frac{wL^2}{2}\right)\left(\frac{3}{4}L\right) + \left(\frac{RL \times L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right)$$

$$\frac{RL^3}{3} = \frac{wL^4}{8} - EI\Delta \Rightarrow \boxed{R = \frac{3}{8}wL - \frac{3EI}{L^3}\Delta}$$

Diagramas:

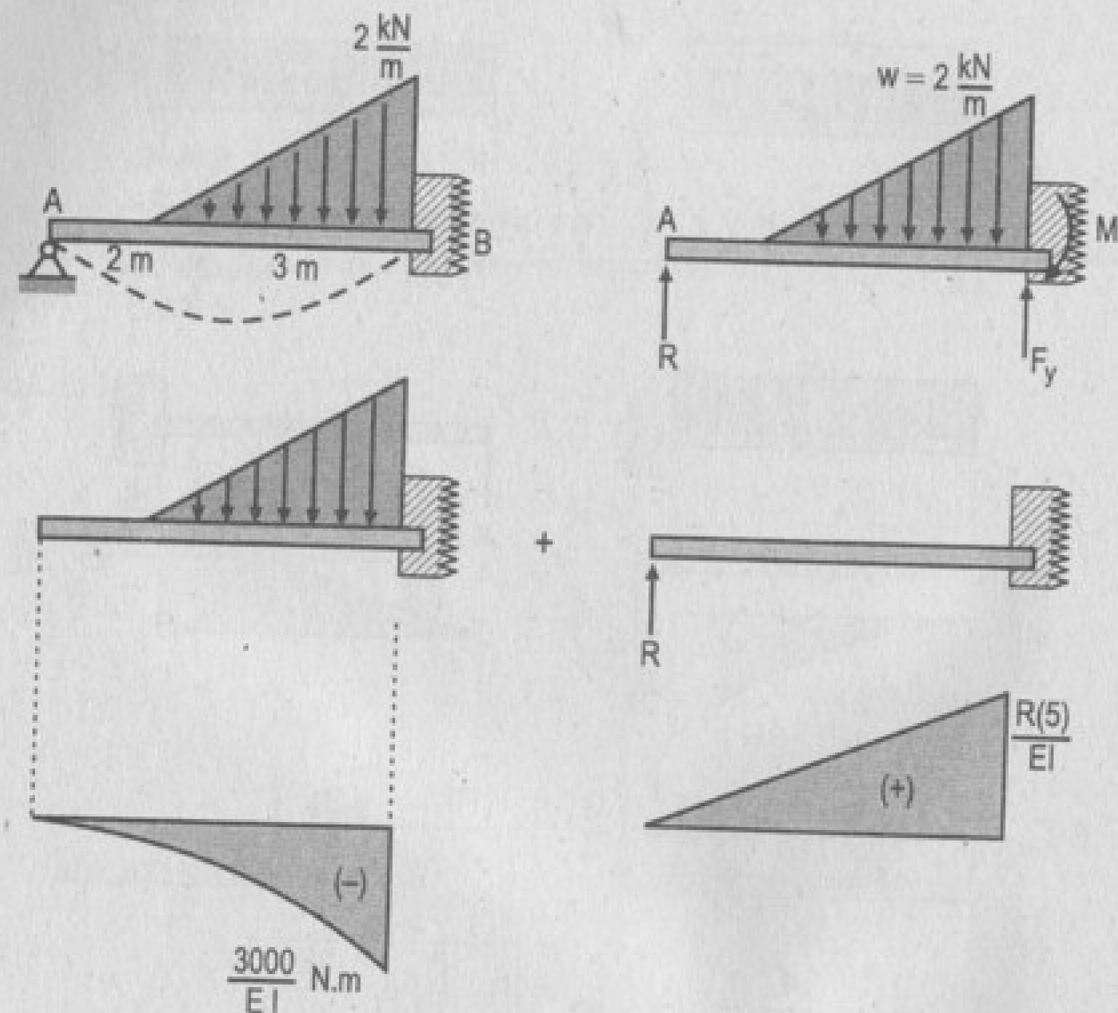




$$F_y = \frac{5}{8}wL + \frac{3EI}{L^3}\Delta \qquad M = \frac{1}{8}wL^2 + \frac{3EI}{L^2}\Delta$$

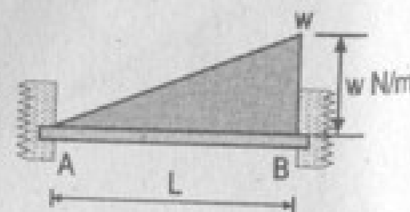
708. Calcular la reacción R en la viga de la figura.

Resolución:

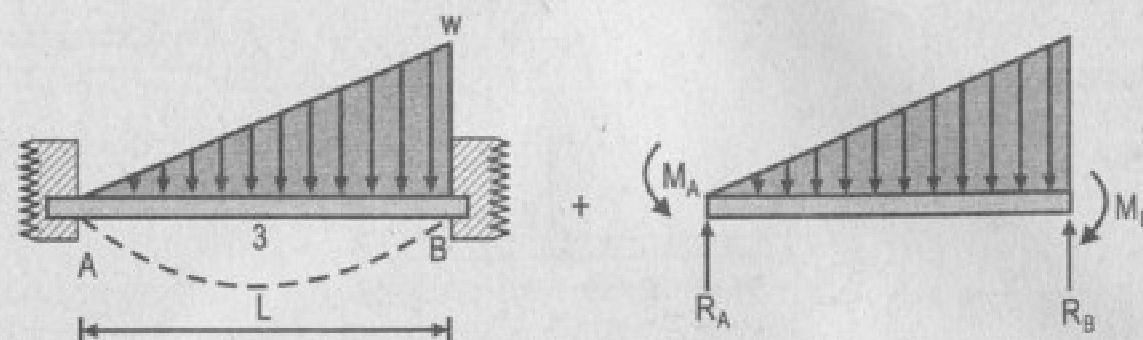


$$t_{AB} = 0 = -\left(\frac{3000\times3}{4}\right)\left(2+\frac{4}{5}(3)\right)+\frac{R(5)\times5}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times5\right) \Rightarrow \boxed{R = 237{,}6\ N}$$

709. Determinar los momentos de empotramiento en la viga doblemente empotrada de la figura.



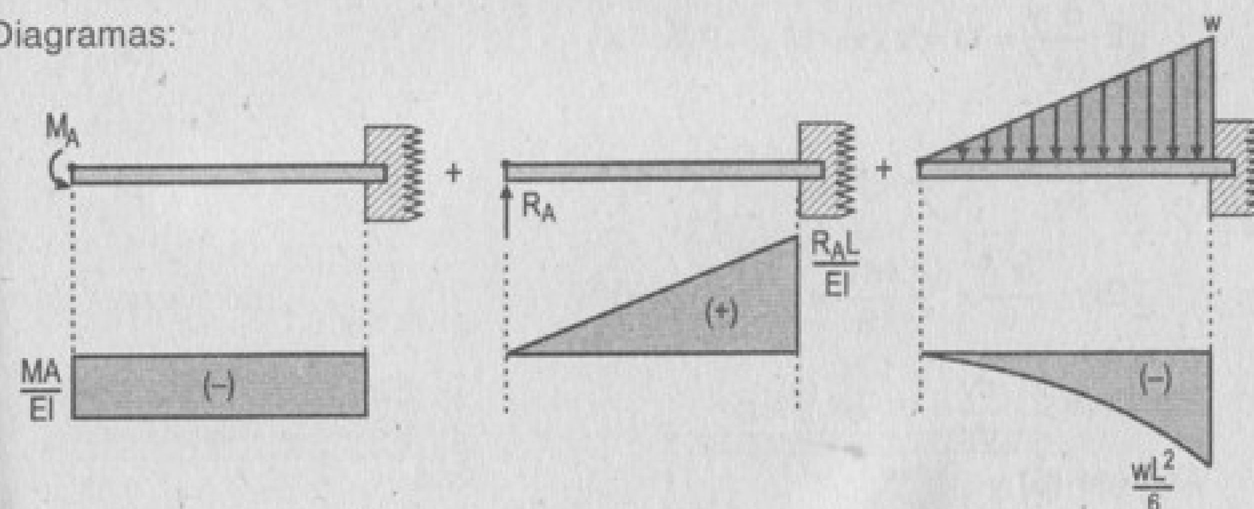
Resolución:



$$\Sigma F_y = 0:\ R_B = R_A - \frac{wL}{2} \qquad ...(1)$$

$$\Sigma M_B = 0:\ M_B = M_A + \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - R_A L \qquad ...(2)$$

Diagramas:



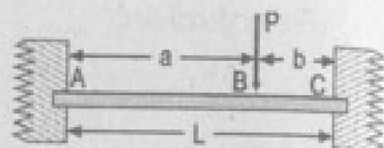
$$\theta_B - \theta_A = 0 = -M_A \times L + \frac{1}{2}(R_A L)\times L - \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{6}\right)(L) \Rightarrow M_A = \frac{R_A L}{2} - \frac{wL^2}{24}$$

$$t_{AB} = 0 = -(M_A L)\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}(R_A L \times L)\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{6}\right)(L)\left(\frac{4}{5}L\right)$$

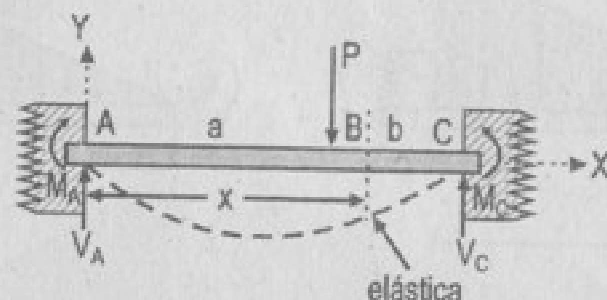
$$M_A = \frac{2}{3}R_A L - \frac{1}{15}wL^2 \Rightarrow R_A = \frac{3}{20}wL \qquad \therefore \quad \boxed{M_A = \frac{1}{30}wL^2}$$

En (2): $\boxed{M_B = \frac{wL^2}{20}}$

710. Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura.



Resolución:



(a+b = L) donde el momento flector para una variable "x" es:

$$M = V_A x + M_A - P\langle x-a\rangle \qquad ...(1)$$

Por el método de la doble integración:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = V_A x + M_A - P\langle x-a\rangle \qquad ...(\alpha)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = V_A\frac{x^2}{2} + M_A x - \frac{P}{2}\langle x-a\rangle^2 \qquad ...(\beta)$$

$$EIy = \frac{V_A}{6}x^3 + \frac{M_A}{2}x^2 - \frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3 \qquad ...(\gamma)$$

Para x = L; $\frac{dy}{dx} = 0$ e $y = 0$

Así: (de (β) y (γ))

$$\begin{cases} V_A\frac{L^2}{2} + M_A L - \frac{P}{2}(L-a)^2 = 0 \\ \frac{V_A}{6}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 - \frac{P}{6}(L-a)^3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\boxed{M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}} \wedge V_A = \frac{Pb^2(3a+b)}{L^3}$$

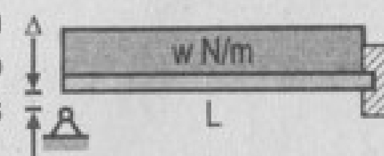
Tomando momentos en C:

$$M_A + V_A L - Pb = M_c \qquad ...(2)$$

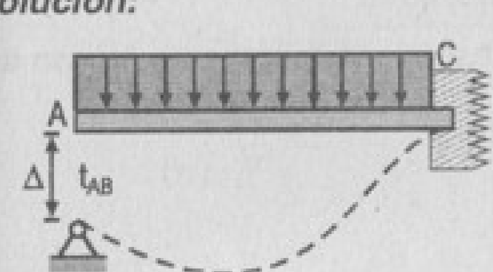
Resolviendo: $-\frac{Pab^2}{L^2} + \frac{Pb^2}{L^2}(3a+b) - Pb = M_c$

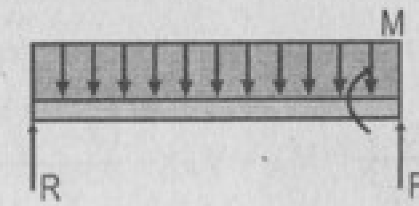
Simplificando: $\boxed{M_c = -\frac{Pa^2b}{L^2}}$

711. En la viga mostrada en la figura hay inicialmente un espacio libre D entre el extremo izquierdo y el rodillo indicado. Calcular la reacción en este apoyo después de aplicar la carga w uniformemente distribuida.



Resolución:

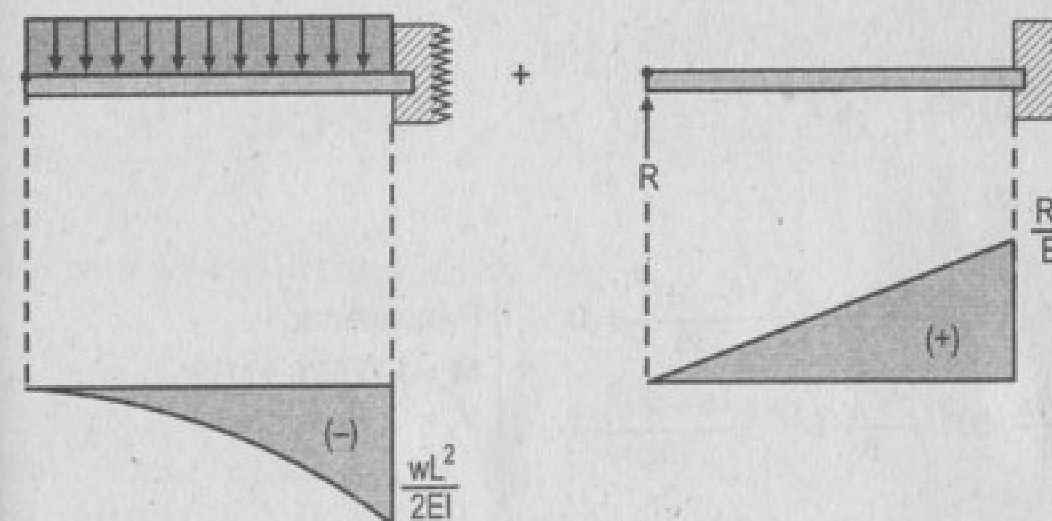




$\Sigma F_y = 0$: $F_y = wL - R$

$\Sigma M_B = 0$: $M = \frac{wL^2}{2} - RL$

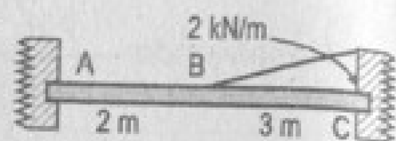
Por superposición:



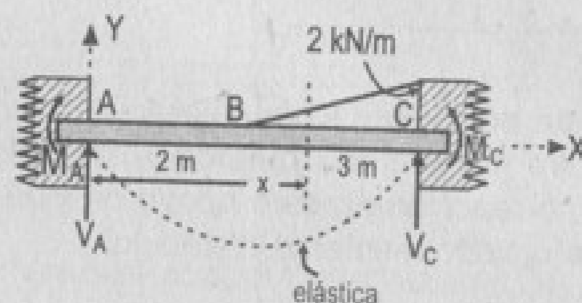
$$EIt_{AB} = \Delta EI = -\frac{1}{3}\left(L\times\frac{wL^2}{2}\right)\left(\frac{3}{4}L\right) + \left(\frac{RL\times L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right)$$

$$\frac{RL^3}{3} = \frac{wL^4}{8} - EI\Delta \qquad \therefore \boxed{R = \frac{3}{8}wL - \frac{3EI\Delta}{L^2}}$$

712. Calcular los momentos de empotramiento en la viga doblemente empotrada de la figura.



Resolución:



Por el método de la doble integración, respecto a la variable "x" tomada de A:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+V_Ax-\frac{\langle x-2\rangle^3}{9} \qquad ...(\alpha)$$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_Ax+\frac{V_A}{2}x^2-\frac{\langle x-2\rangle^4}{36}+(C_1=0) \qquad ...(\beta)$$

$$Ely=\frac{M_A}{2}x^2+\frac{V_A}{6}x^3-\frac{\langle x-2\rangle^5}{180}+(C_2=0) \qquad ...(\gamma)$$

Para x = 5; $\frac{dy}{dx}=0 \wedge y=0$

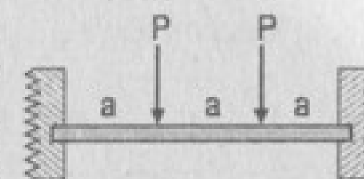
De (β) y (γ):

$$\begin{cases} M_A(5)+\frac{V_A}{2}(5)^2-\frac{(5-2)^4}{36}=0 \\ \frac{M_A}{2}(5)^2+\frac{V_A}{6}(5)^3-\frac{(5-2)^5}{180}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Resolviendo:} \\ M_A=-0{,}576\ \text{kN.m} \\ V_A=0{,}4104\ \text{kN} \end{cases}$$

Tomando momentos en C: $(\Sigma M_C=0)$

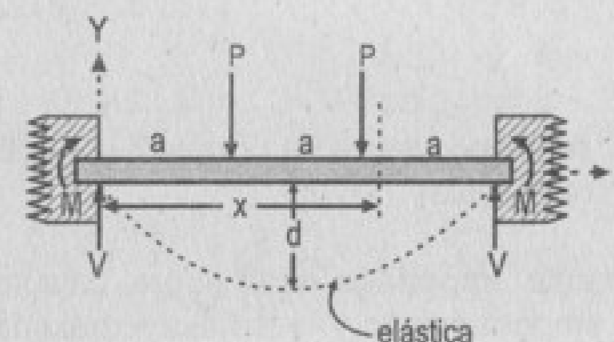
$$M_A+V_A(5)-\frac{1}{2}(2)(3)\left(\frac{1}{3}.3\right)=M_C \Rightarrow \boxed{M_C=-1{,}524\ \text{kN.m}}$$

713. Calcular los momentos de empotramiento y el valor de EIδ en el centro del claro para la viga doblemente empotrada de la figura. *Indicación:* por simetría, las reacciones en los extremos son iguales y la pendiente es nula en el centro. Tomar como hiperestático el momento en el centro.



Resolución:

Por la simetría del sistema:



Como $\Sigma F_y=0 \Rightarrow V+V=2P \Rightarrow V=P$

Por el método de la doble integración:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M+Vx-P\langle x-a\rangle-P\langle x-2a\rangle$$

$$EI\frac{dy}{dx}=Mx+\frac{V}{2}x^2-\frac{P}{2}\langle x-a\rangle^2-\frac{P}{2}\langle x-2a\rangle^2+C_1$$

$$Ely=\frac{M}{2}x^2+\frac{V}{6}x^3-\frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3-\frac{P}{6}\langle x-2a\rangle^3+C_1x+C_2$$

Como para x = 0: $\frac{dy}{dx}=0 \wedge y=0$. Así: $C_1=C_2=0$

Para x = 3a: $\frac{dy}{dx}=0 \wedge y=0$

Luego:

$$\begin{cases} 3Ma+\frac{9}{2}Va^2-2a^2P-\frac{a^2}{2}P=0 \\ \frac{9}{2}Ma^2+\frac{27}{6}Va^3-\frac{8}{6}a^3P-\frac{a^3}{6}P=0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$\boxed{M = -\frac{2}{3}aP}$; V = P (tal como lo teníamos inicialmente)

Para $x = \frac{3a}{2}$ (centro del claro):

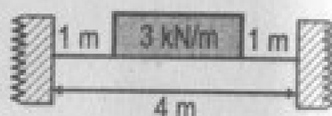
$$EI\delta = \left(-\frac{2}{3}aP\right)\left(\frac{3a}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \frac{P}{6}\left(\frac{3a}{2}\right)^3 - \frac{P}{6}\left(\frac{3a}{2} - a\right)^3$$

(no se toma el valor en $\langle x - 2a \rangle$)

Así:

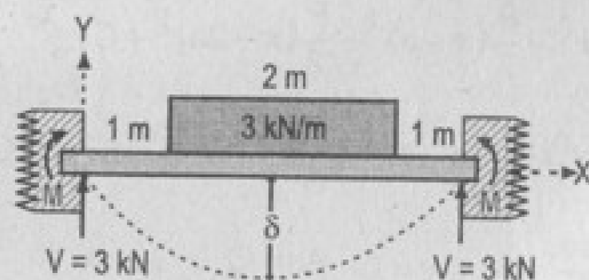
$\boxed{EI\delta = \frac{-5}{24}Pa^3}$ (el signo menos es porque δ está debajo de la horizontal de referencia)

714. En la viga doblemente empotrada de la figura, calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima. *Indicación:* emplear vigas en voladizo equivalentes con el empotramiento en el centro y voladas hacia los extremos.



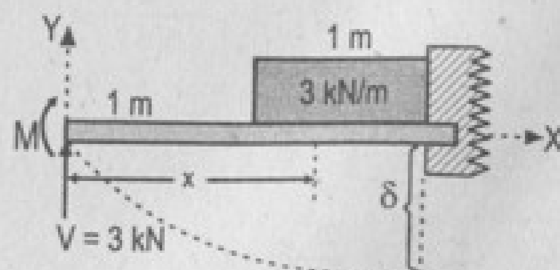
Resolución:

Tomando (por la simetría) un empotramiento en el centro y voladizo en la parte izquierda del sistema:



Por la simetría del sistema: V = 3 kN

Sistema equivalente:



Por el método de la doble integración:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M + 3x - \frac{3}{2}\langle x - 1 \rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = Mx + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2(3)}\langle x - 1 \rangle^3 + C_1 = 0 \qquad ...(\alpha)$$

$$EIy = \frac{M}{2}x^2 + \frac{3x^3}{2(3)} - \frac{3}{2(3)(4)}\langle x - 1 \rangle^4 + C_2 = 0 \qquad ...(\beta)$$

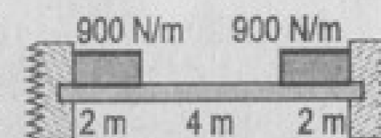
Para x = 0: $\frac{dy}{dx} = y = 0$. Así: $C_1 = C_2 = 0$; para x = 2: $\frac{dy}{dx} = 0$

En (α):

$$M(2) + \frac{3}{2}(2)^2 - \frac{3}{2(3)}(2-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{11}{4} \text{ kN.m} \quad \therefore \quad \boxed{M = -2750 \text{ N.m}}$$

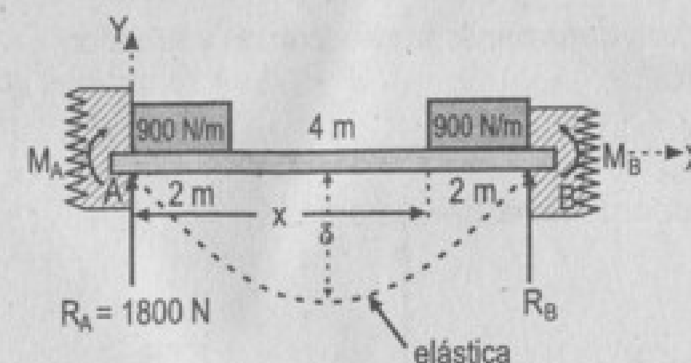
Para x = 2, y = δ, en (β): $EI\delta = \left(\frac{-11}{4}\right)\left(\frac{4}{2}\right) + \frac{2^3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{-13}{8}$ kN.m^3

715. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga doblemente empotrada de la figura. *Indicación:* considerar como magnitudes hiperestáticas la fuerza cortante y el momento flexionante en el centro. Obsérvese que la fuerza cortante que actúa en el centro es nula. ¿Por qué?



Resolución:

Como el sistema es simétrico: $M_A = M_B \wedge R_A = R_B = 1800$ N



La ecuación de la elástica es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_A + 1800x - 1800\langle x - 1 \rangle - \frac{900}{2}\langle x - 6 \rangle^2 \qquad ...(\alpha)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = M_A + 900x^2 - 900\langle x-1\rangle^2 - 150\langle x-6\rangle^3 + C_1 \qquad ...(\beta)$$

$$EIy = \frac{M_A}{2}x^2 + 300x^3 - 300\langle x-1\rangle^3 - \frac{75}{2}\langle x-6\rangle^4 + C_1x + C_2 \qquad ...(\gamma)$$

En (β): si $x = 4$; $\frac{dy}{dx} = 0$ (centro del claro); si $x = 8$; $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\begin{cases} 4M_A + 16(900) - 9(900) + C_1 = 0 \text{(no se toma término } \langle x-6\rangle) \\ 8M_A + 64(900) - 49(900) - 8(150) + C_1 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo: $\boxed{M_A = -1500 \text{ N.m} = M_B}$; $C_1 = -300$ N.m^2

En (γ): si $x = 8$; $y = 0$

$$\frac{-1500}{2}(64) + 300(8)^3 - 300(7)^3 - \frac{75}{2}(2)^4 - 300(8) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 300 \text{ N.m}^3$$

En (γ), si $x = 4$, $y = \delta$: (no se toma el término $\langle x-6\rangle$)

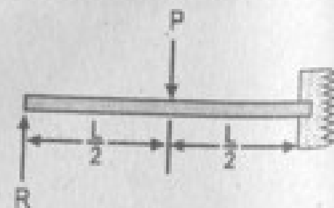
$$EI\delta = -\frac{1500}{2}(4)^2 + 300(4)^3 - 300(3)^3 - (300)(4) + 300$$

$\boxed{EI\delta = -1800 \text{ N.m}^3}$

Si tomamos momentos en el centro, el resultado es nulo.

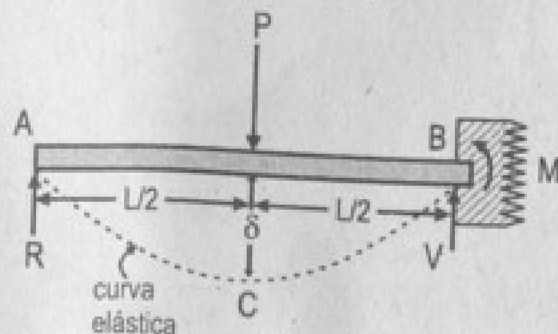
716, 717 y 718: problemas ilustrativos.
A menos que se diga lo contrario, se supone que los apoyos y empotramientos son deformables.

719. En la viga de la figura determinar la reacción R y el valor de $EI\delta$ en el centro.

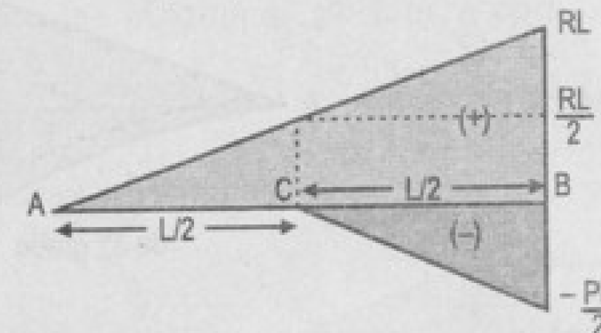


Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema:



El diagrama de momentos por partes:



Como la desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula, por el método del área de momentos:

$$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = 0$$

Así: $$\frac{(RL)(L)}{2}\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{1}{2}\left(P\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{5P}{16}}$$

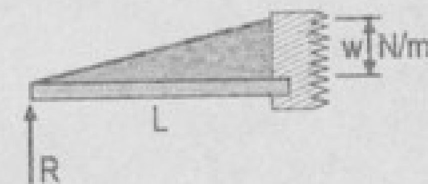
Siendo δ la desviación de la elástica en C (centro del claro) con respecto a la tangente en B, tenemos:

$$EIt_{C/B} = EI\delta = (\text{área})_{CB}.\bar{x}_C$$

$$EI\delta = \frac{1}{2}\left(R\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}.\frac{L}{2}\right) + R\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}.\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(P.\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}.\frac{L}{2}\right)$$

Simplificando: $\boxed{EI\delta = \frac{-7}{768}PL^3}$ El signo menos indica que la deflexión es hacia abajo.

720. Calcular la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga de la figura.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema:

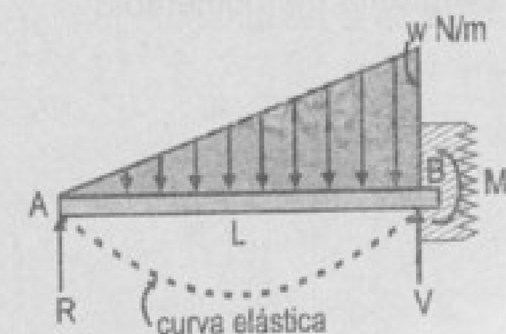
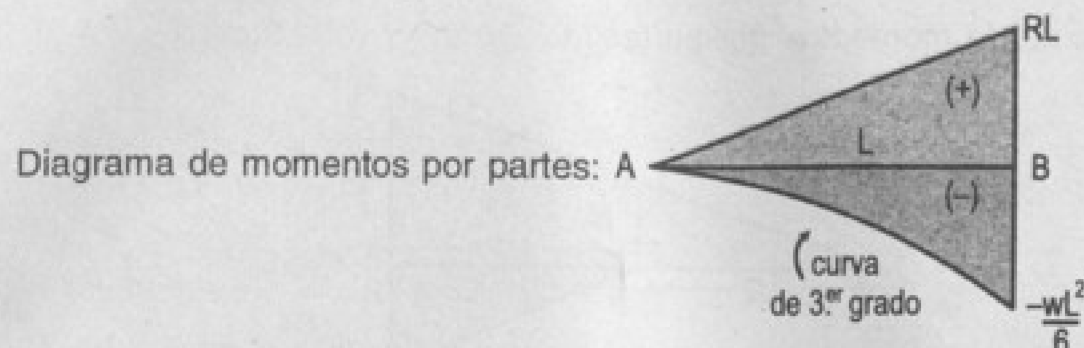


Diagrama de momentos por partes:



La desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula, por el método del área de momentos:

$$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = 0.$$

Así: $\frac{1}{2}(RL)(L)\left(\frac{2}{3}L\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{6}\right)(L)\left(\frac{4}{5}L\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R=\frac{wL}{10}}$

Por las ecuaciones de la estática:

$$\mathbf{\Sigma Fy = 0:}\ R+V-\frac{wL}{2}=0 \Rightarrow V=\frac{2}{5}wL$$

$$\mathbf{\Sigma M_B = 0:}\ RL-\left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right)-M=0$$

Simplificando: $\boxed{M=-\frac{wL^2}{15}}$

Diagrama de fuerzas cortantes:

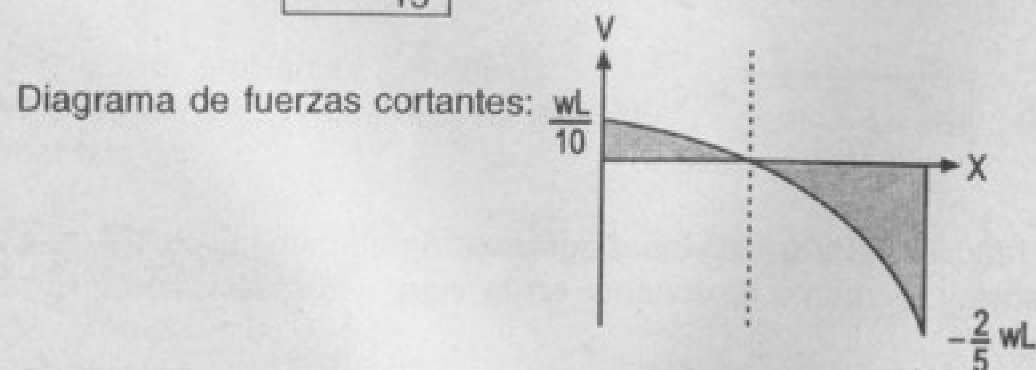
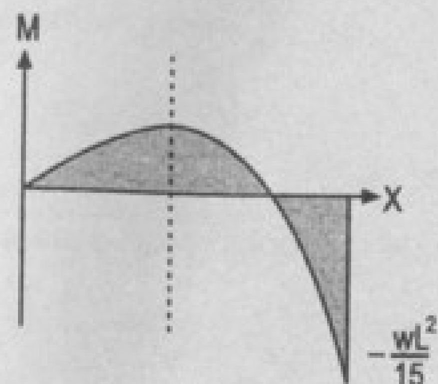
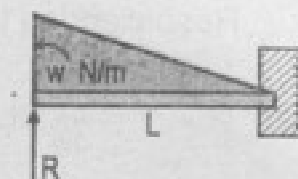


Diagrama de momentos:

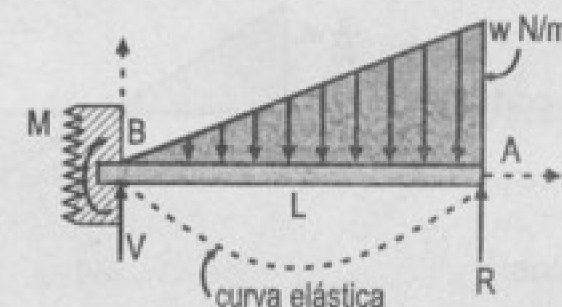


721. En la viga apoyada y empotrada de la figura determinar la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



Resolución:

Invirtiendo el diagrama de cuerpo libre:

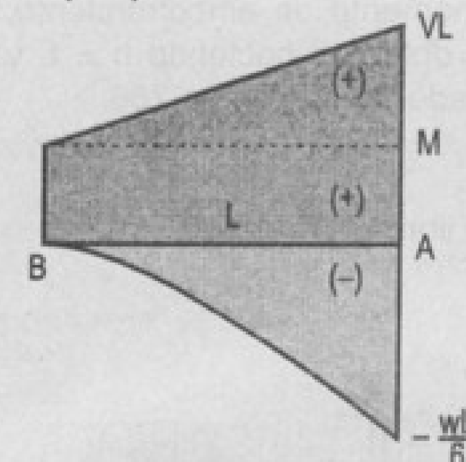


Por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma M_A = 0 = M + VL - \frac{wL^3}{6} \qquad ...(1)$$

$$\Sigma F_y = 0 = V + R - \frac{wL}{2} \qquad ...(2)$$

Diagrama de momentos por partes:



La desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula, por el método del área de momentos:

$$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = 0$$

Así: $\frac{(VL)(L)}{2}\left(\frac{L}{3}\right)+(ML)\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{6}.L\right)\left(\frac{L}{5}\right)=0 \qquad ...(3)$

Resolviendo (1), (2) y (3):

$$V = \frac{9}{40}wL \; ; \; M = \frac{-7}{120}wL^2 \; ; \; \boxed{R = \frac{11}{40}wL}$$

Diagrama de fuerzas cortantes:

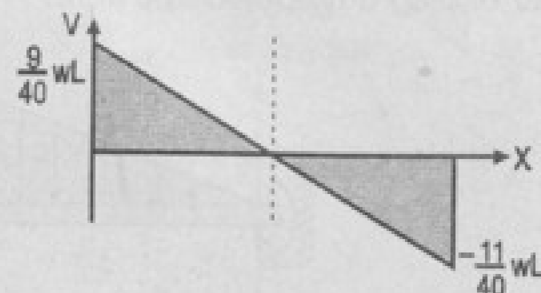
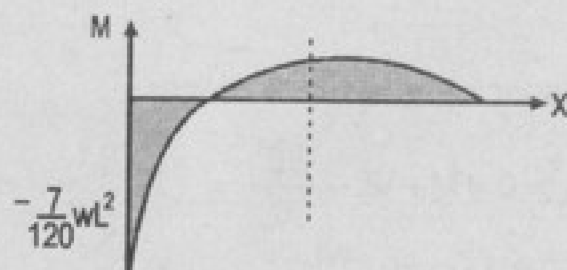
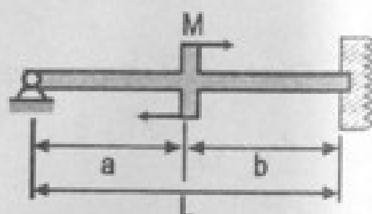


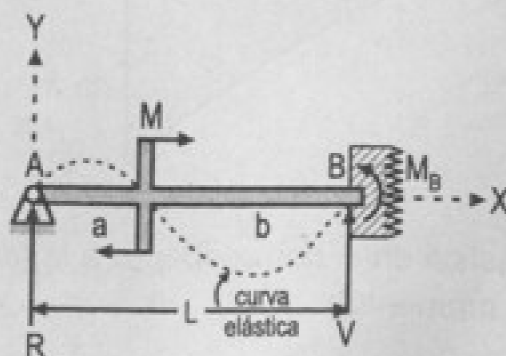
Diagrama de momentos:



722. En la viga de la figura, calcular la reacción R en el extremo apoyado y el momento de empotramiento. Comprobar el resultado obtenido haciendo b = L y compararlo con el resultado del problema 706.



Resolución:
Del diagrama de cuerpo libre del sistema:

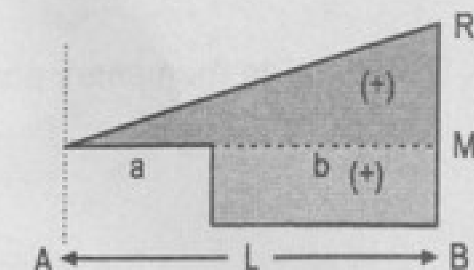


Por las ecuaciones de la estática

$$\Sigma F_y = 0 = R + V \qquad ...(1)$$

$$\Sigma M_B = 0 = RL + M + -M_B \qquad ...(2)$$

Diagrama de momentos por partes:



La desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula; por el método del área de momentos: $EIt_{A/B} = 0 = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_A$

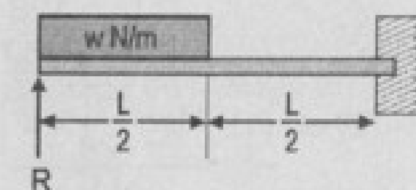
Así: $\frac{1}{2}(RL.L)\left(2\frac{L}{3}\right) + Mb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0$

Simplificando: $\boxed{R = \frac{-3}{2}\frac{b}{L^3}(2a + b)M}$ ...(3)

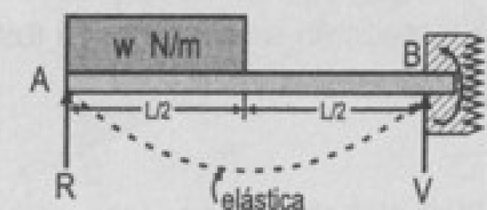
El signo menos indica que R se ha tomado en la dirección contraria.

En (2): $\boxed{M_B = \frac{(3a^2 - L^2)}{2L^2}M}$

723. Hallar la reacción R y el momento de empotramiento en la viga de la figura.

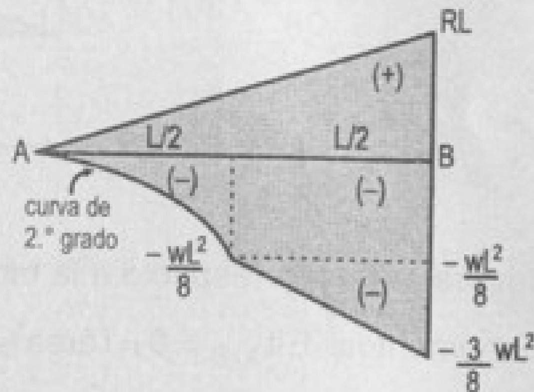


Resolución:
Del diagrama de cuerpo libre:



Donde: $\Sigma M_B = 0 = RL - w\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\frac{L}{2}\right) - M$ ...(1)

Diagrama de momentos por partes:



Como la desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula; por el método del área de momentos:

$$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_A = 0$$

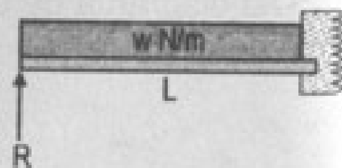
donde: $\frac{1}{2}(RL.L)\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{wL^2}{8}.\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}.\frac{L}{2}\right)$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}wL^2 - \frac{wL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}.\frac{L}{2}\right) = 0$$

Simplificando: $\boxed{R = \frac{41}{128}wL}$ ...(2)

(2) en (1): $\boxed{M = \frac{-7}{128}wL^2}$

724. El empotramiento de la viga de la figura no es perfecto, de manera que el aplicar la carga uniforme w permite un cierto giro $wL^3/48EI$ de la sección empotrada. Si los apoyos están al mismo nivel, determinar R.



Resolución:
Del diagrama de cuerpo libre del sistema:

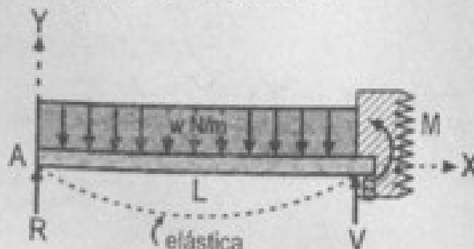
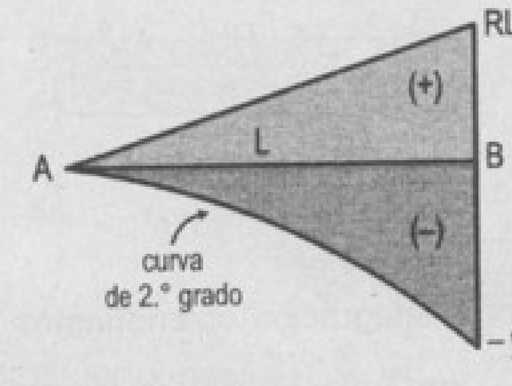


Diagrama de momentos por partes:



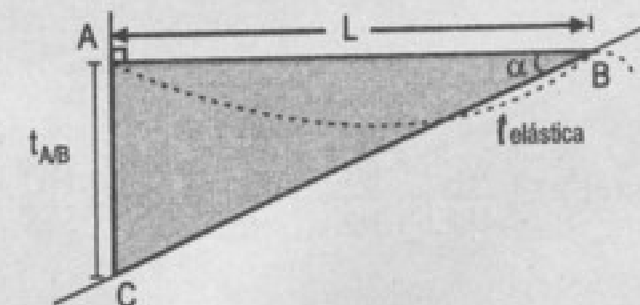
Donde la deflexión de A respecto a la tangente que pasa por B es:

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A\right]$$

Así: $t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left(\left(\frac{RL}{2}\right)L\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right)(L)\left(\frac{3}{4}L\right)\right)$

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{RL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \quad ...(1)$$

Como el empotramiento (en B) no es perfecto, es decir, si se traza una tangente en B genera un ángulo respecto a la horizontal AB, que es justo el ángulo de desviación o giro.



Sea ese ángulo igual a "α", en el triángulo ABC:

$$\tan\alpha = \frac{t_{A/B}}{L} \quad ...(2)$$

Como "α" es pequeño, podemos aproximar:

$$\tan\alpha = \alpha \quad ...(3)$$

Por el dato: $\alpha = \dfrac{wL^3}{48EI}$ ...(4)

Ahora (1), (3) y (4) en (2): $\dfrac{wL^3}{48EI} = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{RL^3}{3} - \dfrac{wL^4}{8}\right)\dfrac{1}{L}$

Simplificando: $\boxed{R = \dfrac{7}{16}wL}$

Por el método de la doble integración obtendríamos el resultado de manera más rápida: $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = Rx - \dfrac{wx^2}{2}$; $x \in \langle 0;L\rangle$

Integrando 1.ª vez: $EI\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Rx^2}{2} - \dfrac{wx^3}{6} + C_1$ ...(1)

Integrando 2.ª vez: $Ely = \dfrac{Rx^3}{6} - \dfrac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$ ...(2)

Como el punto A está al mismo nivel de B; "y" es igual tanto para $x=0 \wedge x=L$, igualando ambas ecuaciones: (en (2))

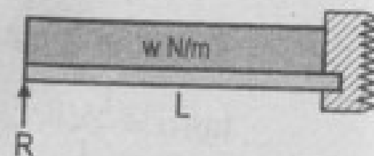
$$\frac{R}{6}(0)^3 - \frac{w}{24}(0)^4 + C_1(0) + C_2 = \frac{R}{6}L^3 - \frac{w}{24}(L)^4 + C_1(L) + C_2$$

Simplificando: $C_1 = \dfrac{wL^3}{24} - \dfrac{RL^2}{6}$ ...(3)

Como $\dfrac{dy}{dx} \approx \theta = \dfrac{wL^3}{48EI}$ ...(4)

(3); (4) en (1) (para x=L): $EI.\dfrac{wL^3}{48EI} = \dfrac{RL^2}{2} - \dfrac{wL^3}{6} + \dfrac{wL^3}{24} - \dfrac{RL^2}{6} \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{7}{16}wL}$

725. Si el apoyo izquierdo de la viga del problema anterior sufre un asentamiento de valor δ, demostrar que la reacción en él experimenta una disminución igual a $EI\delta/L^3$.



Resolución:

Del problema anterior, el punto A sufre un asentamiento igual a "δ":

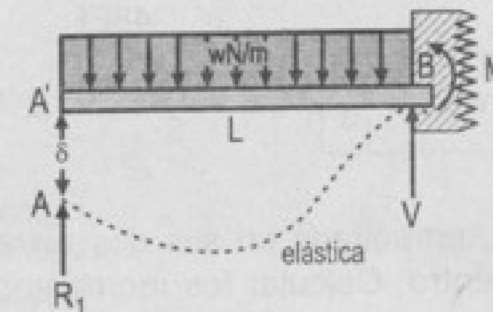
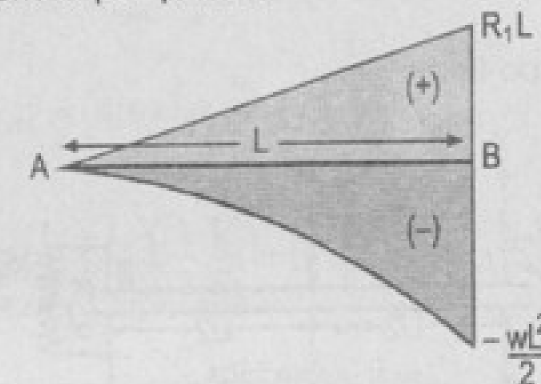


Diagrama de momentos por partes:

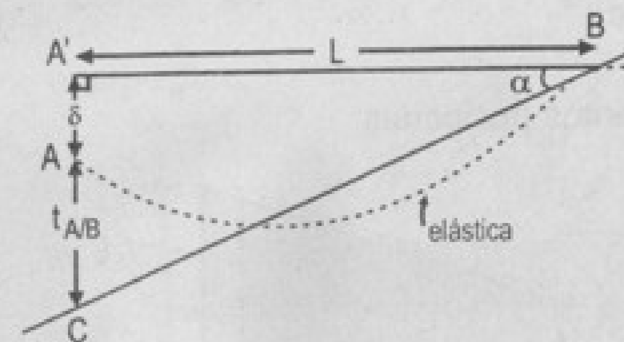


La deflexión de A respecto a la tangente que pasa por B es:

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A\right]$$

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \quad ...(1)$$

Del diagrama de la elástica:



En el triángulo A'BC:

Como $\alpha = \dfrac{wL^3}{48EI}$, tenemos: $\tan\alpha = \dfrac{t_{A/B} + \delta}{L}$

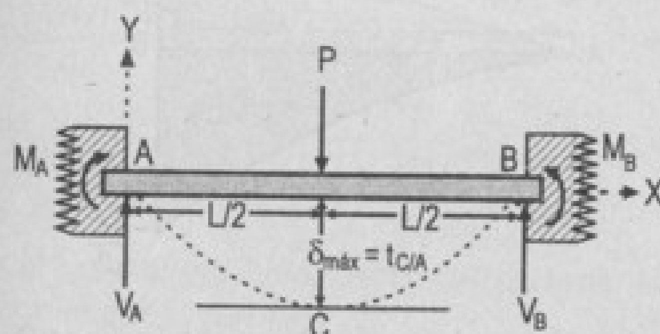
De lo visto anteriormente $\alpha \approx \tan\alpha$; en (1): $\dfrac{wL^3}{48EI} = \dfrac{\frac{1}{EI}\left(\frac{R_1L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \delta}{L}$

Simplificando: $\boxed{R_1 = \frac{7}{16}wL - 3\frac{EI\delta}{L^3}}$

726. Una viga de longitud L, empotrada en sus dos extremos, soporta una carga concentrada P en el centro. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima.

Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:



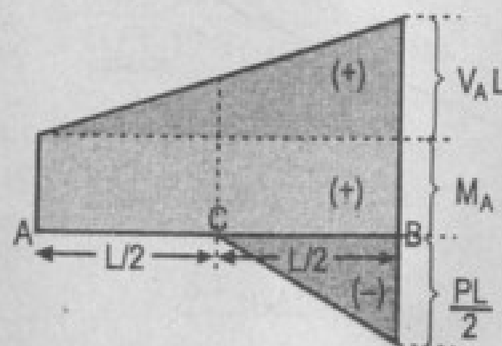
Por la simetría del sistema de empotramiento perfecto:

$M_A = M_B \wedge V_A = V_B$ ...(1)

Además: $\Sigma F_y = 0 = V_A + V_B = P$ ...(2)

Luego: $\boxed{V_A = \frac{P}{2} = V_B}$ ...(3)

Diagrama de momentos por partes:



Por el empotramiento perfecto la variación total de la pendiente entre A y B es nula, así:

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \quad o \quad \frac{(V_AL)L}{2} + (M_A)(L) - \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

De (3): $\boxed{M_A = \frac{-PL}{8} = M_B}$

La deflexión máxima, $\delta_{máx}$, ocurre en el centro del claro por la simetría del sistema, así:

$$EIt_{C/A} = EI\delta_{máx} = (\text{área})_{AC}.\bar{x}C \quad o$$

$$EI\delta_{máx} = \frac{1}{2}\left(V_A\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}.\frac{L}{2}\right) + (M_A)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}.\frac{L}{2}\right)$$

Reemplazando valores y simplificando: $EI\delta_{máx} = -\dfrac{PL^3}{192}$

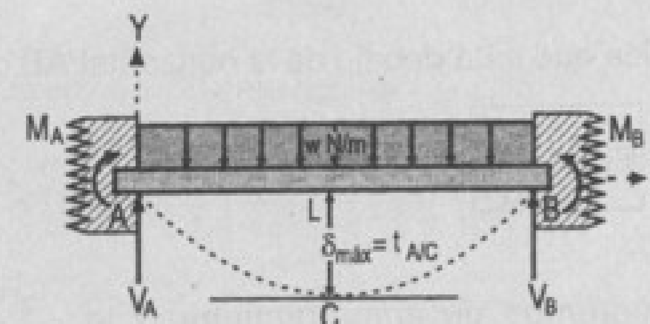
El signo menos indica que está por debajo de la horizontal, en valor absoluto:

$$\boxed{EI\delta = \frac{PL^3}{192}}$$

727. Repetir el problema 726 si en lugar de la carga concentrada se aplica una carga uniforme de w N/m sobre toda su longitud.

Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:

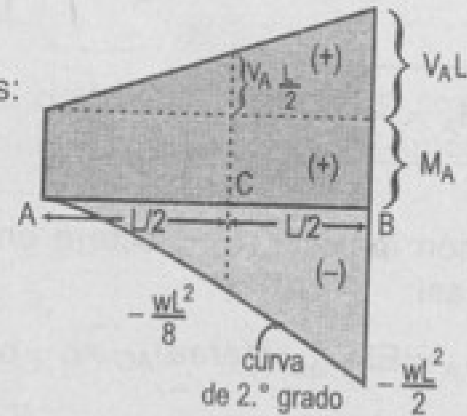


Por la simetría del sistema: $M_A = M_B \wedge V_A = V_B$ ...(1)

Por las ecuaciones de la estática: $\Sigma F_y = 0 = V_A + V_B - wL$ ...(2)

Resolviendo: $\boxed{V_A = \frac{wL}{2} = V_B}$ ...(3)

Diagrama de momentos por partes:



Por el empotramiento perfecto la variación total de la pendiente entre A y B es nula, así:

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \quad o \quad \frac{(V_A L)(L)}{2} + (M_A)(L) - \frac{1}{3}\frac{(wL^2)}{2}(L) = 0$$

De (3): $\boxed{M_A = \frac{-wL^2}{12} = M_B}$

La deflexión máxima ocurre en el centro del claro:

$$EIt_{C/A} = EI\delta_{máx} = (\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C$$

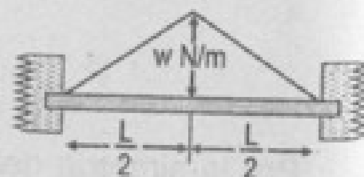
$$EI\delta_{máx} = \frac{1}{2}\left(V_A \frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\right) + (M_A)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

Evaluando y simplificando: $EI\delta_{máx} = -\frac{wL^4}{384}$

El signo menos indica que está debajo de la horizontal AB o nivel de referencia.

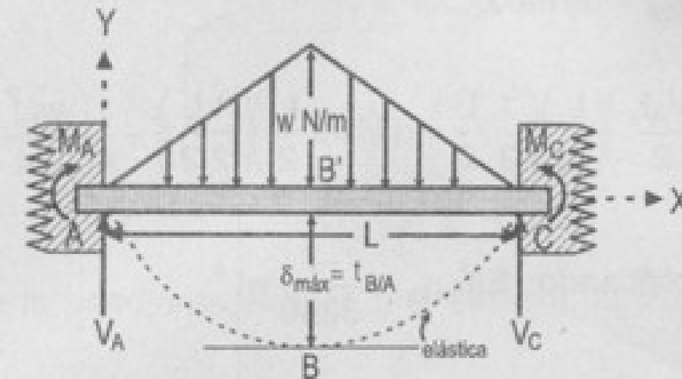
En valor absoluto: $\boxed{EI\delta = \frac{wL^4}{384}}$

728. Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro en la viga doblemente empotrada de la figura.



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre:

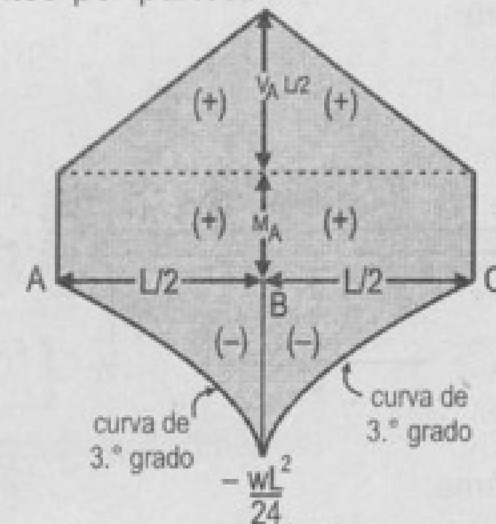


Por la simetría del sistema: $M_A = M_B \wedge V_A = V_C$ ...(1)

Además: $\Sigma F_y = 0 = V_A + V_C - \frac{wL}{2}$ ...(2)

De (1) y (2): $\boxed{V_A = V_C = \frac{wL}{4}}$ ...(3)

Diagrama de momentos por partes:



Por el empotramiento perfecto la variación total de la pendiente entre A y C es nula, así:

$$EI\theta_{AC} = 0 = (\text{área})_{AC} = 2(\text{área})_{AB} \quad o$$

$$2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{V_A L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + (M_A)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] = 0$$

Evaluando de (3) y simplificando: $\boxed{M_A = -\frac{5}{96}wL^2 = M_B}$

La deflexión máxima ocurre en el centro del claro:

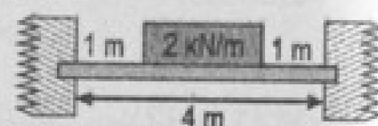
$$EIt_{B/A} = EI\delta_{máx} = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_B \quad o$$

$$EI\delta_{máx} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_AL}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}.\frac{L}{2}\right) + (M_A)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{5}.\frac{L}{2}\right)$$

Evaluando y simplificando: $EI\delta_{máx} = \frac{-7}{3840}wL^4$

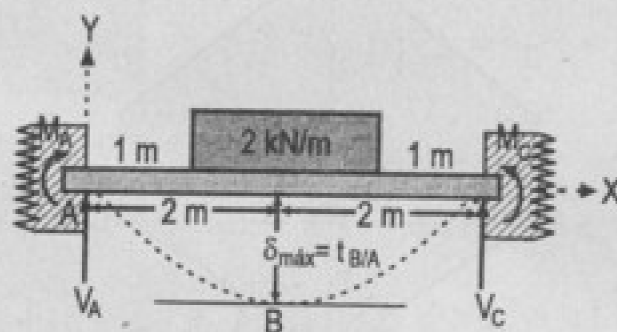
En valor absoluto: $\boxed{EI\delta = \frac{7}{3840}wL^4}$

729. En la viga doblemente empotrada de la figura, calcular los momentos de empotramiento y el máximo valor de $EI\delta$.



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre:



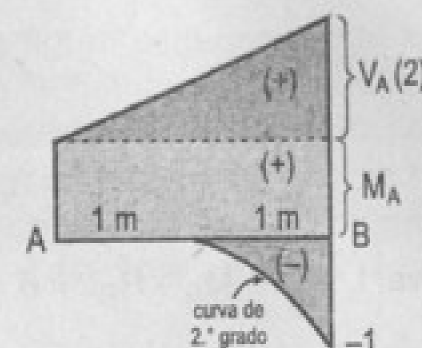
Por la simetría del sistema:

$M_A = M_C \wedge V_A = V_C$ ...(1)

$\Sigma F_y = 0 = V_A + V_C - 2(2)$ kN ...(2)

De (1) y (2): $\boxed{V_A = 2\text{ kN} = V_C}$ ...(3)

En el diagrama de momentos por partes solo lo haremos hasta el punto medio "B", que es además donde alcanza la deflexión máxima; aprovechando la simetría del sistema:



La variación de la pendiente entre A y C es nula, lo mismo podemos afirmar entre A y B; así:

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \quad o \quad \frac{1}{2}(2V_A)(2) + 2M_A - \frac{1}{3}(1)(1) = 0$$

De (3) y evaluando: $\boxed{M_A = \frac{-11}{6}\text{ kN.m} = M_C}$

La deflexión máxima es:

$$EIt_{B/A} = EI\delta_{máx} = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_B \quad o$$

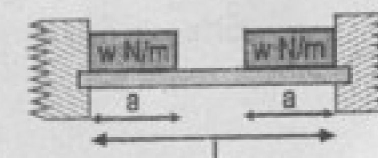
$$EI\delta_{máx} = \frac{1}{2}(2V_A)(2)\left(\frac{1}{3}.2\right) + (2M_A)\left(\frac{1}{2}.2\right) - \frac{1}{3}(1)(1)\left(\frac{1}{4}.1\right)$$

$$EI\delta_{máx} = \frac{-13}{12}\text{ kN.m}^3$$

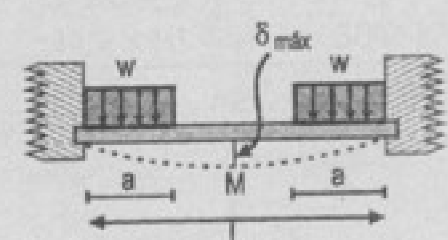
El signo menos indica que apunta hacia abajo de la horizontal; en valor absoluto: $\boxed{EI\delta = \frac{13}{12}\text{ kN.m}^3}$

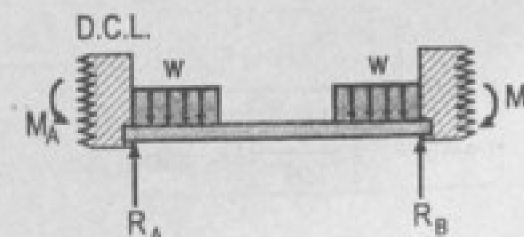
(Los valores del texto son aproximados)

730. Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga de la figura.



Resolución:



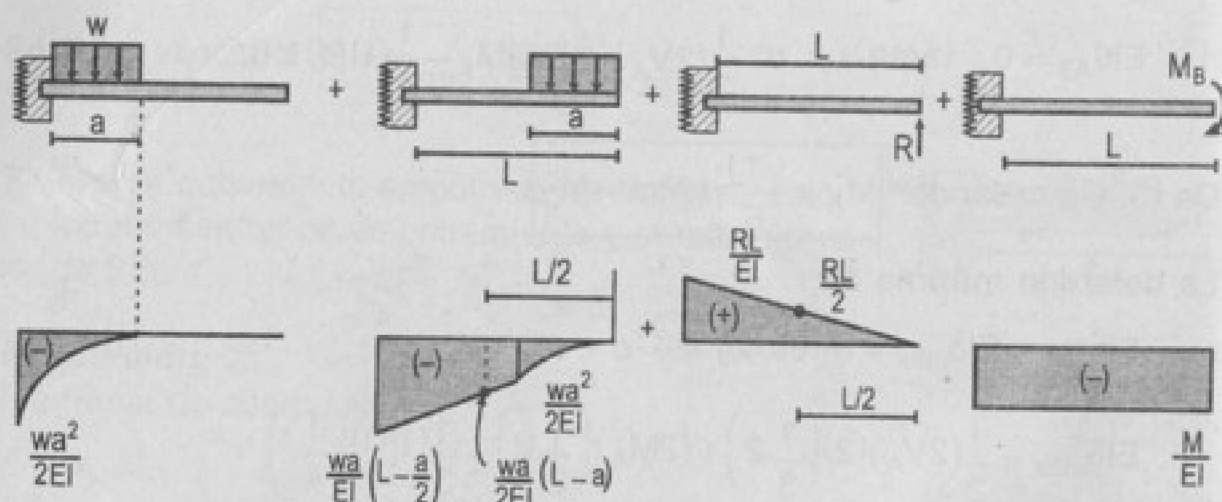


Equilibrio: $\left.\begin{matrix} R_A = R_B = R \\ M_A = M_B = M \end{matrix}\right\}$ simetría

$\Sigma \mathbf{F_y = 0}: R = wa$

$$\Sigma \mathbf{M_A = 0}: M_A - w\frac{a^2}{2} - wa\left(L - \frac{a}{2}\right) - M_B + R_B L = 0$$

$$RL = wa\left(\frac{a}{2} + L - \frac{a}{2}\right) \Rightarrow RL = waL \quad \therefore \; R = wa$$



$$EI\theta_{AB} = 0 = -\frac{wa^3}{6} - \left[\frac{wa}{2}\left(L - \frac{a}{2}\right) + \frac{wa^2}{4}\right](L-a) - \frac{wa^3}{6} + \frac{RL^2}{2} - ML$$

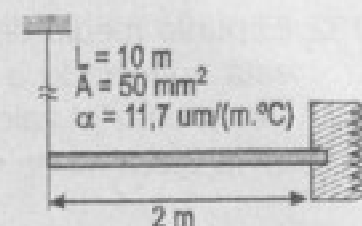
$$\boxed{M = -\frac{wa^2}{6L}(2a - 3L)}$$

$$EIt_{BM} = \delta_M EI = -\frac{wa^3}{6}\left(\frac{3}{4}a\right) - \frac{wa^2}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right)\left[\frac{L}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right)\right]$$

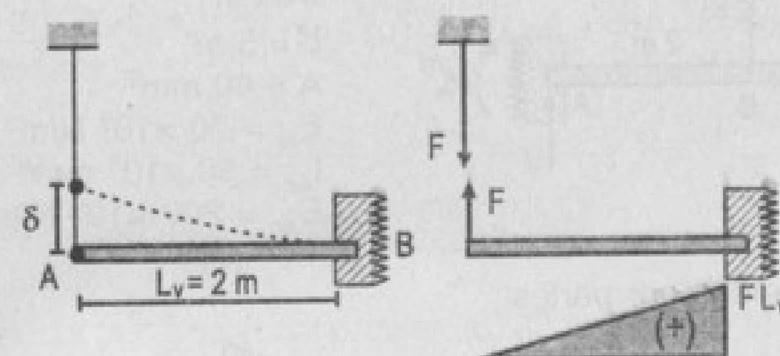
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right)\left[\frac{wa}{2}(L-a) + \frac{wa^2}{2}\right]\left[\frac{L}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2} - a\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{RL}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{L}{2}\right) - M\frac{L}{2}\left(\frac{L}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_M EI = -\left[\frac{wa^3}{24}\right](L-a)}$$

731. La viga mostrada en la figura está conectada a una barra vertical. Si la viga se mantiene horizontal a una cierta temperatura, determinar el incremento del esfuerzo en la barra si la temperatura en este se abate 50°C. Tanto la viga como la barra están construidas de acero con E = 200 × 10^9 N/m². Para la viga use I = 60 × 10^6 mm⁴.



Resolución:



$$\delta = \delta_T - \delta_M = \alpha L_b \Delta T - \frac{FL_b}{EA_b} \;;\; EI\delta = EIt_{AB} = \frac{FL_v^2}{2}\left(\frac{2}{3}L_v\right) = \frac{FL_v^3}{3}$$

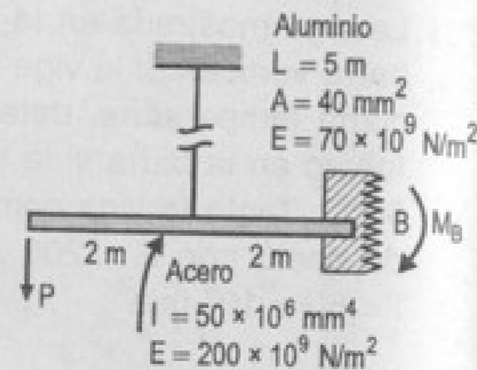
$$\alpha L_b \Delta T - \frac{FL_b}{EA_b} = \frac{FL_v^3}{3EI} \Rightarrow \alpha L_b \Delta T = F\left(\frac{L_b}{EA_b} + \frac{L_v^3}{3EI}\right)$$

$$\frac{F}{A_b} = \sigma = \frac{\alpha L_b \Delta T}{A_b\left(\frac{L_b}{EA_b} + \frac{L_v^3}{3EI}\right)} = \frac{\alpha L_b \Delta TE}{\left(L_b + \frac{L_v^3 A_b}{3I}\right)}$$

Reemplazando valores:

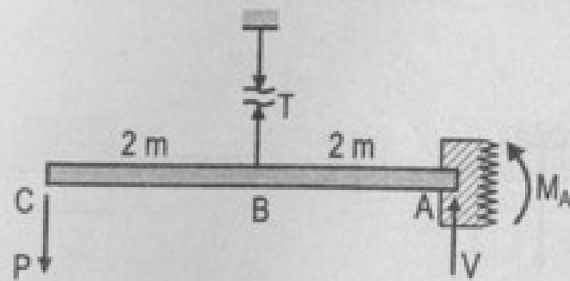
$$\sigma = \frac{11{,}7\times10^{-6}\times10\times50\times200\times10^9}{\left(10 + \frac{2^3\times50\times10^{-6}}{3\times60\times10^{-6}}\right)} \Rightarrow \boxed{95{,}7\times10^6\frac{N}{m^2}}$$

732. El punto medio de la viga de acero de la figura está conectado a la barra vertical de aluminio. Determinar el valor máximo de P si el esfuerzo en la barra no ha de ser mayor que 150 MN/m².



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:



Datos:

$L = 5$ m

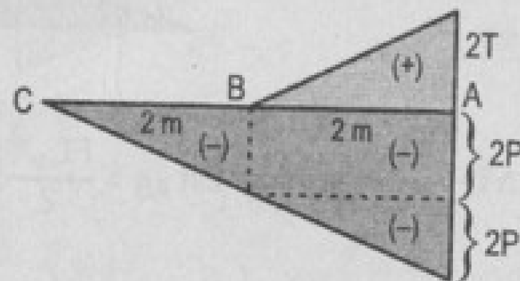
$A = 40$ mm²

$E_{Al} = 70 \times 10^9$ N/m²

$I_{Ac} = 50 \times 10^6$ mm⁴

$E_{Ac} = 200 \times 10^9$ N/m²

Área de momentos por partes:



donde:

$$-E_{Ac}I_{Ac}t_{B/A} = \frac{1}{2}(2)(2T)\left(2.\frac{2}{3}\right) - \left\{(2P)(2)(1) + \frac{(2)}{2}(2P)\frac{(2)}{3}(2)\right\}$$

$$\Rightarrow E_{Ac}I_{Ac}t_{B/A} = \frac{20}{3}P - \frac{8}{3}T \qquad ...(1)$$

Por la elongación de la barra de aluminio:

$$\delta = \frac{TL}{A.E_{Al}} \qquad ...(2)$$

Pero como $t_{B/A} = \delta$

Entonces:

$$\frac{E_{Ac}I_{Ac}}{E_{Al}.A} \times T.L = \frac{20P}{3} - \frac{8}{3}T \qquad ...(3)$$

Además, como el esfuerzo máximo de la barra es:

$$\sigma_{máx} = 150 \text{ MN/m}^2$$

Así: $\sigma_{máx} = \dfrac{T}{A}$ ...(4)

(4) en (3):

$$\frac{E_{Ac}I_{Ac}}{E_{Al}A}.A\sigma_{máx}L = \frac{20}{3}P - \frac{8}{3}(\sigma_{máx}.A)$$

Colocando los datos:

$$\frac{200\times10^9 N/m^2}{70\times10^9 N/m^2}50\times10^6 mm^4\left(150\times10^6\frac{N}{m^2}\right)(5\ m) = \frac{20}{3}P - \frac{8}{3}\left(150\times10^6\frac{N}{m^2}\right)(0\ mm^2)$$

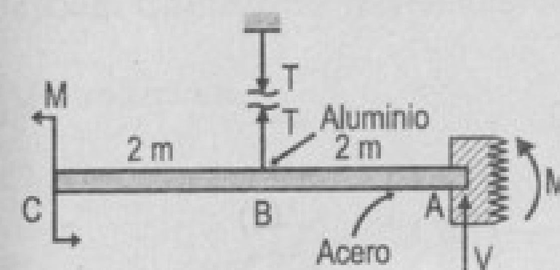
Simplificando:

$$P = 18\ 471,42\ N \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 18,47\ kN}$$

733. Si se reemplaza la carga P del problema 732 por un par M en sentido contrario al del reloj, determinar el valor máximo de M si el esfuerzo en la barra vertical no ha de ser mayor que 100 MN/m².

Resolución:

Del diagrama:



Datos:

$L = 5$ m

$A_{Al} = 40$ mm²

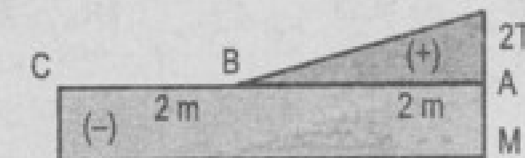
$E_{Al} = 70 \times 10^9$ N/m²

$I_{Ac} = 50 \times 10^6$ mm⁴

$E_{Ac} = 200 \times 10^9$ N/m²

$\sigma = 100$ MN/m²

Área de momentos por partes:



donde:

$$-E_{Ac}I_{Ac}t_{B/A} = \frac{1}{2}(2)(2T)\left(\frac{2}{3}(2)\right) - 2(M)(1) \Rightarrow E_{Ac}I_{Ac}t_{B/A} = 2M - \frac{8}{B}T \qquad ...(1)$$

En la barra, su elongación por efecto de T es:

$$\delta = \frac{T.L}{E_{Al}.A_{Al}} \quad ...(2) \text{ y como } t_{B/A} = \delta, \text{ entonces:}$$

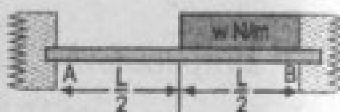
$$\frac{E_{Ac} I_{Ac}}{E_{Al}.A_{Al}} T.L = 2M - \frac{8}{3}. \text{ Reemplazando los datos: } T = \frac{M}{(10{,}262\ m)} \quad ...(3)$$

Como el esfuerzo máximo de la barra es:

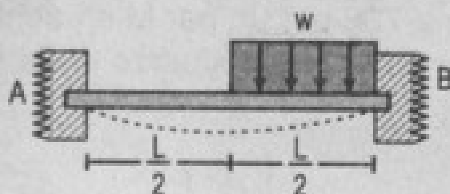
$$\sigma = \frac{T}{A_{Al}} \Rightarrow 100\times10^{6}\frac{N}{m^2} = \frac{M}{(10{,}262\ m)(40\ mm^2)} \Rightarrow M = 41\ 048\ N.m$$

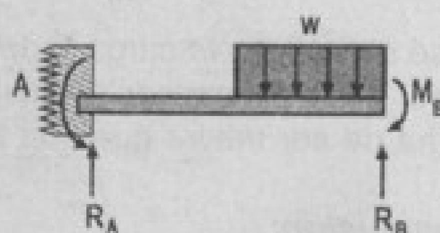
o $\boxed{M = 41{,}048\ kN.m}$

734. Determinar los momentos de empotramiento en la viga de la figura perfectamente empotrada en sus extremos.



Resolución:



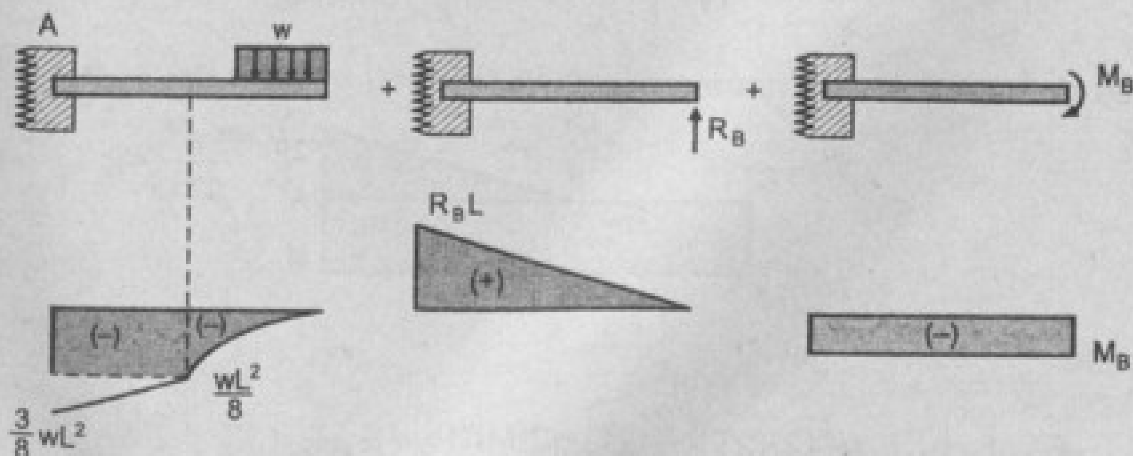


Equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0: \quad R_A + R_B = w\frac{L}{2} \quad ...(1)$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad M_A - M_B + R_B L - w\frac{L}{2}\left(\frac{3}{4}L\right) = 0$$

$$M_A - M_B = \frac{3}{8}wL^2 - R_B L \quad ...(2)$$



$$EI\theta_{AB} = 0 = -\left(\frac{3}{16}wL^2 + \frac{1}{16}wL^2\right)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{8}\times\frac{L}{2}\right) + \frac{R_B L^2}{2} M_B L$$

$$M_B = -\frac{7}{48}wL^2 + \frac{R_B}{2}L \quad ...(3)$$

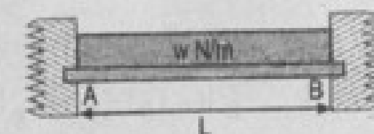
$$EIt_{AB} = 0 = -\left(\frac{wL^2}{8}\times\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}wL^2\times\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\times\frac{L}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{8}\times\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}R_B L^2_x \frac{L}{3} - \frac{M_B L^2}{2}$$

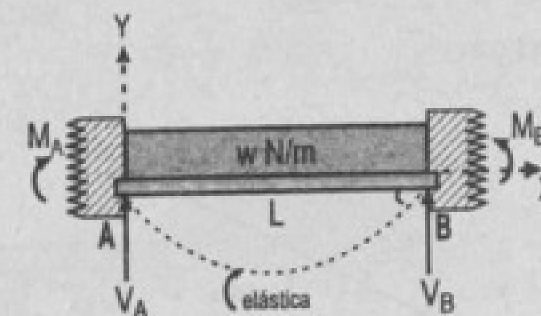
$$M_B = -\frac{5}{64}wL^2 + \frac{1}{3}R_B L \quad ...(4)$$

De (3) y (4): $R_B = \frac{13}{32}wL$; $\boxed{M_B = \frac{11}{192}wL^2}$; en (2): $\boxed{M_A = \frac{5}{192}wL^2}$

735. La viga de la figura está perfectamente empotrada en A, pero solo parcialmente empotrada en B, donde la pendiente vale $wL^3/48EI$, dirigida hacia arriba a la derecha. Calcular los momentos de empotramiento.



Resolución:

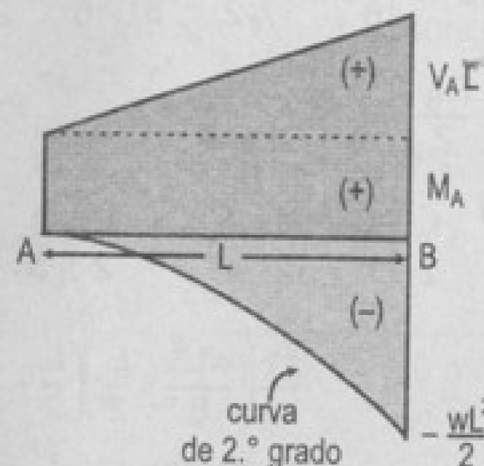


Por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma M_A = 0 = M_B + V_B L - \frac{wL^2}{2} - M_A \quad ...(1)$$

$$\Sigma F_y = 0 = V_A + V_B - wL \quad ...(2)$$

Diagrama de momentos por partes:



donde:

$$Elt_{AB}=\frac{1}{2}(V_AL)(L)\left(\frac{2}{3}L\right)+(M_A)(L)\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right)(L)\left(\frac{3}{4}L\right)=(\text{área})_{AB}.\bar{x}_A$$

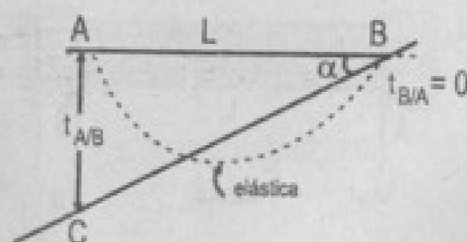
$$\text{ó } Elt_{AB}=\frac{V_AL^3}{3}+\frac{M_AL^2}{2}-\frac{wL^4}{8} \qquad ...(3)$$

Además:

$$Elt_{B/A}=\frac{1}{2}(V_AL)(L)\left(\frac{1}{3}L\right)+(M_A)(L)\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right)(L)\left(\frac{1}{4}L\right)=(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_B$$

$$\text{o } Elt_{B/A}=\frac{V_AL^3}{6}+\frac{M_AL^2}{2}-\frac{wL^4}{24} \qquad ...(4)$$

Diagrama de la elástica:



Del triángulo rectángulo ABC: $\tan\alpha=\frac{t_{A/B}}{L}$ ...(5)

Por ser α pequeño $\Rightarrow \tan\alpha=\alpha$ ...(6)

del dato: $\alpha=\frac{wL^3}{48EI}$ ...(7)

Reuniendo todos los valores en (5):

$$\frac{wL^3}{48EI}=\frac{\frac{1}{EI}\left(\frac{V_AL^3}{3}+\frac{M_AL^2}{2}-\frac{wL^4}{8}\right)}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{wL^4}{48}=\frac{V_AL^3}{3}+\frac{M_AL^2}{2}-\frac{wL^4}{8} \qquad ...(\alpha)$$

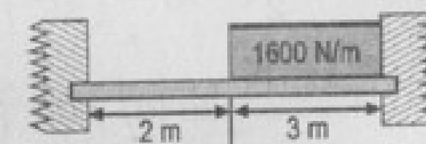
Además $t_{B/A}=0$, así (4) es nulo:

$$\frac{V_AL^3}{6}+\frac{M_AL^2}{2}-\frac{wL^4}{24}=0 \qquad ...(\beta)$$

Resolviendo (α) y (β): $\boxed{M_A=\frac{-wL^2}{8}}$; $\boxed{V_A=\frac{5}{8}wL}$

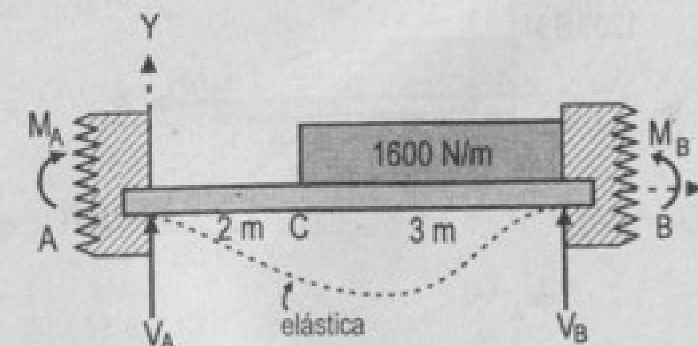
En (1) y (2): $\boxed{M_B=0}$; $\boxed{V_B=\frac{3}{8}wL}$

736. Para la viga mostrada en la figura calcular los valores de la fuerza cortante y del momento flexionante en los empotramientos, y bosqueje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



Resolución:

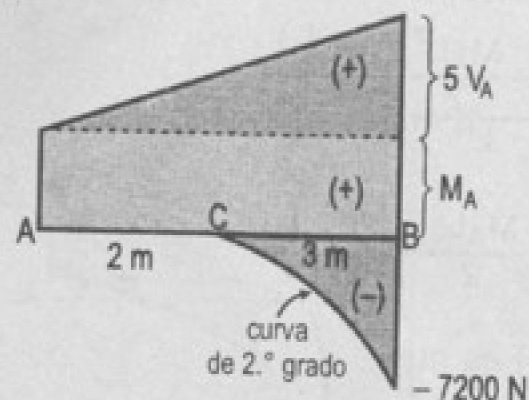
Diagrama de cuerpo libre



$$\Sigma F_y=0=V_A+V_B-1600(3) \qquad ...(1)$$

$$\Sigma M_B=0=M_A+5V_A-(1600)(3)\left(\frac{3}{2}\right)-M_B \qquad ...(2)$$

Diagrama de momentos por partes:



Como la variación de la pendiente entre A y B es nula, entonces:

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}(5V_A)(5) + M_A(5) - \frac{1}{3}(7200)(3) = 0 \quad ...(\alpha)$$

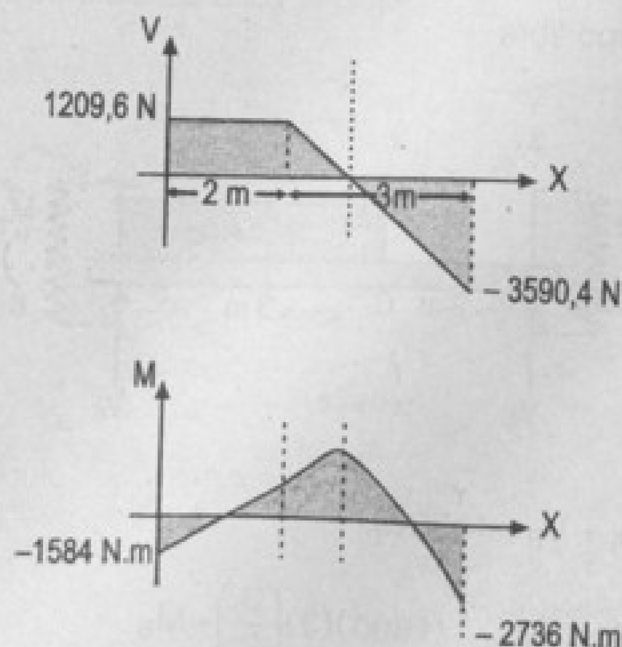
La desviación de A respecto a la tangente que pasa por B es nula, así:

$$EIt_{A/B} = 0 = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_A \quad \text{o}$$

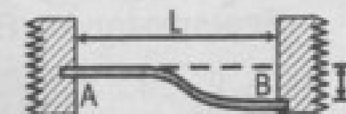
$$\frac{1}{2}(5V_A)(5)\left(\frac{2}{3}.5\right) + M_A(5)\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{3}(7200)(3)\left(2 + \frac{3}{4}(3)\right) \quad ...(\beta)$$

Resolviendo (α) y (β): $\boxed{V_A = 1209{,}6\ N}$; $\boxed{M_A = -1584\ N.m}$

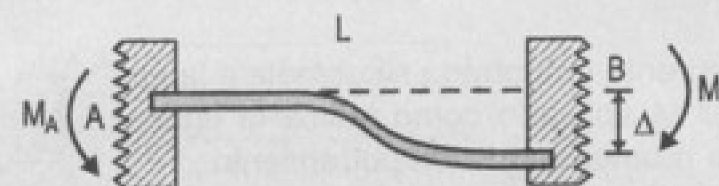
En (1) y (2): $\boxed{V_B = 3590{,}4\ N}$; $\boxed{M_B = -2736\ N.m}$



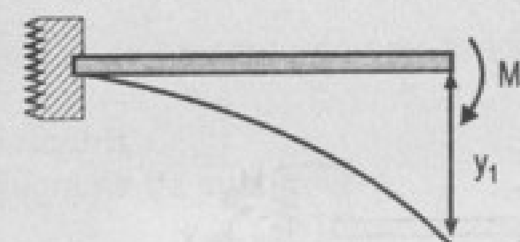
737. En la viga perfectamente empotrada de la figura el empotramiento B ha tenido un asentamiento vertical de valor Δ.
Comprobar que $M_B = -M_A = 6EI\Delta/L^2$.



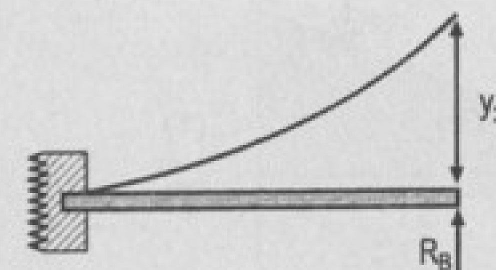
Resolución:



Por superposición:



$$y_1 = \frac{M_B L^2}{2EI} \quad ; \theta_1 = \frac{M_B L}{2EI}$$



$$y_2 = \frac{R_B L^3}{3EI} \quad ; \theta_2 = \frac{R_B L^2}{2EI}$$

Si se conoce que:

$$y_1 - y_2 = \Delta \Rightarrow \frac{M_B L^2}{2EI} - \frac{R_B L^3}{3EI} = \Delta \quad ...(1)$$

$$\theta_2 - \theta_1 = 0 \Rightarrow \frac{R_B L^2}{2EI} - \frac{M_B L}{EI} = 0 \Rightarrow R_B L - 2M_B = 0 \quad \therefore \quad R_B = \frac{2}{L}M_B \quad ...(2)$$

Despejando de (1) en (2):

$$\frac{M_B L^2}{2EI} - \left(\frac{2}{L}M_B\right)\frac{L^3}{3EI} = \Delta \Rightarrow M_B = -\Delta\frac{(6EI)}{L^2} \Rightarrow M_B = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

Además: $\qquad M_B = -M_A = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$ ...(3)

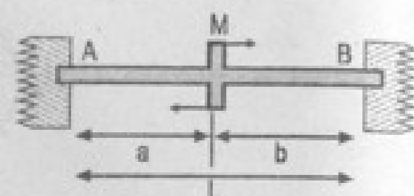
También: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A = M_B - R_B L$ ...(I)

Reemplazando (2); (3) en (I):

$$M_A = -\frac{6EI\Delta}{L^2} - \frac{2}{L}\left(-\frac{6EI\Delta}{L^2}\right)L$$

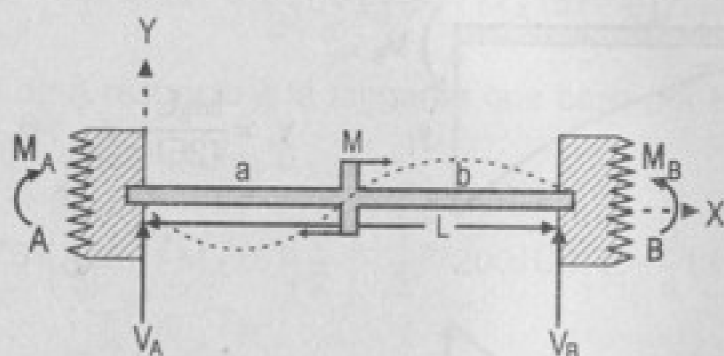
$$M_A = -\frac{6EI\Delta}{L^2} + \frac{12\Delta EI}{L^2} \Rightarrow M_A = \frac{6\Delta EI}{L^2} \quad \therefore \quad \boxed{M_B = -M_A = 6EI\Delta/L^2}$$

738. Una viga doblemente empotrada se somete a la acción de un par M aplicado como indica la figura. Determinar los momentos de empotramiento.



Resolución:

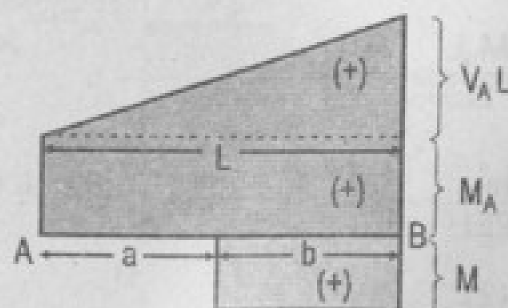
Diagrama de cuerpo libre:



$$\Sigma F_y = 0 = V_A + V_B \qquad \text{...(1)}$$

$$\Sigma M_A = 0 = M_A + M + V_A L - M_B \qquad \text{...(2)}$$

Diagrama de momentos por partes:



La variación entre la pendiente en A y B es nula, por el empotramiento perfecto. Luego:

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}(V_A L)(L) + M_A(L) + Mb = 0 \qquad \text{...}(\alpha)$$

La desviación de A respecto a la tangente que pasa por B es nula, luego:

$$EIt_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB}.\bar{x}_A \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}(V_A L)(L)\left(\frac{2}{3}L\right) + M_A(L)\left(\frac{L}{2}\right) + Mb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \quad \text{...}(\beta)$$

Resolviendo (α) y (β): $\boxed{M_A = \frac{Mb}{L}\left(\frac{3a}{L} - 1\right)}$; $V_A = -\frac{6Mab}{L^3}$

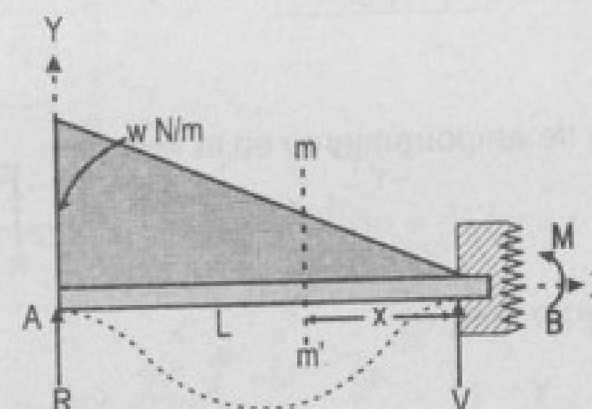
En (1) y (2): $V_B = \frac{6Mab}{L^3}$; $\boxed{M_B = \frac{-Ma}{L}\left(\frac{3b}{L} - 1\right)}$

Considerar como reacciones hiperestáticas o redundantes los momentos en los empotramientos.

739. Determinar el momento de empotramiento en la viga del problema 705.

Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:



Por el método de la doble integración: (tomando momentos)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M + Vx - \frac{w}{6L}x^3 \qquad \text{...(1)}$$

Integrando 1.ª vez:

$$EI\frac{dy}{dx} = Mx + \frac{Vx^2}{2} - \frac{wx^4}{24L} + C_1 \qquad \text{...(2)}$$

Integrando 2.ª vez:

$$EIy = \frac{Mx^2}{2} + \frac{Vx^3}{6} - \frac{wx^5}{(120L)} + C_1 x + C_2 \qquad \text{...(3)}$$

En A tenemos $\Sigma M_A = 0$, es decir, en (1) para x = L: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Así: $M + VL - \frac{wL^2}{6} = 0$ ...(α)

Si x = 0, $\frac{dy}{dx} = 0$, en (2):

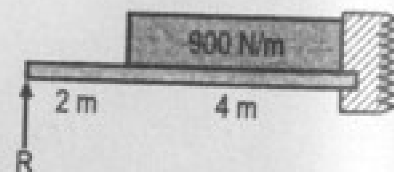
$C_1 = 0$ ...(β)

Por estar al mismo nivel A y B, la ecuación (3) es igual para x = 0 y x = L:

$$\frac{M(0)^2}{2} + \frac{V(0)^3}{6} - \frac{w(0)^5}{120L} + C_1(0) + C_2 = \frac{ML^2}{2} + \frac{VL^3}{6} - \frac{wL^5}{120L} + C_1(L) + C_2 \quad ...(\gamma)$$

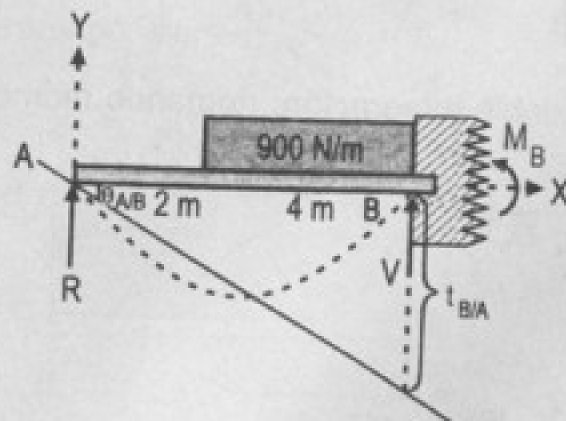
Resolviendo (α),(β) y (γ): $\boxed{M = \frac{-7}{120} wL^2}$

740. Calcular el momento de empotramiento en la viga de la figura.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:

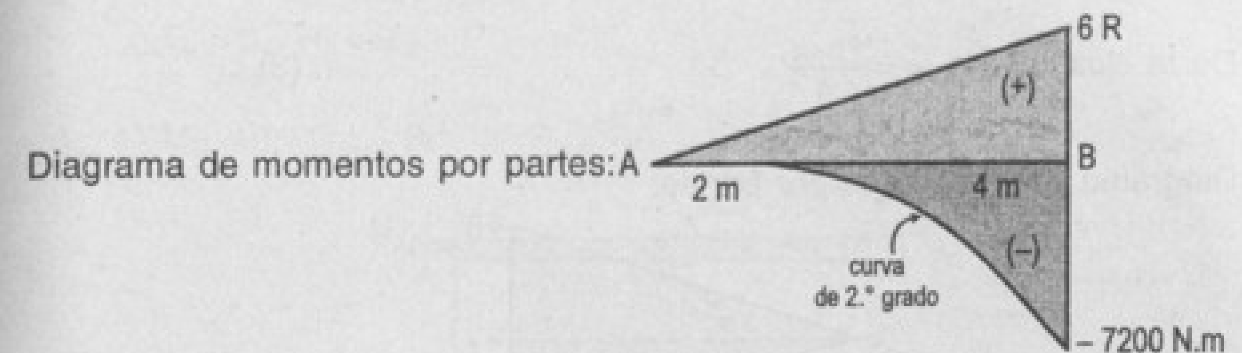


$\Sigma F_y = 0 = R + V - 3600$ ...(1)

$\Sigma M_A = 0 = M + 6V - 14\,400$ ...(2)

De la elástica: $\theta_{A/B} = \frac{t_{B/A}}{6}$ ...(3)

Diagrama de momentos por partes:



Así: $EI\theta_{A/B} = \frac{(6R)}{2}(6) - \frac{1}{3}(4)(7200)$ ...(4)

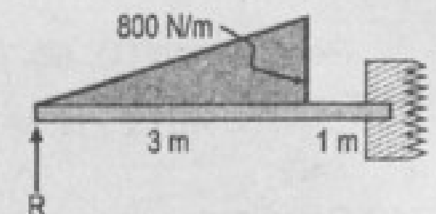
$EIt_{B/A} = \frac{(6R)(6)}{2}(2) - \frac{1}{3}(4)(7200)(1)$ ...(5)

Resolviendo (1), (2), (3), (4) y (5):

R = 666, 67 N ; V = 2933,33 N

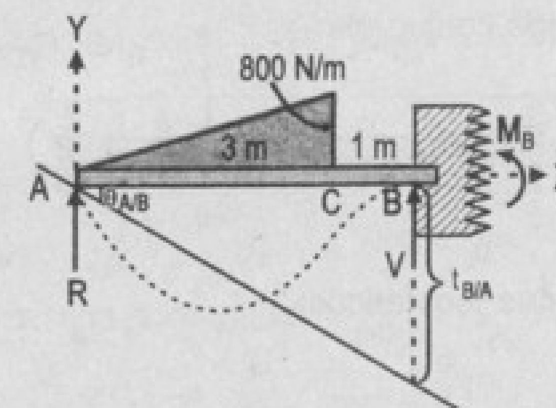
$\boxed{M = -3200 \text{ N.m}}$

741. Determinar el momento de empotramiento en la viga de la figura.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:

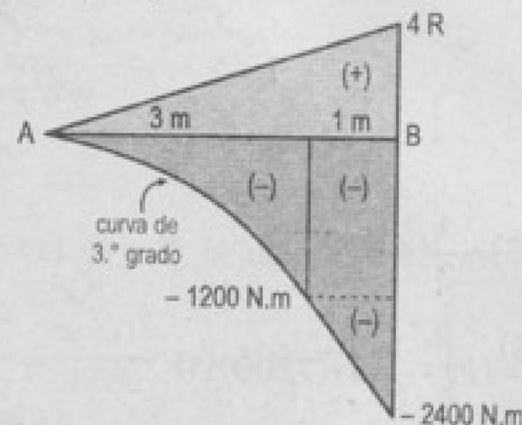


$\Sigma Fy = 0 = R + V - 1200$ ...(1)

$\Sigma M_A = 0 = M + 4V - 2400$ ...(2)

De la elástica $\theta_{A/B} = \frac{t_{B/A}}{4}$ ...(3)

Diagrama de momentos por partes:



Donde:

$$EI\theta_{A/B} = \frac{1}{2}(4R)(4) - \frac{1}{4}(3)(1200) - (1200)(1) - \frac{(1)(1200)}{2} \quad ...(4)$$

$$EIt_{B/A} = \frac{1}{2}(4R)(4)\frac{4}{3} - \frac{1}{4}(3)(1200)\left(1+\frac{3}{5}\right) - (1200)(1)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)(1200)\left(\frac{1}{3}\right) \quad ...(5)$$

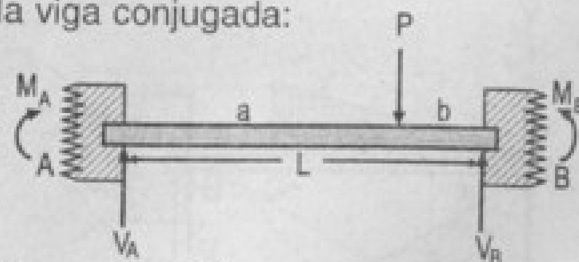
Resolviendo (1), (2), (3), (4) y (5):

R = 401,25 N; V = 798,75 N; $\boxed{M = -795\text{ N.m}}$

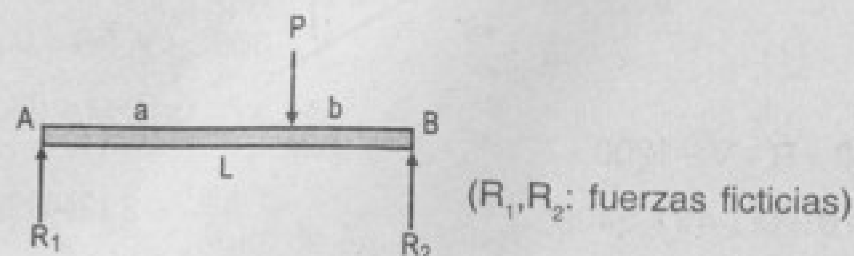
742. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 710.

Resolución:

Por el método de la viga conjugada:



Realizando los sistemas isostáticos:



(R_1,R_2: fuerzas ficticias)

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 = P$$

$$\Sigma M_B = 0 = R_1L - Pb \Rightarrow R_1 = \frac{Pb}{L} \quad ...(1)$$

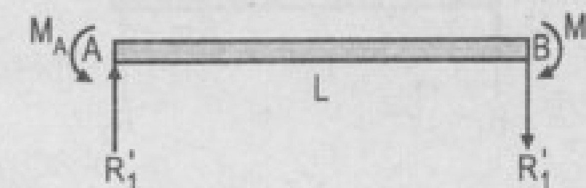
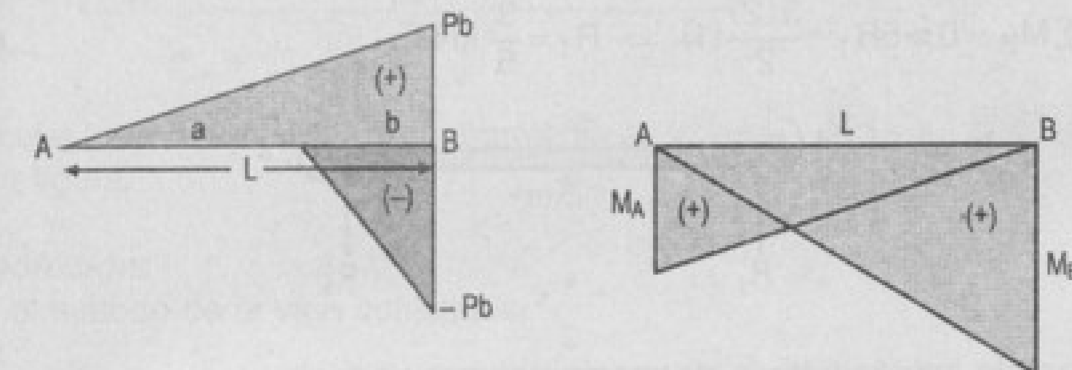


Diagrama de momentos por partes:



Como los empotramientos son perfectos y no hay deflexión:

$$EI\theta_{A/B} = 0 \wedge EIt_{B/A} = 0$$

$$\frac{PbL}{2} - \frac{Pb^2}{2} + \frac{M_AL}{2} + \frac{M_BL}{2} = 0 \quad ...(2)$$

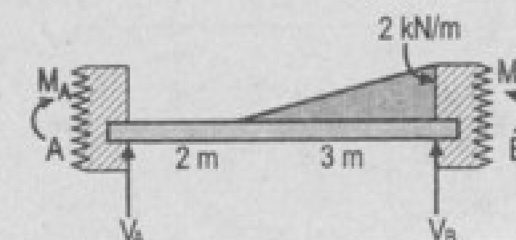
$$\frac{PbL}{2}\left(\frac{L}{3}\right) - \frac{Pb^2}{2}\left(\frac{b}{3}\right) + \frac{M_AL}{2}\left(\frac{2L}{3}\right) + \frac{M_BL}{2}\left(\frac{L}{3}\right) \quad ...(3)$$

Resolviendo (2) y (3): $\boxed{M_A = -\frac{ab^2}{L^2}P}$; $\boxed{M_B = -\frac{a^2b}{L^2}P}$

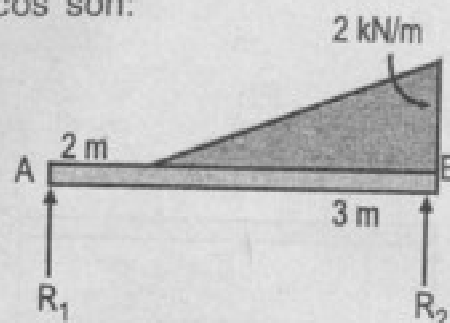
743. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 712.

Resolución:

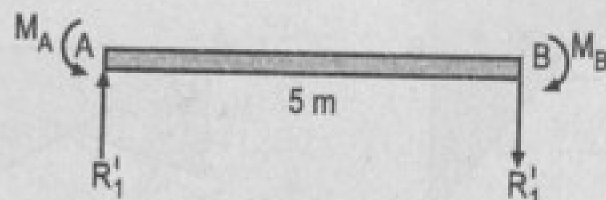
Por el método de la viga conjugada:



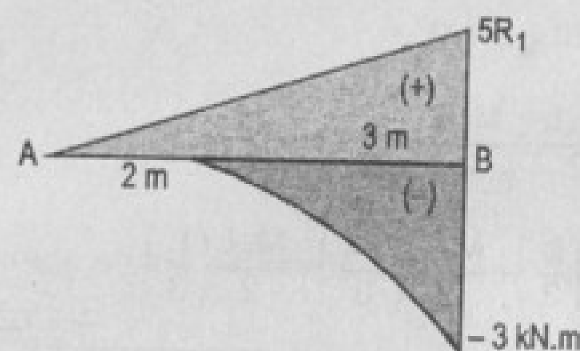
Los sistemas isostáticos son:

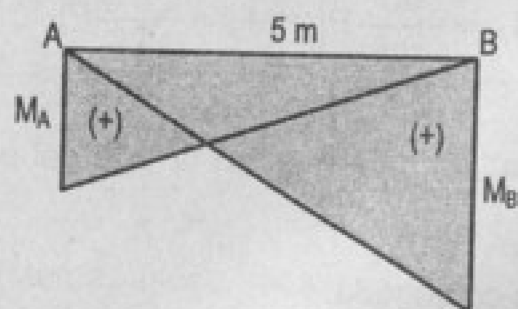


$$\Sigma M_B = 0 = 5R_1 - \frac{3(2)}{2}(1) \Rightarrow R_1 = \frac{3}{5} \text{ kN} \qquad ...(1)$$



Realizando los diagramas de momentos por partes:





Como $EI\theta_{A/B} = 0$:

$$\frac{(5R_1)(5)}{2} - \frac{1}{4}(3)(3) + \frac{5M_A}{2} + \frac{5M_B}{2} = 0$$

Como $EIt_{B/A} = 0$:

$$\frac{(5R_1)(5)}{2}\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{4}(3)(3)\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{2}M_A\left(\frac{2}{3}.5\right) + \frac{5}{2}M_B\left(\frac{5}{3}\right) = 0$$

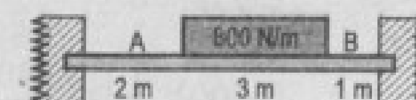
Resolviendo:

$$M_A + M_B = -2{,}1 \text{ kN.m}$$

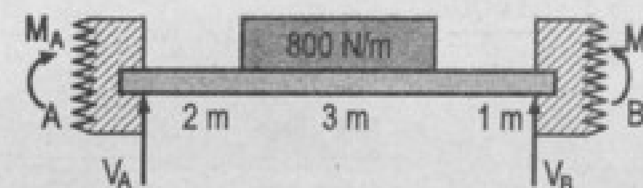
$$M_A + \frac{M_B}{2} = -1{,}338 \text{ kN.m}$$

Donde: $\boxed{M_A = -0{,}576 \text{ kN.m}}$; $\boxed{M_B = -1{,}524 \text{ kN.m}}$

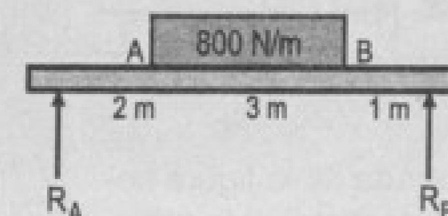
744. Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura.



Resolución:
Por el método de la viga conjugada:



Los sistemas isostáticos:



$$\Sigma M_B = 0 = 6R_A - (2400)(2{,}5) \Rightarrow R_A = 1000 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0 = 6R_B - (2400)(3{,}5) \Rightarrow R_B = 1400 \text{ N}$$

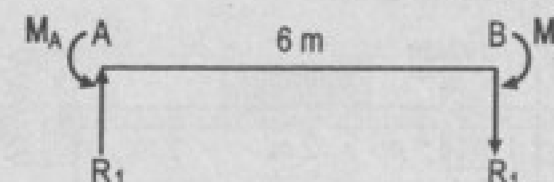
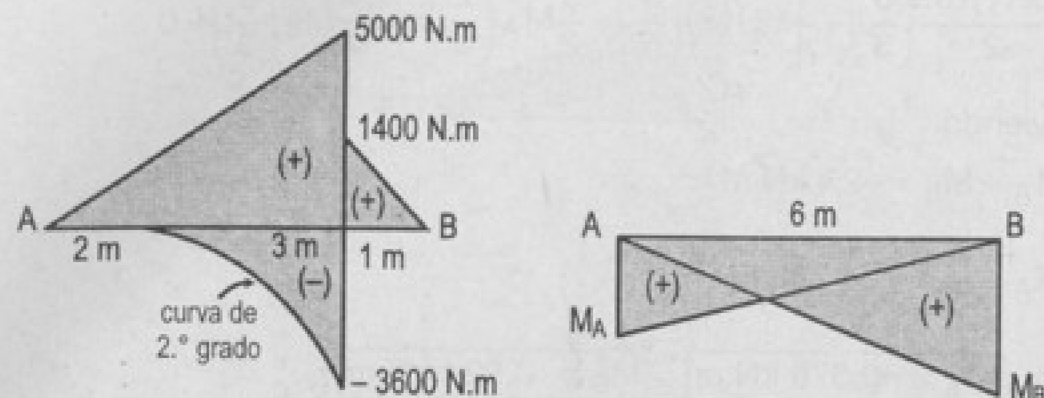


Diagrama de momentos por partes:



$EI\theta_{AB}=0$:

$$(5000)\left(\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1400}{2}\right)(1)-\frac{1}{3}(3)(3600)+\frac{6M_A}{2}+\frac{6M_B}{2}=0 \qquad ...(1)$$

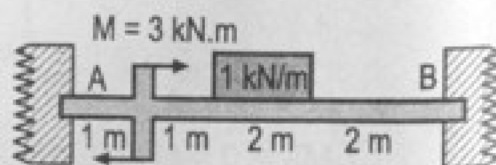
$EIt_{B/A}=0$:

$$(5000)\left(\frac{5}{2}\right)\left(1+\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{1400}{2}\right)(1)\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}(3)(3600)\left(1+\frac{3}{4}\right)$$

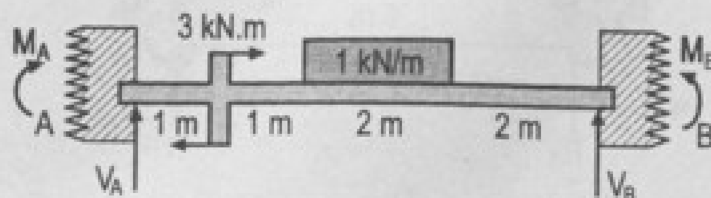
$$+\frac{6M_A}{2}\left(\frac{2}{3}.6\right)+\frac{6M_B}{2}\left(\frac{6}{3}\right)=0 \qquad ...(2)$$

Resolviendo: $\boxed{M_A=-\frac{4150}{3}\ \text{N.m}}$; $\boxed{M_B=-\frac{5450}{3}\ \text{N.m}}$

745. La viga doblemente empotrada de la figura soporta la carga uniformemente distribuida sobre parte de su claro, además del par indicado. Determinar los momentos de empotramiento.

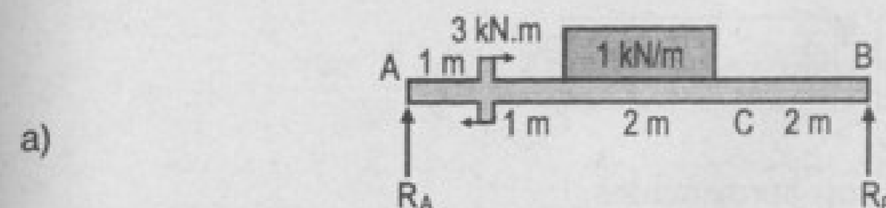


Resolución:
Por el método de la viga conjugada:



Los sistemas isostáticos son:

a)



$$\Sigma F_y=0=R_A+R_B-2$$

$$\Sigma M_B=0=6R_A+3-2(3)\Rightarrow R_A=\frac{1}{2}\ \text{kN} \ \text{ y } \ R_B=\frac{3}{2}\ \text{kN}$$

b)

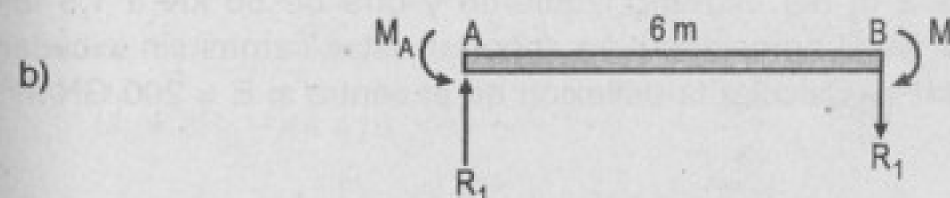
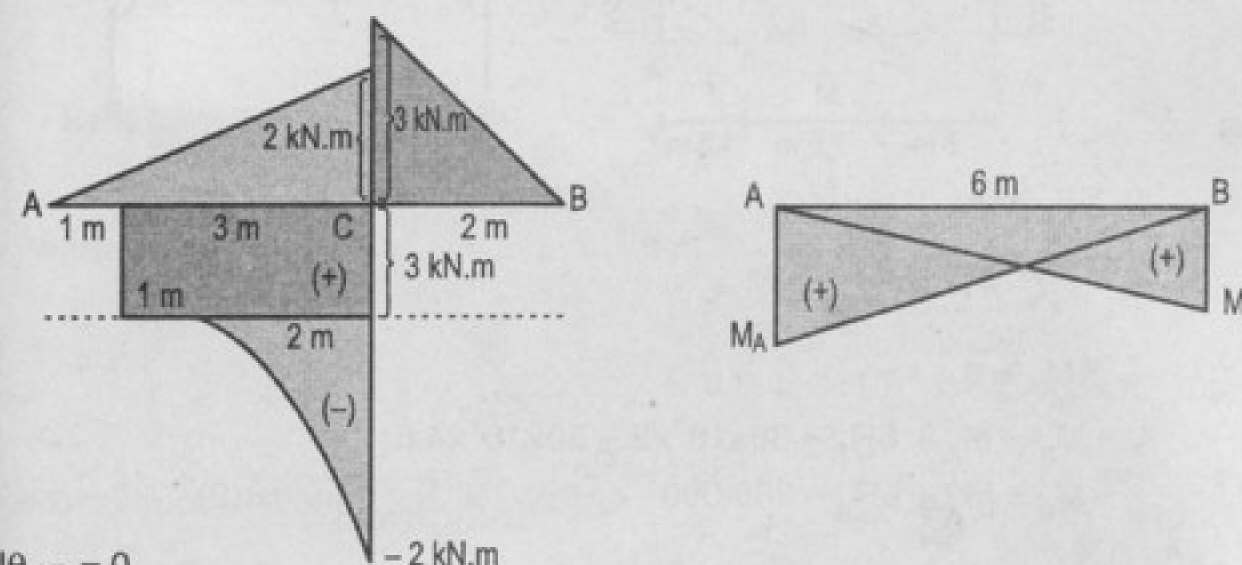


Diagrama de momentos por partes:



$EI\theta_{AB}=0$

$$\frac{(2)(4)}{2}+\frac{(3)(2)}{2}+(3)(3)-\frac{1}{3}(2)(2)+\frac{6M_A}{2}+\frac{6M_B}{2}=0$$

$EIt_{B/A}=0$

$$\frac{(2)(4)}{2}\left(2+\frac{4}{3}\right)+\frac{(3)(2)}{2}\left(\frac{2}{3}.2\right)+(3)(3)\left(2+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}(2)(2)\left(2+\frac{2}{4}\right)$$

$$+\frac{6\,M_A}{2}\left(\frac{2}{3}.6\right)+\frac{6\,M_B}{2}\left(\frac{1}{3}.6\right)=0$$

Resolviendo:

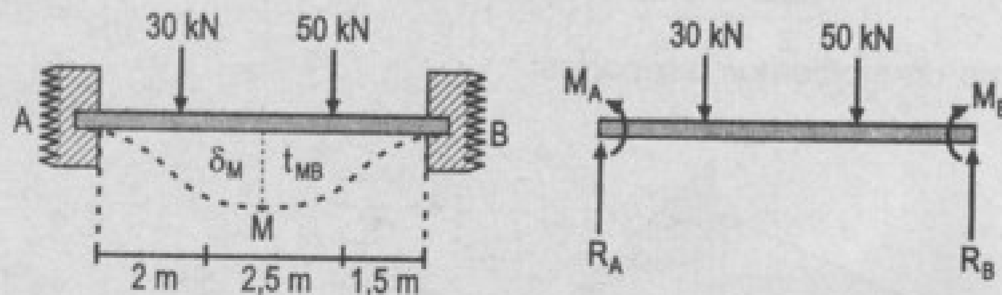
$$\boxed{M_A = -\frac{97}{36}\ \text{kN.m}}\ ;\ \boxed{M_B = -\frac{79}{36}\ \text{kN.m}}$$

Los valores del texto son aproximados.

746, 747: problemas ilustrativos.

748. Una viga doblemente empotrada de 6 m de longitud soporta una carga concentrada de 30 kN a 2 m del extremo izquierdo y otra de 50 kN a 1,5 m del derecho. Elegir un perfil apropiado para soportar estas cargas sin exceder un esfuerzo de 120 MPa. Calcular la deflexión en el centro si E = 200 GN/m².

Resolución:



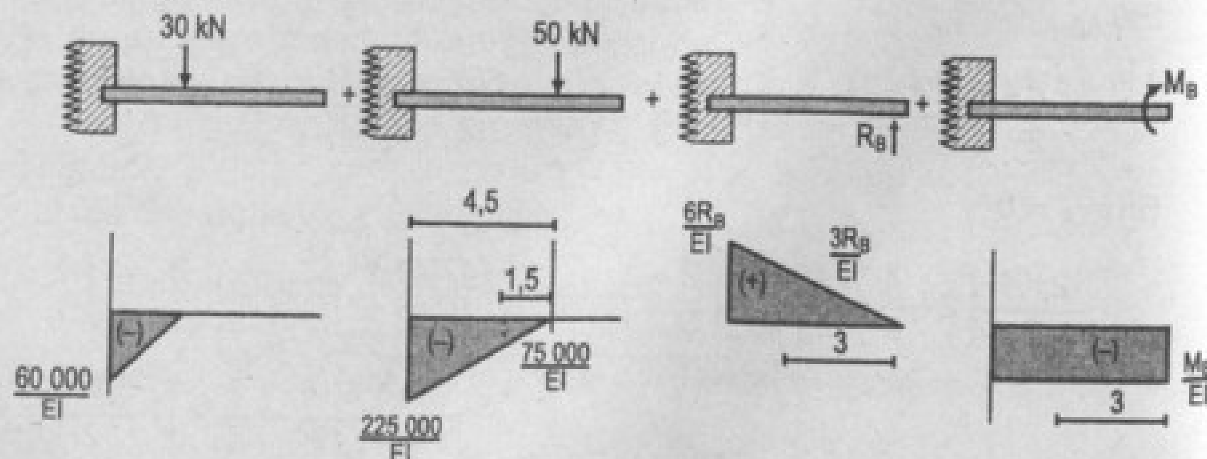
$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B = 80\,000 \qquad \text{...(1)}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_B = M_A + 6R_B - 30\times10^3\times2 - 50\times10^3\times4{,}5$$

$$M_B = M_A + 6R_B - 285\,000 \qquad \text{...(2)}$$



$$\theta_{AB} = 0 = -\frac{60\times10^3\times2}{2} - \frac{229\times10^3\times4{,}5}{2} + \frac{6R_B\times6}{2} - M_B\times6$$

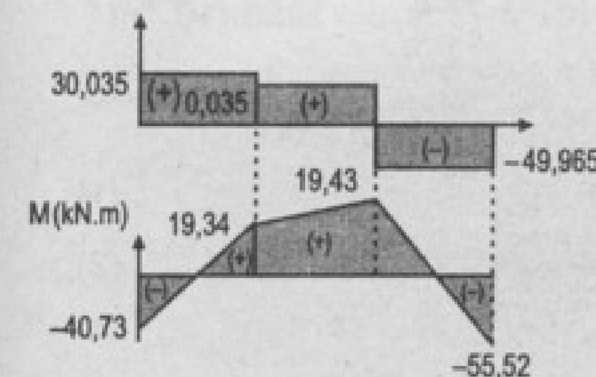
$$\Rightarrow\ M_B = 3R_B - 94\,375 \qquad \text{...(3)}$$

$$t_{AB} = 0 = -\frac{60\times10^3\times2}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times2\right) - \frac{225\times10^3\times4{,}5}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times4{,}5\right) + \frac{6R_B\times6}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times6\right) - M_B\times6\times(3) \qquad \text{...(4)}$$

$$M_B = 2R_B - 44\,410$$

De (3) y (4): R_B = 49, 965 kN ; M_B = 55, 520 kN.m

De (1) y (2): R_A = 30,035 kN ; M_A = 40,73 kN.m



$$M_{máx} = 55{,}52\ \text{kN.m}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{S}$$

$$S = \frac{M_{máx}}{\sigma_{máx}} = \frac{55{,}52\times10^3}{120\times10^6}$$

$$S = 0{,}463\times10^{-3}\ m^3 = 463\times10^3\ mm^3$$

Seleccionamos: $\boxed{W360\times33}$

$$S = 474\times10^3\ mm^3;\quad I = 82{,}7\times10^6\ mm^4\left(\frac{1\ m}{10^3\ mm}\right)^4$$

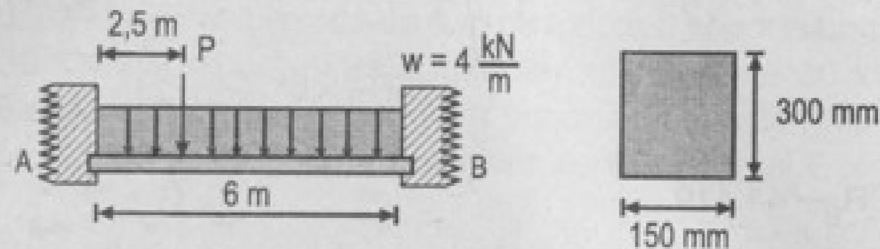
$$EI = 200\times10^9\ \frac{N}{m^2}\times 82{,}7\times10^{-6}\ m^4 = 16{,}54\times10^6\ N.m^2$$

$$EIt_{MB} = \frac{-75\times10^3\times1{,}5}{2}(0{,}5) + \frac{3\times(49{,}965\times10^3)\times3}{2}(1) - 55{,}52\times10^3\times3(1{,}5)$$

$$t_{MB} = -3{,}2\times10^{-3}\ m = -3{,}2\ mm \quad \therefore\ \boxed{|t_{MB}| = \delta_M = 3{,}2\ mm}$$

749. Una viga de madera de 150 mm de ancho por 300 mm de altura y 6 m de longitud está perfectamente empotrada en sus extremos. Soporta una carga uniforme de 4 kN/m sobre todo su claro y una carga concentrada P a 2,5 m del extremo izquierdo. Calcular P si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m² y la deflexión en el centro no debe sobrepasar 1/360 del claro. E=10 GN/m².

Resolución:



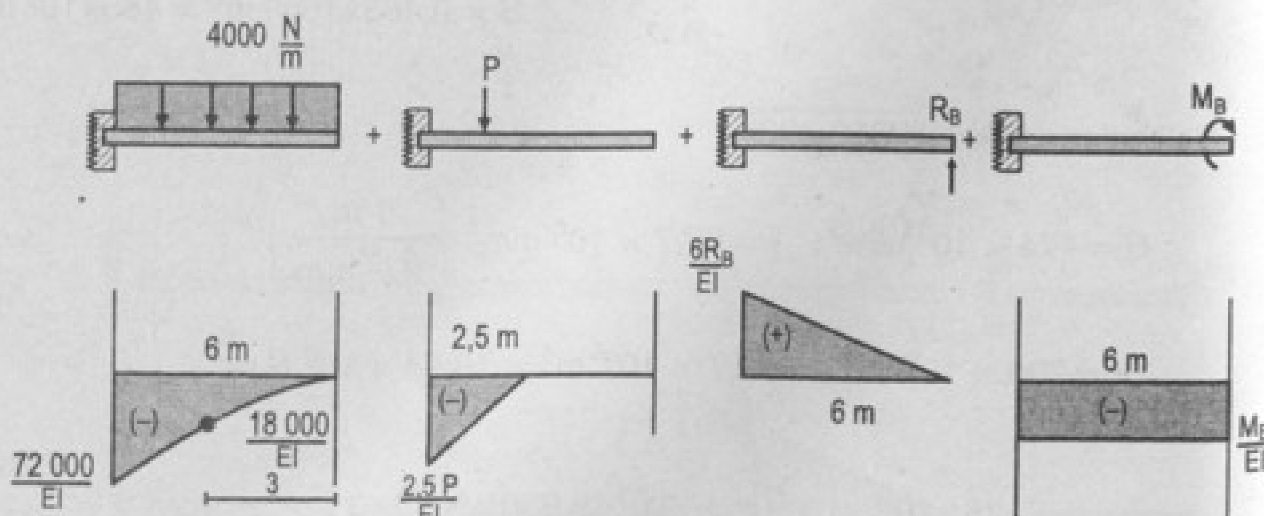
$$\sigma_{adm.} = 10\ \frac{MN}{m^2} \quad ; \quad \delta_{M máx} = \frac{6}{360} \times 1000\ mm = 16,7\ mm \quad ; \quad E = 10\ \frac{GN}{m^2}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12}(0,15)(0,3)^3 = 337,5\times10^{-6}m^4; \ S_{XA} = 2250\times10^{-6}m^3$$

Equilibrio:

$\Sigma F_y = 0: R_A + R_B = 24\ 000 + P$ ...(1)

$\Sigma M_A = 0: M_A - M_B + R_B\times6 - P\times2,5 - 72\ 000 = 0$ ...(2)



$$EI\theta_{AB} = 0 = -\frac{6\times72\ 000}{3} - \frac{2,5\times2,5\ P}{2} + \frac{6\times6R_B}{2} - 6M_B$$

$M_B = 3R_B - 24\ 000 - 0,5208P$ ...(3)

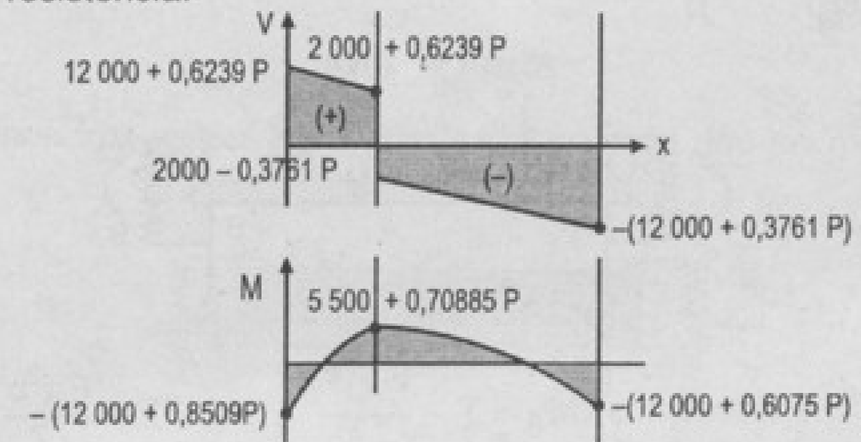
$$EIt_{AB} = 0 = -\frac{6\times72\ 000}{3}\times\left(\frac{6}{4}\right) - \frac{2,5\times2,5P}{2}\times\left(\frac{2,5}{3}\right) + \frac{6\times6R_B}{2}\times(2) - 6M_B\times(3)$$

$M_B = 2R_B - 12\ 000 - 0,1447P$ ...(4)

$\Rightarrow R_B = 12\ 000 + 0,3761P \qquad M_B = 12\ 000 + 0,6075P$

$R_A = 12\ 000 + 0,6239P \qquad M_A = 12\ 000 + 0,8509P$

Cálculo por resistencia:



$M_{máx} = -(12\ 000 + 0,8509P)$

$$\sigma_{adm.} = \frac{M_{máx}}{S} \Rightarrow 10\times10^6 = \frac{1200 + 0,8509P}{2250\times10^{-6}} \quad \therefore \quad \boxed{P_{máx1} = 12,3\ kN}$$

Cálculo por rigidez:

$EI = 10\times10^9\times337,5\times10^{-6} = 3,375\times10^6\ N.m^2$

$-\delta_M = t_{MB} = -16,7\times10^{-3}\ m \Rightarrow EIt_{MB} = -\ 56,36\times10^3$

$$EIt_{MB} = -\ 56,36\times10^3 = -\frac{18\ 000\times3}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{3(12\ 000 + 0,3761P)\times3}{2}(1)$$
$$-3(12\ 000 + 0,6075P)\ (1,5)$$

$P_{máx2} = 468\ kN \quad \therefore \quad \boxed{P_{máx} = 12,3\ kN}$

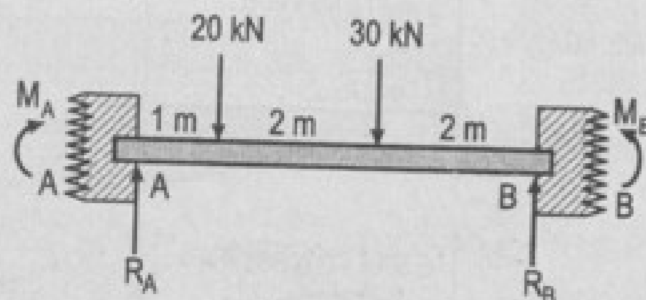
750. Una viga de acero W200×36 de 5 m de longitud y empotrada en sus extremos, soporta una carga concentrada de 20 kN a 1 m del extremo izquierdo y otra de 30 kN a 2 m del extremo derecho. Calcular el máximo esfuerzo normal y la deflexión en el centro. Despreciar el peso propio de la viga y emplear E = 200 GPa.

Resolución:

Para el perfil W200×36:

$I_x = 34{,}4 \times 10^6\ mm^4$; $S_{xx} = 342 \times 10^3\ mm^3$

Del sistema:



Por la tabla 7-2 tenemos: $M_A = \Sigma - \dfrac{Pab^2}{L^2} \ \wedge\ M_B = \Sigma - \dfrac{Pa^2b}{L^2}$

$$\text{donde } M_A = \left(\frac{-20(1)(4)^2}{5^2} - \frac{30(3)(2)^2}{5^2}\right) kN.m \ \Rightarrow\ M_A = -27{,}2\ kN.m$$

$$\text{También } M_B = \left(\frac{-20(1)^2(4)}{5^2} - \frac{30(3)^2(2)}{5^2}\right) kN.m \ \Rightarrow\ M_B = -24{,}8\ kN.m$$

Así el momento flexionante máximo es: $M_{máx} = 27{,}2\ kN.m$

Para el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{S}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{27{,}2\ kN.m}{342 \times 10^3 mm^3} \ \Rightarrow\ \boxed{\sigma_{máx} = 79{,}53\ GPa}$$

Para el centro del claro, de la tabla 7-2:

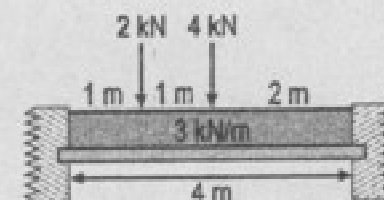
$$EIy = \Sigma \frac{Pb^2}{48}(3L - 4b)$$

$$EIy = \frac{20(1)^2\left[3(5) - 4(1)\right]}{48} + \frac{30(2)^2\left[3(5) - 4(2)\right]}{48}$$

$$(200\ GPa)(34{,}4 \times 10^6\ mm^4)\ y = \frac{1060}{48}\ kN.m^3$$

Operando $\boxed{y = 3{,}2\ mm}$

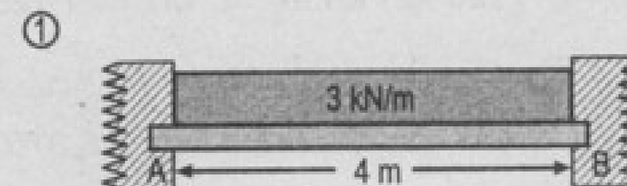
751. Una viga de madera de sección rectangular soporta las cargas indicadas en la figura. Determinar la sección necesaria si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m². Calcular el valor del esfuerzo cortante máximo.



Resolución:

El sistema tiene tres cargas superpuestas, y en cada uno los momentos son:

①

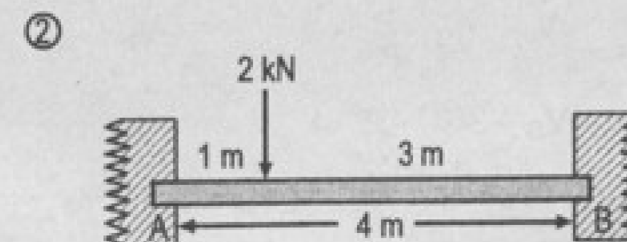


Por el **caso 3:**

$$M_{A_1} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-3(4)^2}{12}\ kN.m = -4\ kN.m$$

$$M_{B_1} = \frac{-wL^2}{12} = -4\ kN.m$$

②

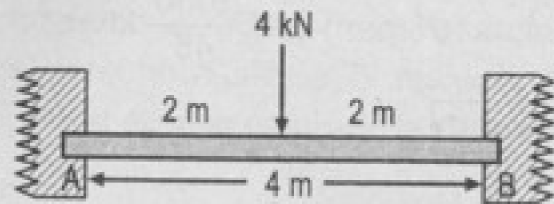


Por el **caso 1:** P = 2 kN; a = 1 m; b = 3 m

$$\text{Así: } M_{A_2} = \frac{-Pab^2}{L^2} = \frac{-2(1)(3)^2}{4^2} = -1{,}125\ kN.m$$

$$M_{B_2} = \frac{-Pa^2b}{L^2} = \frac{-2(1)^2(3)}{4^2} = -0{,}375\ kN.m$$

③



Por el **caso 2:** P = 4 kN; a = b = 2 m; L = 4 m

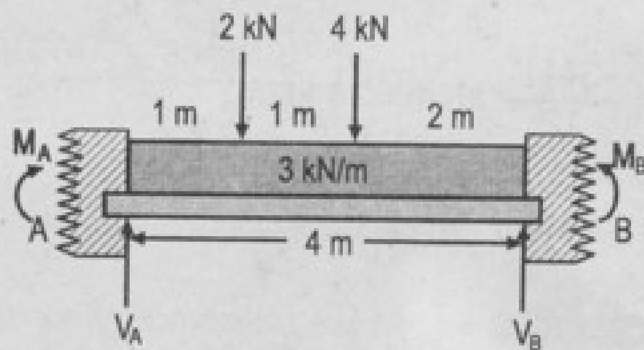
Así: $M_{A_3} = M_{B_3} = \frac{-PL}{8} = \frac{-(4)(4)}{8} = -2$ kN.m

Sumando para el total de la superposición:

$$M_A = \sum_1^3 M_{Ai} = (-4 - 1{,}125 - 2) \text{ kN.m} \Rightarrow M_A = -7{,}125 \text{ kN.m}$$

$$M_B = \sum_1^3 M_{Bi} = (-4 - 0{,}375 - 2) \text{ kN.m} \Rightarrow M_B = -6{,}375 \text{ kN.m}$$

Del diagrama de cuerpo libre del sistema:



Donde: $\Sigma F_y = 0 = V_A + V_B - 3(4) - 2 - 4$ ...(α)

$\Sigma M_A = 0 = M_B + 4V_B - 3(4)(2) - 2(1) - 4(2) - M_A$ ...(β)

Resolviendo (α) y (β):

$V_A = 9{,}6875$ kN ; $V_B = 8{,}3125$ kN

Donde la fuerza cortante máxima es: $V_{máx} = V_A = 9{,}6875$ k.N

Como: $\sigma_{adm} = \frac{V_{máx}}{A}$; así: $A = \frac{9{,}6875 \text{ kN}}{10 \text{ MN/m}^2}$ ∴ $\boxed{A = 968{,}75 \text{ mm}^2}$

El esfuerzo cortante máximo para una viga de sección rectangular es:

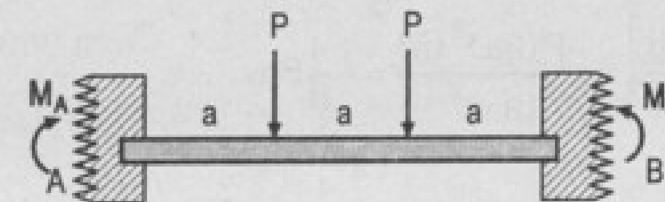
$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A}$$

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{9{,}6875 \text{ kN}}{968{,}75 \text{ mm}^2} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 15 \text{ MN/m}^2}$$

752. Con los datos de la tabla 7-2 comprobar los valores de los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro de la viga del problema 713.

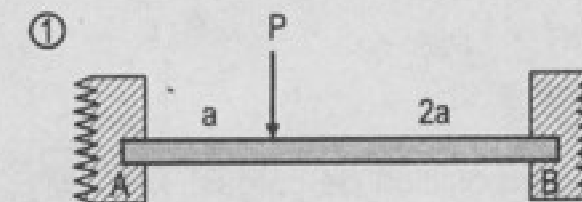
Resolución:

Del sistema:



Son dos cargas superpuestas:

①



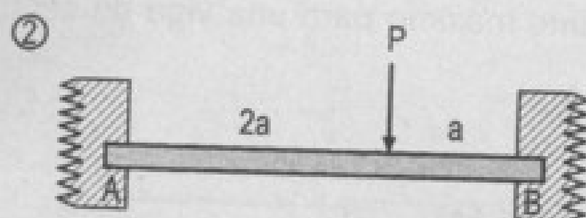
Por el **caso 1:**

$$M_{A_1} = \left[\frac{-Pab^2}{L^2}\right] = \frac{-Pa(2a)^2}{(3a)^2} = -\frac{4}{9}Pa \quad ...(\alpha_1)$$

$$M_{B_1} = \left[\frac{-Pa^2b}{L^2}\right] = \frac{-Pa^2(2a)}{(3a)^2} = \frac{-2Pa}{9} \quad ...(\beta_1)$$

(midiendo desde B)

$$EI_{y(centro)} = \left[\frac{Pb^2}{48}(3L - 4b)\right] = \frac{Pa^2}{48}(9a - 4a) \quad ...(\gamma_1)$$



Por el **caso 1:**

$$M_{A_2}=\left[\frac{-Pab^2}{L^2}\right]=\frac{-P(2a)(a)^2}{(3a)^2}=-\frac{2}{9}Pa \quad ...(\alpha_2)$$

$$M_{B_2}=\left[\frac{-Pa^2b}{L^2}\right]=\frac{-P(2a)^2(a)}{(3a)^2}=-\frac{4}{9}Pa \quad ...(\beta_2)$$

$$EI_{y(centro)}=\left[\frac{Pb^2}{48}(3L-4b)\right]=\frac{P(a)^2(9a-4a)}{48}$$

$$EI_{y(centro)}=\frac{5}{48}Pa^3 \quad ...(\gamma_2)$$

Sumando por la superposición de cargas: $M_A=M_{A_1}+M_{A_2}=-\frac{4}{9}Pa-\frac{2}{9}Pa$

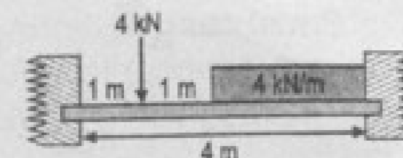
Luego: $\boxed{M_A=-\frac{2}{3}Pa}$

También: $M_B=M_{B_1}+M_{B_2}=-\frac{2}{9}Pa-\frac{4}{9}Pa$

Luego: $\boxed{M_B=-\frac{2}{3}Pa}$

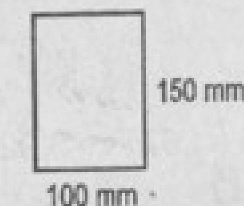
Sumando $(\gamma_1)+(\gamma_2)$: $EI_{y(centro)}=\frac{5Pa^3}{48}+\frac{5Pa^3}{48}=\frac{5}{24}Pa^3$

753. Una viga de madera de 100 mm de ancho por 150 mm de altura soporta las cargas de la figura. Calcular el esfuerzo cortante máximo.



Resolución:

Como la sección de la viga es:



Donde: $I=\left[\frac{bh^3}{12}\right]=\frac{(100)(150)^3}{12}\ mm^4$

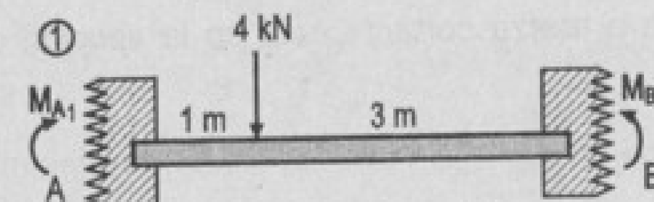
Así: $I = 28\ 125\ 000\ mm^4$ ...(α)

También:

$A=[b.h]=(100)(150)\ mm^2$

$A=15\ 000\ mm^2$ ...(β)

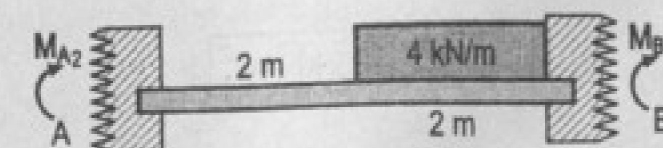
Del sistema, tiene dos cargas superpuestas:



Por el **caso 1:**

$$M_{A_1}=\left[-\frac{Pab^2}{L^2}\right]=\frac{-4(1)(3)^2}{(4)^2}=-2,25\ kN.m$$

$$M_{B_1}=\left[-\frac{Pa^2b}{L_2}\right]=\frac{-4(1)^2(3)}{4^2}=-0,75\ kN.m$$



Por el **caso 4:**

$$M_{A_2}=\left[-\frac{5}{192}wL^2\right]=\frac{-5}{192}(4)(4)^2=-1{,}67\text{ kN.m}$$

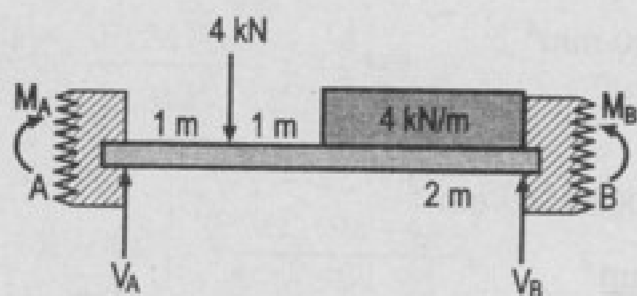
$$M_{B_2}=\left[-\frac{11}{192}wL^2\right]=\frac{-11}{192}(4)(4)^2=-3{,}67\text{ kN.m}$$

Sumando por la superposición:

$$M_A=M_{A_1}+M_{A_2}=(-2{,}25-1{,}67)=-3{,}92\text{ kN.m}$$

$$M_B=M_{B_1}+M_{B_2}=(-0{,}75-3{,}67)=-4{,}42\text{ kN.m}$$

Del sistema:



La mayor reacción o fuerza cortante está en la sección de mayor momento; así: $V_B=V_{máx}$

Tomando momentos en A:

$$\Sigma M_A=0=M_B+4V_B-4(1)-8(3)-M_A \quad \text{...(1)}$$

Resolviendo:

$$V_B=\frac{1}{4}(4+24+M_A-M_B)$$

$$V_B=V_{máx}=7{,}125\text{ kN} \quad \text{...(2)}$$

Para una sección rectangular, el esfuerzo cortante máximo es:

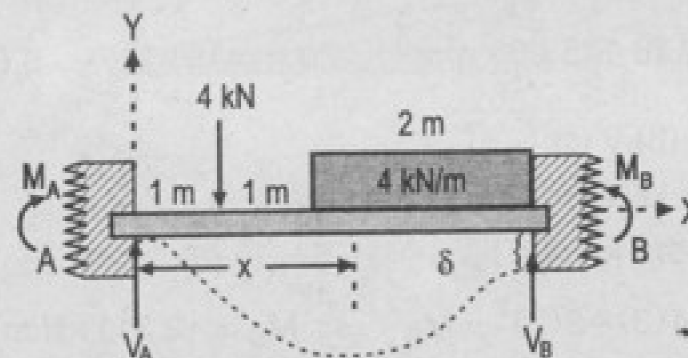
$$\tau_{máx}=\frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A}$$

Así: $\tau_{máx}=\frac{3}{2}\frac{7{,}125}{15\,000} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx}=712{,}5\text{ kN/m}^2}$

754. En el problema anterior, calcular el esfuerzo normal máximo si el empotramiento derecho sufre un asentamiento de 20 mm con respecto al extremo izquierdo, pero sin rotación alguna. E = 10 × 19⁹ N/m².

Resolución:

Al sufrir un asentamiento, obviamente los momentos varían, así:



Por el método de la doble integración:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+V_Ax-4\langle x-1\rangle-2\langle x-2\rangle^2 \quad \text{...(1)}$$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_Ax+V_A\frac{x^2}{2}-2\langle x-1\rangle^2-\frac{2}{3}\langle x-2\rangle^3+C_1 \quad \text{...(2)}$$

$$EIy=M_A\frac{x^2}{2}+V_A\frac{x^3}{6}-\frac{2}{3}\langle x-1\rangle^3-\frac{1}{6}\langle x-2\rangle^4+C_1x+C_2 \quad \text{...(3)}$$

Por el empotramiento perfecto: (en (2))

Si $x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$; luego $C_1=0$

$x=4 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$

Así: $4M_A+8V_A-2(3)^2-\frac{2}{3}(2)^3=0 \quad \text{...}(\alpha)$

Por el desplazamiento vertical (en (3)):

Si $x=0 \Rightarrow y=0$; luego $C_2=0$

Si $x=4 \Rightarrow y=-20$ mm (dato del problema)

Se toma el negativo porque está debajo de la línea de referencia.

$$EIy=8M_A+\frac{32}{3}V_A-\frac{2}{3}(3)^3-\frac{1}{6}(2)^4 \quad \text{...}(\beta)$$

Del problema anterior:

$$I = 28\ 125\ 000\ mm^4$$

Además: $E = 10\times10^9\ N/m^2$ (dato)

Así:

$$Ely = \left(10^{10}\ \frac{N}{m^2}\right)(28\ 125\ 000\ mm^4)(-20\ mm) \Rightarrow Ely = -5{,}625\ kN.m^2 \ldots(\gamma)$$

Resolviendo (α), (β) y (γ):

$$M_A = -6{,}024\ kN.m \quad ; \quad V_A = -5{,}928\ N.m$$

Llevando a (1): para x = 4

$$M_A + 4V_A - 4(3) - 2(2)^2 = M_B \quad \Rightarrow \quad M_B = -2{,}311\ kN.m$$

Como $\Sigma F_y = 0$, así:

$$V_A + V_B - 4 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 6{,}072\ kN$$

Por lo tanto: $V_B = V_{máx} = 6{,}072\ kN$

Pero el esfuerzo normal máximo viene expresado por:

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I};\ \text{donde}\ c = \frac{h}{2} = \frac{150}{2}\ mm$$

Reemplazando: $\sigma_{máx} = \dfrac{(6{,}024\ kN.m)(75\ mm)}{(28\ 125\ 000\ mm^4)}$

Simplificando: $\boxed{\sigma_{máx} = 16{,}064\ MN/m^2}$

755. Una viga de acero, S120 x 22, la cual tiene 4 m de longitud, soporta una carga uniformemente variable desde cero, en el extremo izquierdo, hasta 15 kN/m en el derecho. La viga está perfectamente empotrada, pero el extremo derecho se asienta 10 mm respecto del izquierdo. Calcular la relación entre los esfuerzos máximos de flexión en esta situación con respecto a aquella en que los empotramientos estuvieron al mismo nivel. Utilice E = 200 GPa.

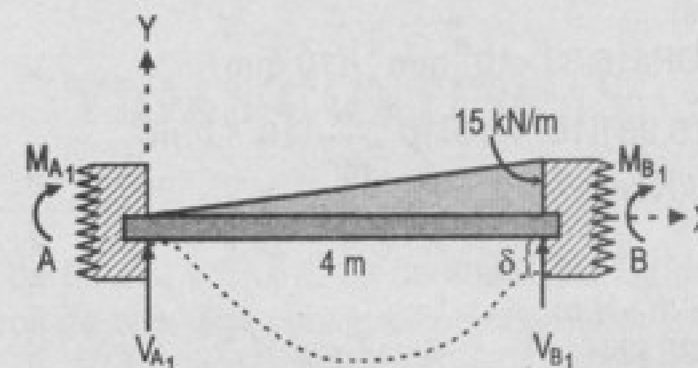
Resolución:

La viga de acero, S130×22, según tablas tiene:

$$I = 6{,}33\times10^6\ mm^4 \quad ; \quad A = 2790\ mm^2 \quad ; \quad E = 200\ GPa$$

Hay dos situaciones:

1.ª Cuando hay un asentamiento en el extremo derecho de 10 mm.



Por el método de la doble integración, el momento flector es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_{A_1} + V_{A_1}x - \frac{5}{8}x^3 \qquad \ldots(1)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = M_{A_1}x + V_{A_1}\frac{x^2}{2} - \frac{5}{32}x^4 + C_1 \qquad \ldots(2)$$

$$Ely = M_{A_1}\frac{x^2}{2} + V_{A_1}\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{32} + C_1x + C_2 \qquad \ldots(3)$$

Como los empotramientos son perfectos:

$\theta = 0$ para $x = 0$ y $x = 4$

$$\text{En (2): } C_1 = 0 \ \wedge\ 4M_{A_1} + 8V_{A_1} - \frac{5}{32}(4)^4 = 0 \qquad \ldots(\alpha)$$

Para los asentamientos, en (3):

$y = 0$ si $x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y = -\delta$ si $x = 4$, así:

$$8M_{A_1} + \frac{4^3}{6}V_{A_1} - \frac{4^5}{32} = -EI\delta \qquad \ldots(\beta)$$

Resolviendo (α) y (β):

$$M_{A_1} = -\left(8 + \frac{3}{8}EI\delta\right);\ V_{A_1} = \left(9 + \frac{3}{16}EI\delta\right)$$

En (1), para x = 4: $M_{A_1} + 4V_{A_1} - \frac{5}{8}(4)^3 = M_{B_1}$ o $M_{B_1} = -\left(12 - \frac{3}{8}EI\delta\right)$

Por $\Sigma F_y = 0 = V_{A_1} + V_{B_1} - 30$, así: $V_{B_1} = 21 - \frac{3}{16} EI\delta$

De los datos:

$EI\delta = (200)\text{GPa}(6{,}33 \times 10^6 \text{mm}^4)(10 \text{ mm})$

$EI\delta = (200)(6{,}33)(10^6)(10)10^9 \frac{N}{m^2}(10^{-3})^5 m^5$

$EI\delta = 12{,}66 \text{ kN.m}^3$

Así: $M_{A_1} = -12{,}7475$ kN.m ...(ψ)

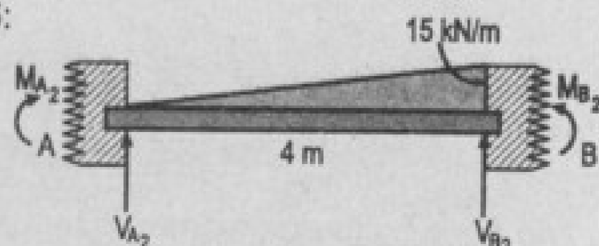
$M_{B_1} = -7{,}2525$ kN.m

$V_{A_1} = 11{,}3738$ kN

$V_{B_1} = 18{,}6262$ kN

2.ª Cuando no hay asentamiento y el empotramiento es perfecto.

Por el **caso 5**:



$$M_{A_2} = \frac{-wL}{30} = \frac{-15(4)^2}{(30)} = -8 \text{ kN.m}$$

$$M_{B_2} = \frac{-wL^2}{20} = \frac{-15(4)^2}{(20)} = -12 \text{ kN.m} \quad ...(\theta)$$

Observamos que cuando hay asentamiento en un lado, el momento del lado contrario aumenta en valor absoluto y el momento del asentamiento, en valor absoluto, disminuye.

Para los esfuerzos máximos:

$$\sigma_{máx_1} = \frac{M_{A_1}}{S} \quad ...(a)$$

$$\sigma_{máx_2} = \frac{M_{B_2}}{S} \quad ...(b)$$

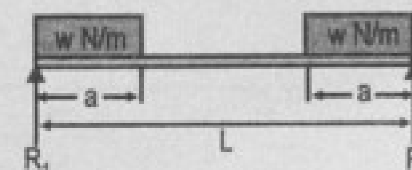
Dividiendo (a)/(b): $\frac{\sigma_{máx_1}}{\sigma_{máx_2}} = \frac{M_{A_1}}{M_{B_2}} = \frac{12{,}7475}{12} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_{máx_1}}{\sigma_{máx_2}} = 1{,}062}$

CAPÍTULO 8

VIGAS CONTINUAS

Calcular los valores de $6A\bar{a}/L$ y $6A\bar{b}/L$ en cada uno de los problemas 801 a 810 que representan claros de una viga continua con diferentes condiciones de carga.

801. Véase la figura. Confrontar el resultado obtenido poniendo a = L/2 y compararlo con el caso 2 de la tabla 8-1.



Resolución:

Primero hallamos R_1 y R_2 por las ecuaciones de la estática:

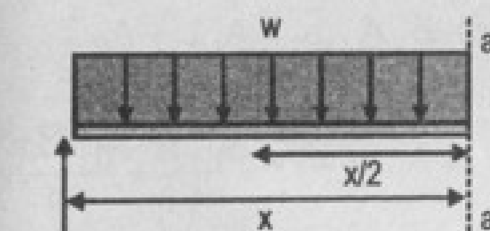
$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 2wa \quad ...(1)$$

Por la simetría del conjunto:

$$R_1 = R_2 \quad ...(2)$$

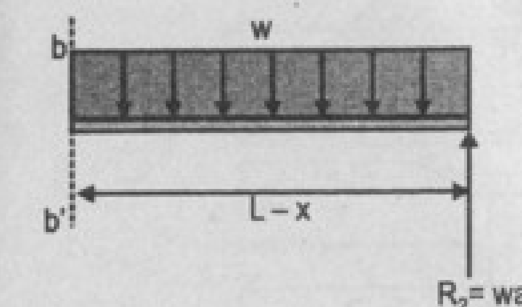
Resolviendo: $R_1 = wa \wedge R_2 = wa$

Hallando los momentos flexionantes respecto a la variable genérica x:



Así:

$M_{aa'} = wax - wx\left(\frac{x}{2}\right)$; si $x \in \langle 0;a \rangle$

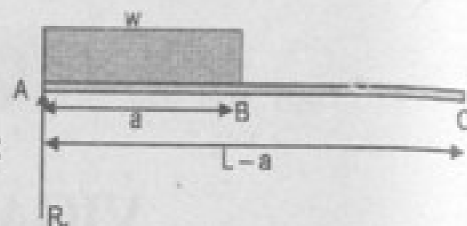


Así:

$M_{bb'} = wa(L - x) - \frac{w}{2}(L - x)^2$;

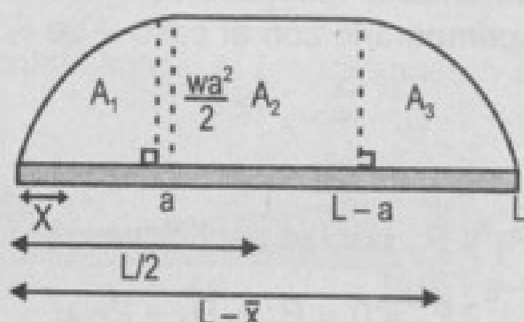
$x \in \langle L - a; L \rangle$

En el tramo $\langle a; L-a\rangle$ el momento es constante:



$$\Sigma M_A = 0 = M_B - wa\left(\frac{a}{2}\right),\ \text{así: } M_B = \frac{wa^2}{2}$$ que es la misma para todo el tramo $\langle a; L-a\rangle$

Graficando el área de momentos:



Por la simetría de las gráficas:

$A_1 = A_3$; luego: $\quad A_1 = \int_0^a \left(wax - w\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{wa^3}{3}$; $A_2 = \frac{wa^2}{2}(L-2a)$

Hallando la relación: $A\,.\,\bar{x}$ para todo el conjunto:

$$A\,.\,\bar{a} = A_1\bar{x} + A_2\left(\frac{L}{2}\right) + A_3(L-\bar{x}) \Rightarrow A\,.\,\bar{a} = A_1.L + A_2.\frac{L}{2}$$

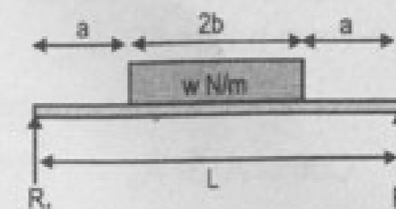
$$A\,.\,\bar{a} = \frac{wa^3}{3}L + \frac{wa^2}{2}(L-2a)\frac{L}{2} \quad \Rightarrow A\,.\,\bar{a} = wa^2L\left(\frac{a}{3} + \frac{(L-2a)}{4}\right)$$

$$A\,.\,\bar{a} = \frac{wa^2L}{12}(3L-2a) \quad \therefore \quad \frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{wa^2}{2}(3L-2a)$$

Por la simetría del sistema: $\boxed{\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{wa^2}{2}(3L-2a)}$

Para $a = L/2$: $\boxed{\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4}}$

802. Véase figura. Para $b = L/2$, comparar con el resultado del caso 2 de la tabla 8-1.



Resolución

Por la simetría del sistema:

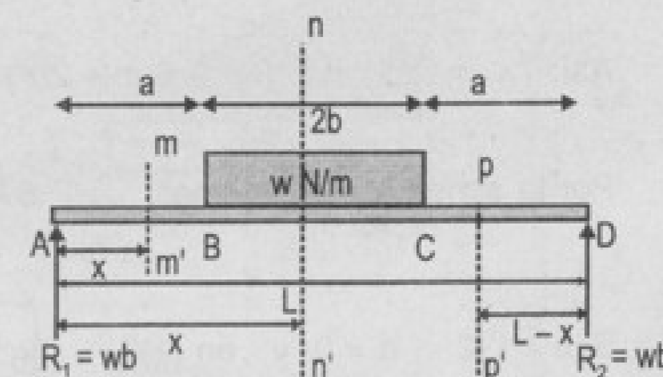
$$R_1 = R_2 \qquad ...(1)$$

Por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - w(2b) \qquad ...(2)$$

Resolviendo: $R_1 = R_2 = wb$

Hallando los momentos flectores en cada tramo:

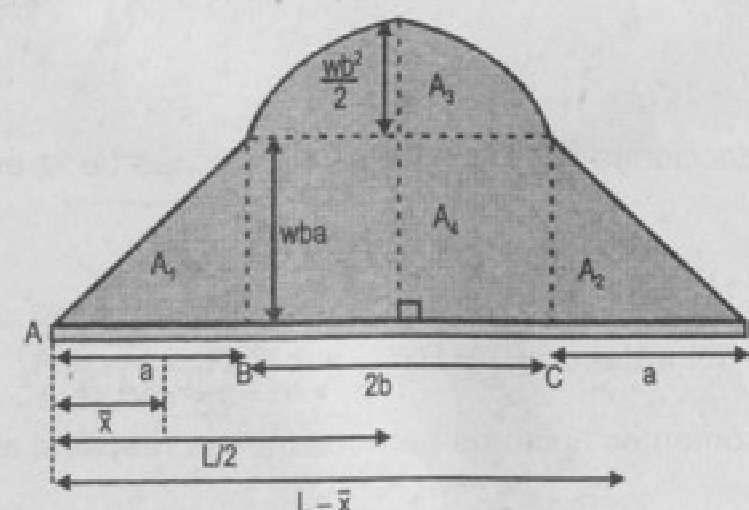


Tramo AB ; $x \in \langle 0;a\rangle$ $\quad M_{mm'} = wbx$

Tramo BC ; $x \in \langle a;L-a\rangle$ $\quad M_{nn'} = wbx - \frac{w}{2}(x-a)^2$

Tramo CD ; $x \in \langle L-a;L\rangle$ $\quad M_{pp'} = wb(L-x)$

Graficando las áreas de momentos:



Para hallar $A.\bar{a}$: $A.\bar{a} = A_1.\bar{x} + (A_3 + A_4).\frac{L}{2} + A_2(L - \bar{x})$

Como $A_1 = A_2$ $A_1 = \frac{wba^2}{2} = A_2$; $A_4 = 2wb^2a$; $A_3 = \frac{2}{3}wb^3$

Luego: $A.\bar{a} = A_1 L + (A_3 + A_4)\frac{L}{2}$

$$A.\bar{a} = \frac{wba^2}{2}L + \left(\frac{2}{3}wb^3 + 2wb^2a\right)\frac{L}{2} \Rightarrow A.\bar{a} = \frac{wLb}{6}(3a^2 + 6ab + 2b^2)$$

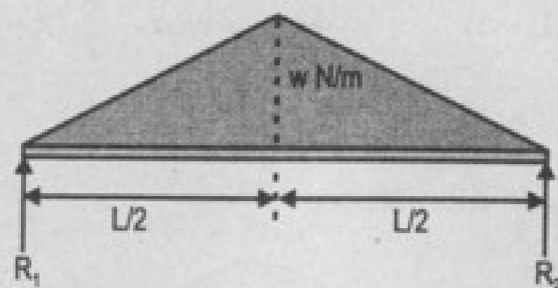
Así: $6\frac{A.\bar{a}}{L} = wb(3a^2 + 6ab + 2b^2)$ ... (1)'

Por la simetría del sistema: $6\frac{A.\bar{a}}{L} = 6\frac{A.\bar{b}}{L}$

Si $b = L/2$; $a = 0$ y en (1)': $\boxed{6\frac{A.\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4}}$

Idéntico al resultado del caso 2, página 256.

803. Véase la figura:



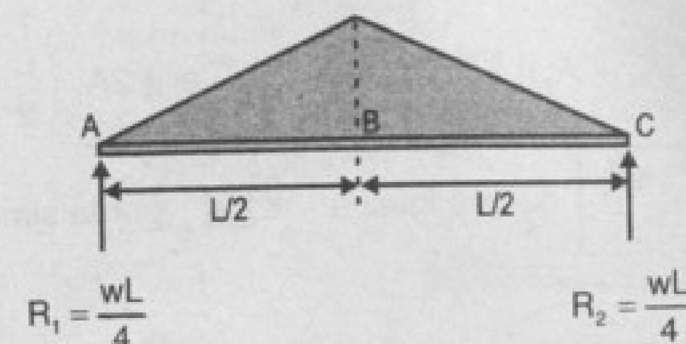
Resolución:

Hallando las reacciones R_1 y R_2 por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - \frac{wL}{2}$$

Por la simetría del sistema: $R_1 = R_2$, así: $R_1 = \frac{wL}{4} = R_2$

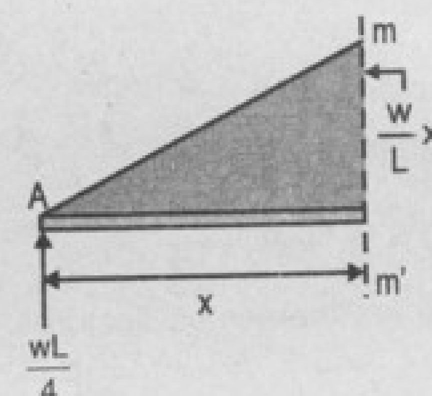
Hallando los momentos flectores para los tramos respecto a la variable genérica "x":



$R_1 = \frac{wL}{4}$ $R_2 = \frac{wL}{4}$

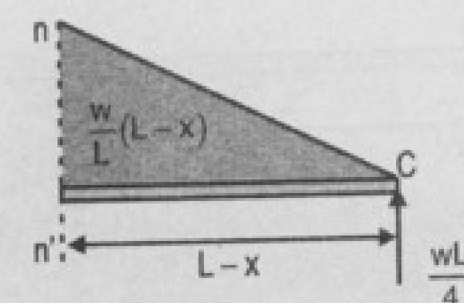
Tramo AB; $x \in \langle 0; L/2 \rangle$

$$M_{mm'} = \frac{wL}{4}x - \frac{w}{L}x^2\left(\frac{x}{3}\right)$$

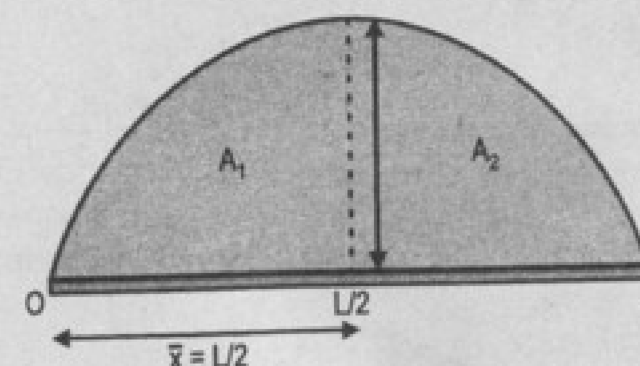


Tramo BC; $x \in \langle 0; L/2 \rangle$

$$M_{nn'} = \frac{wL}{4}x - \frac{w}{L}\frac{(L-x)^3}{3}$$



Graficando el área de momentos:



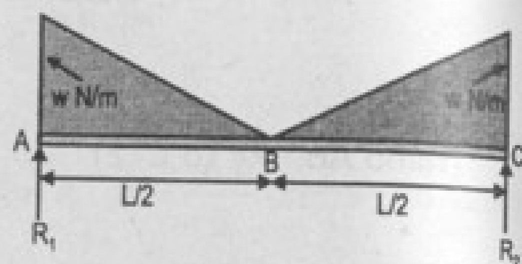
Por la simetría de la gráfica:

$$A_1 = A_2 = \int_0^{L/2}\left(\frac{wLx}{4} - \frac{wx^3}{3L}\right)dx \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{5wL^3}{192}$$

Así: $A.\bar{a} = (A_1 + A_2)\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A.\bar{a} = 2A_1\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A.\bar{a} = \frac{5w}{192}L^4$

Donde: $\boxed{\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{5w}{32}L^3}$ que es igual a $\frac{6}{L}A.\bar{b}$ por la simetría.

804. Véase figura. Comprobar el resultado mediante una superposición del caso 2 de la tabla 8-1 y del problema 803.

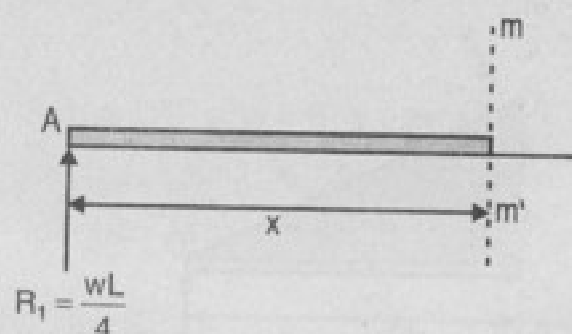


Resolución:

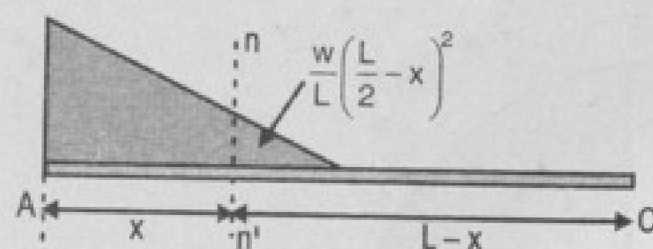
Por la simetría: $R_1 = R_2$

$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - \frac{wL}{2} \Rightarrow R_1 = R_2 = \frac{wL}{4}$

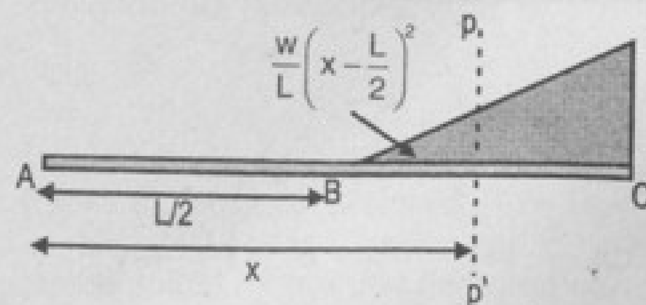
Hallando los momentos flectores:



Así: $M_{mm'} = \frac{wL}{4}x \ ; \ x \in \langle 0;L/2 \rangle$



$M_{nn'} = -\frac{w}{3L}\left(\frac{L}{2} - x\right)^3 ; \ x \in \langle 0;L/2 \rangle$

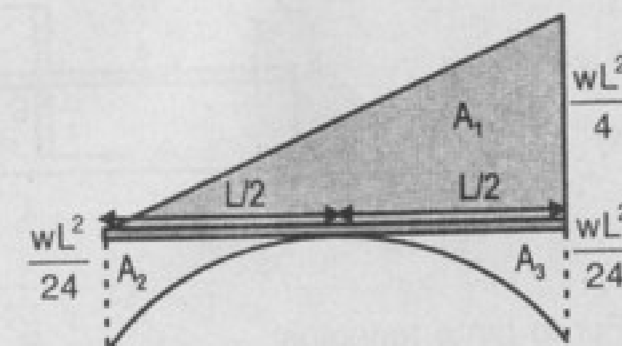


$M_{pp'} = -\frac{w}{3L}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 ; x \in \left\langle \frac{L}{2};L \right\rangle$

Hallando la gráfica de momentos:

$A_1 = \frac{wL^3}{8}$

$A_2 = A_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^3}{192}$



Los brazos de momentos son:

* Para A_1: $\bar{a}_1 = \frac{2}{3}(L)$
* Para A_2: $\bar{a}_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{10}$
* Para A_3: $\bar{a}_3 = \left(L - \frac{L}{10}\right) = \frac{9L}{10}$

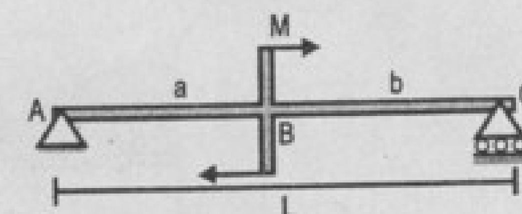
Así: $A.\bar{a} = \Sigma A_i\bar{a}_i = A_1\bar{a}_1 - A_2\bar{a}_2 - A_3\bar{a}_3$

Es decir: $A.\bar{a} = \frac{wL^3}{8}\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{wL^3}{192}\left(\frac{L}{10}\right) - \frac{wL^3}{192}\left(L - \frac{L}{10}\right)$

$A.\bar{a} = \frac{2}{24}wL^4 - \frac{wL^4}{192} = \frac{5}{64}wL^4$

Luego: $\boxed{6\frac{A\bar{a}}{L} = \frac{15}{32}wL^3}$

805. Veáse figura. El apoyo sobre rodillos puede soportar reacciones tanto hacia abajo como hacia arriba.

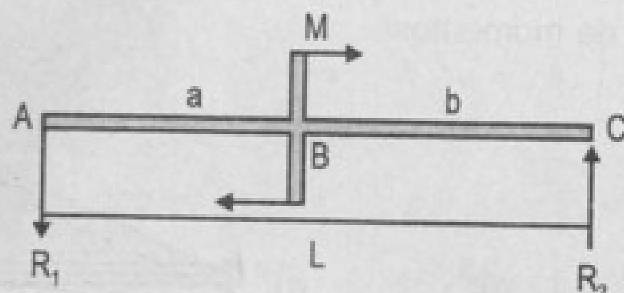


Resolución

Hallando las reacciones R_1 y R_2 de:

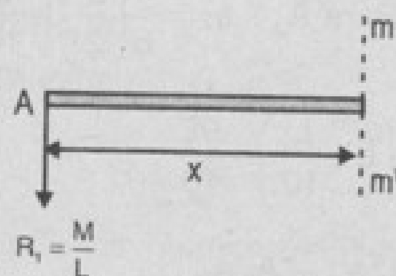
$\Sigma F_y = 0 = R_2 - R_1$

$\Sigma M_A = 0 = R_2(L) - M$



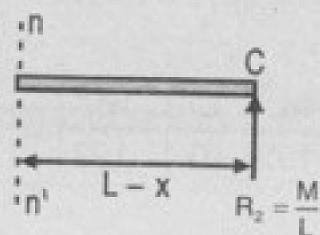
Por lo tanto tenemos: $R_1 = R_2 = \frac{M}{L}$ ...(1)

Hallando los momentos flectores:



Tramo AB ; $x \in \langle 0;a \rangle$

$$M_{mm'} = -\frac{M}{L}x \quad ...(2)$$

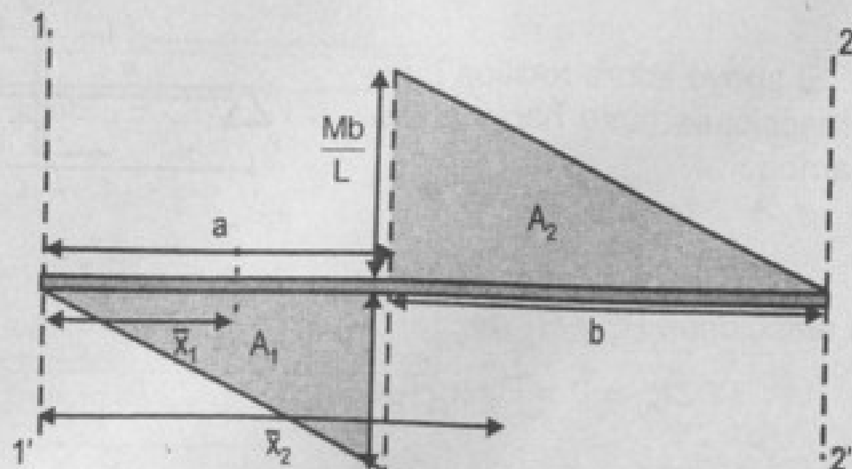


Tramo BC ; $x \in \langle a;L \rangle$

$$M_{nn'} = \frac{M}{L}(L - x) \quad ...(3)$$

Hemos tomado el brazo de momentos respecto al punto C para facilitar los cálculos.

Graficando el área de momentos:



Como: $A_1 = \frac{Ma^2}{2L} \wedge A_2 = \frac{Mb^2}{2L}$

Respecto al eje 1-1': $\bar{x}_1 = 2\frac{a}{3} \wedge \bar{x}_2 = a + \frac{b}{3}$

Respecto al eje 2-2' $\bar{x}_1 = b + \frac{a}{3} \wedge \bar{x}_2 = \frac{2b}{3}$

Hallando: $A.\bar{a} = -A_1\,\bar{x}_1 + A_2\,\bar{x}_2$, respecto al eje 1-1'.

$A.\bar{b} = -A_1\,\bar{x}_1 + A_2\,\bar{x}_2$, respecto al eje 2-2'.

Así: $$A.\bar{a} = -\frac{Ma^2}{2L}\left(\frac{2a}{3}\right) + \frac{Mb^2}{2L}\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

$$A.\bar{a} = \frac{M(a+b)}{6L}((a+b)^2 - 3a^2)$$

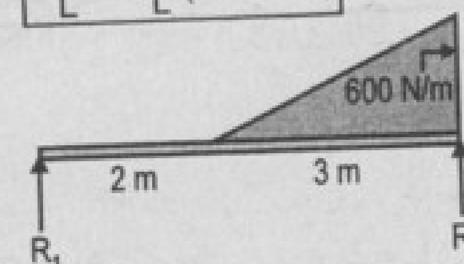
$$A.\bar{a} = \frac{M(a+b)}{6L}(L^2 - 3a^2) \text{ ; como } L = a + b$$

Donde: $$\boxed{\frac{6A.\bar{a}}{L} = -\frac{M}{L}(3a^2 - L^2)}$$

Del mismo modo: $$A.\bar{b} = -\frac{Ma^2}{2L}\left(b + \frac{a}{3}\right) + \frac{Mb^2}{2L}\left(\frac{2b}{3}\right)$$

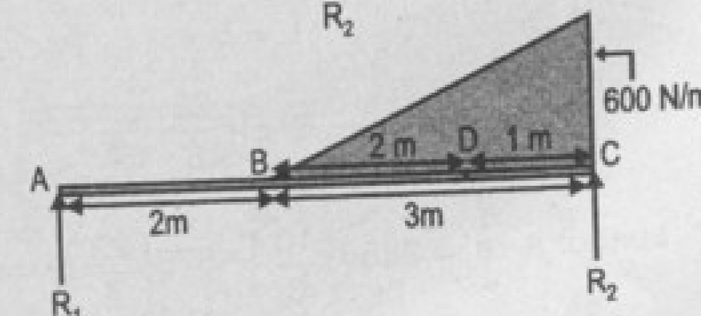
Factorizando y ordenando: $$\boxed{\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{M}{L}(3b^2 - L^2)}$$

806. Véase figura.



Resolución:

Del diagrama del cuerpo libre:



Por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 900 \quad ...(1)$$

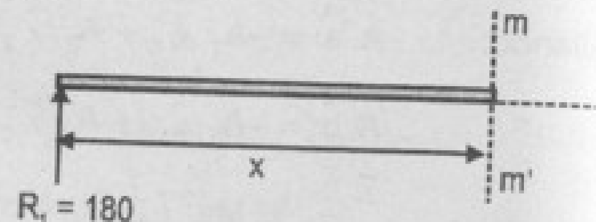
$$\Sigma M_D = 0 = 4R_1 - R_2 \quad ...(2)$$

Resolviendo: $R_1 = 180$ N y $R_2 = 720$ N

Hallando los momentos flectores por partes:

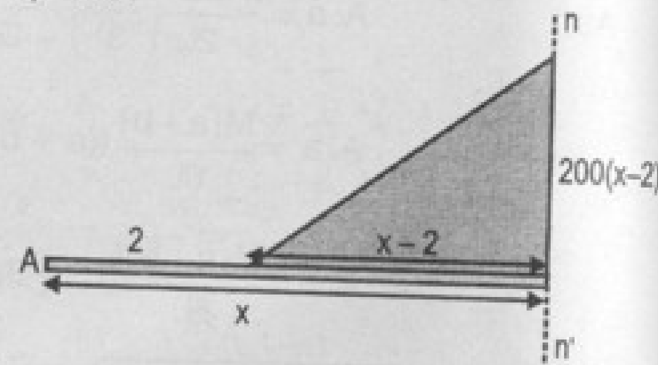
- Para $R_1 = 180$ N

$M_{mm'} = 180x \; ; \; x \in \langle 0;5 \rangle$

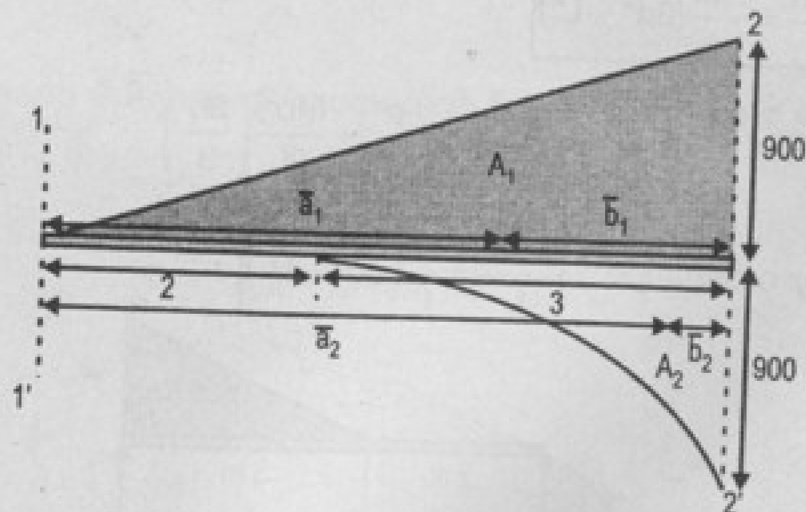


- Para la carga continua:

$M_{nn'} = -\dfrac{100}{3}(x-2)^3 \; ; \; x \in \langle 2;5 \rangle$



Graficando los momentos por partes:



Donde:

$A_1 = 2250$; $L = 5$; $A_2 = 675$

$\bar{a}_1 = \dfrac{10}{3}$; $\bar{a}_2 = \dfrac{22}{5}$; $\bar{b}_1 = \dfrac{5}{3}$; $\bar{b}_2 = \dfrac{3}{5}$

Luego: $A\,.\,\bar{a} = 2250\left(\dfrac{10}{3}\right) - 675\left(\dfrac{22}{5}\right) \Rightarrow A\,.\,\bar{a} = 4530$

$$\frac{6}{5}A\,.\,\bar{a} = \frac{6}{5}(4530) \Rightarrow \frac{6}{L}A\,.\,\bar{a} = 5436 \text{ N.m}^2$$

También: $A\,.\,\bar{b} = 2250\left(\dfrac{5}{3}\right) - 675\left(\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow A\,.\,\bar{b} = 3345$

$$\frac{6}{5}A\,.\,\bar{b} = \frac{6}{5}(3345) \Rightarrow \frac{6}{L}A\,.\,\bar{b} = 4014 \text{ N.m}^2$$

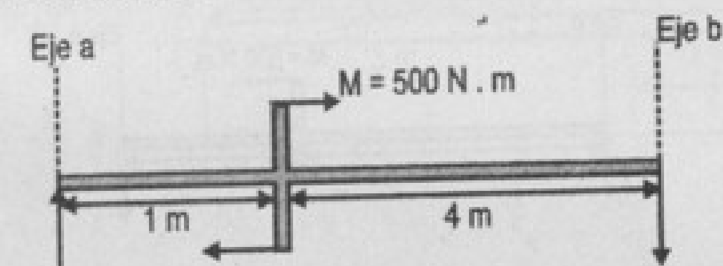
807. Véase figura. Resolverlo por superposición de los casos de los problemas 805 y 806.



Resolución:

Por la superposición de cargas tenemos:

- Por el par de fuerzas:



Del problema (805):

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = -\frac{500}{5}(3(1)^2 - 5^2) = 2200 \text{ N.m}^2$$

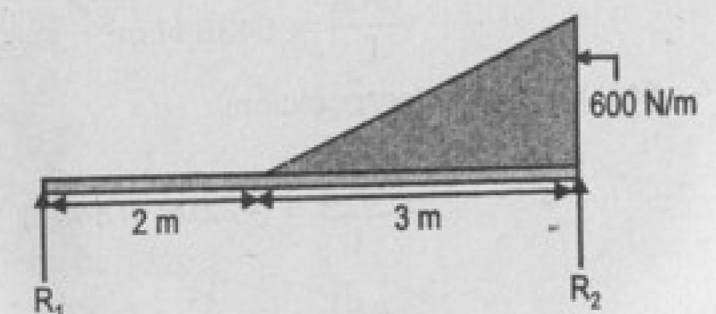
$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{500}{5}(3(4)^2 - 5^2) = 2300 \text{ N.m}^2$$

- Para la carga continua:

Del problema 806:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = 5436 \text{ N.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = 4014 \text{ N.m}^2$$



Sumando las expresiones respectivas para los ejes "a" o "b", hallamos la expresión respecto a la superposición.

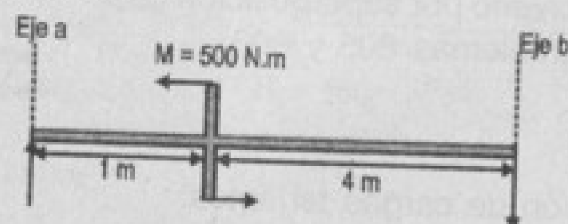
$$\Sigma\frac{6A.\bar{a}}{L} = (2200 + 5436) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A.\bar{a}}{L} = 7636\ \text{N.m}^2}$$

$$\Sigma\frac{6A.\bar{b}}{L} = (2300 + 4014) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A.\bar{b}}{L} = 6314\ \text{N.m}^2}$$

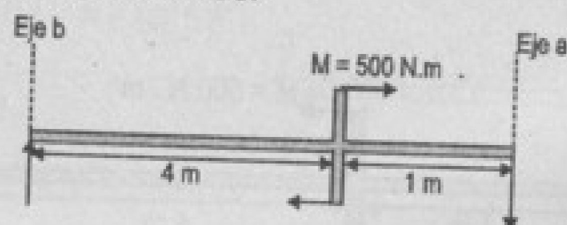
808. Resolver el problema anterior si el par se aplica en sentido inverso.

Resolución:

Para el par invertido, tendríamos:



Si lo volvemos a invertir, tendríamos:



Considerando la aplicación del caso 7, tenemos:

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = -\frac{500}{5}\ (3(4)^2 - 5^2) = -2300\ \text{N.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{500}{5}(3(1)^2 - 5^2) = -2200\ \text{N.m}^2$$

Como los valores para la carga continua se mantienen, tenemos:

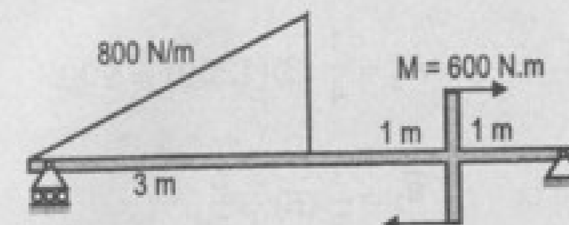
$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = 5436\ \text{N.m}^2 \quad \text{y} \quad \frac{6A.\bar{b}}{L} = 4014\ \text{N.m}^2$$

Así, para la superposición:

$$\Sigma\frac{6A.\bar{a}}{L} = (-2200 + 5436) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A.\bar{a}}{L} = 3236\ \text{N.m}^2}$$

$$\Sigma\frac{6A.\bar{b}}{L} = (-2300 + 4014) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A.\bar{b}}{L} = 1714\ \text{N.m}^2}$$

809. Véase figura.



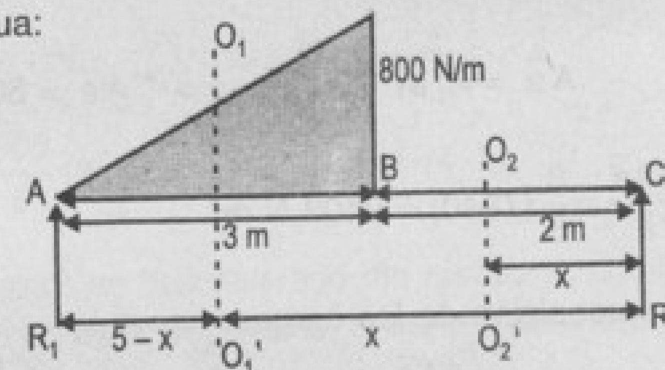
Resolución:

Hallando la relación $6A\bar{a}/L$ para cada carga:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{-600}{5}(3(4)^2 - 5^2) = -2760\ \text{N.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{600}{5}(3(1)^2 - 5^2) = -2640\ \text{N.m}^2$$

Para la carga continua:



Por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 1200 \qquad ...(1)$$

$$\Sigma M_A = 0 = 5R_2 - 1200\ (2) \qquad ...(2)$$

Resolviendo: $R_2 = 480$ N $\wedge$ $R_1 = 720$ N

Tomando los momentos flectores de derecha a izquierda:

$$M_{O_2\text{-}O_2'} = R_2x = 720x\ ;\ x \in \langle 0;5 \rangle$$

$$M_{O_1\text{-}O_1'} = -\frac{400}{9}(5 - x)^3\ ;\ x \in \langle 2;5 \rangle$$

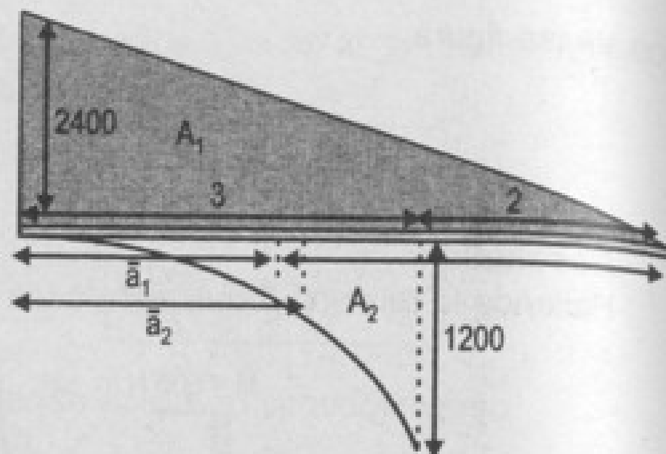
Graficando el área de momentos por partes:

$$A_1 = 1200(5) = 6000$$

$$A_2 = \frac{1}{4}(3)(1200) = 900$$

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{3}(5) = \frac{5}{3}$$

$$\bar{a}_2 = \frac{4}{5}(3) = \frac{12}{5}$$



Para hallar los brazos por el lado derecho, hay que restar de la longitud total:

$$\bar{b}_1 = 5 - \bar{a}_1 = \frac{10}{3} \qquad \bar{b}_2 = 5 - \bar{a}_2 = \frac{13}{5}$$

Así: $A\bar{a} = A_1\bar{a}_1 - A_2\bar{a}_2 \Rightarrow A\bar{a} = 6000\left(\frac{5}{3}\right) - 900\left(\frac{12}{5}\right) = 7840$

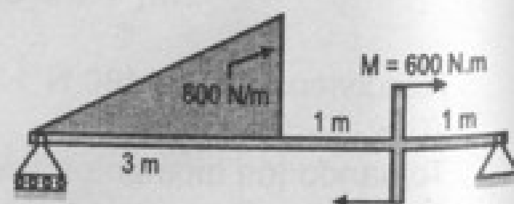
Luego: $\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6}{5}(7840) = 9408\ \text{N.m}^2$

Para la superposición de las cargas:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = (9408 - 2760) \Rightarrow \boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = 6648\ \text{Nm}^2}$$

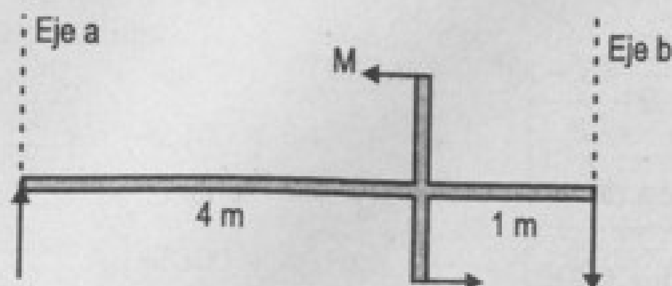
Del mismo modo: $\boxed{\frac{6A\bar{b}}{L} = 18\,768\ \text{N.m}^2}$

810. Resolver el problema anterior si el par se aplica en sentido contrario al del reloj.

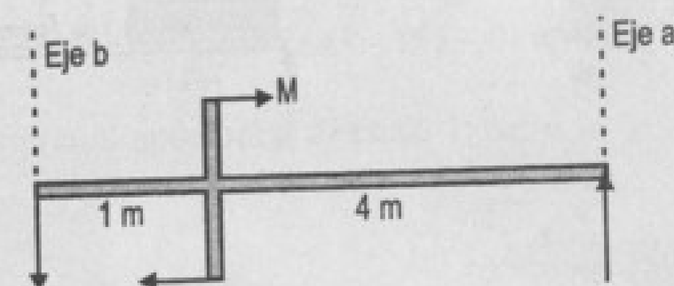


Resolución:

El par de fuerzas invertido sería:



Vista de otra óptica tendríamos:



Así, (respecto al eje b):

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = -\frac{M}{5}(3(1)^2 - 5^2) = -\frac{600}{5}(-22) \Rightarrow \frac{6A\bar{b}}{L} = 2640\ \text{N.m}^2$$

Respecto al eje a:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{600}{5}(3(4)^2 - 5^2) = 2760\ \text{Nm}^2$$

Observamos que los signos se han invertido del resultado anterior.
Como la carga continua no está modificada, tiene el mismo valor del problema 809, así:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = 9408\ \text{Nm}^2 \quad ; \quad \frac{6A\bar{b}}{L} = 21\,192\ \text{N.m}^2$$

Como son cargas superpuestas se suman miembro a miembro:

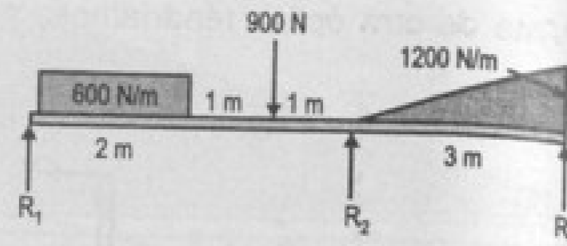
$$\frac{6A\bar{a}}{L} = (9408 + 2760) \Rightarrow \boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = 12\,168\ \text{Nm}^2}$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = (21\,192 + 2640) \Rightarrow \boxed{\frac{6A\bar{b}}{L} = 23\,832\ \text{Nm}^2}$$

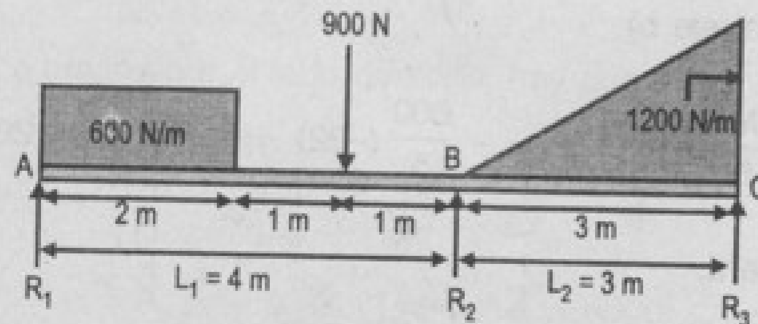
811, 812: problemas ilustrativos

Si no se indica lo contrario, las vigas continuas de los problemas siguientes tienen sus apoyos sobre cimentaciones rígidas y están al mismo nivel. En cada problema, determinar los momentos de continuidad en los apoyos.

813. Véase figura.



Resolución:
Hallar los momentos en:



Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos A-B y B-C:

$$L_1 M_A + 2(L_1 + L_2) M_B + L_2 M_C = -\frac{6A\bar{a}}{L_1} - \frac{6A\bar{b}}{L_2}$$

Por la definición de momento flexionante, M_A y M_C son nulos; es decir:

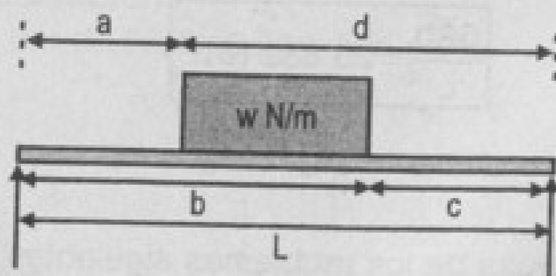
$$M_A = M_C = 0$$

Así la ecuación queda reducida a:

$$2(4 + 3) M_B = -\frac{6A\bar{a}}{L_1} - \frac{6A\bar{b}}{L_2} \qquad ...(1)$$

Para el tramo A-B tenemos la superposición de dos cargas:

De la carga continua, aplicamos el **caso 5**:



donde:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{w}{4L}(b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2))$$

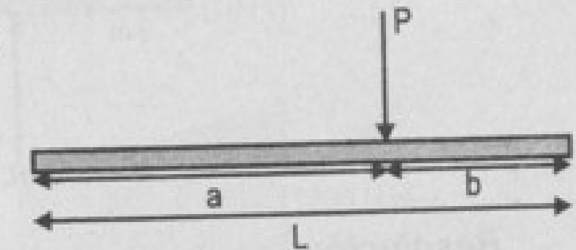
Para el problema: $w = 600$ N/m ; $L = 4$ m

$a = 0$; $d = 4$ m; $b = 2$ m ; $c = 2$ m

Así, para la carga continua:

$$\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} - \frac{600}{4(4)}(2^2(2.4^2 - 2^3) - 0) = 4200 \text{ N.m}^2$$

Para la carga puntual aplicamos el **caso 1**:



donde: $\frac{6A\bar{a}}{L} - \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2)$

Para el problema: $P = 900$ N ; $a = 3$ m ; $b = 1$m ; $L = 4$ m

Así, para la carga continua:

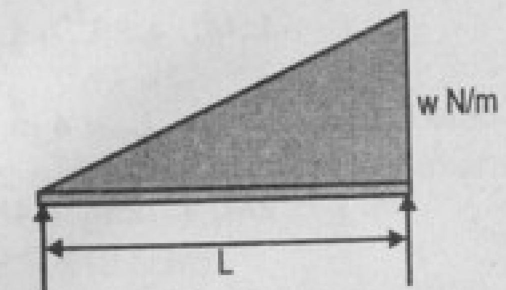
$$\frac{6A.\overline{a_2}}{L_1} = \frac{900(3)}{4}(4^2 - 3^2) = 4725 \text{ N.m}^2$$

Por la superposición de cargas:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = \sum_{i=1}^{2} \frac{6A}{L_1}\bar{a}_i$$

$$\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = \frac{6A\overline{a_1}}{L_1} + \frac{6A\overline{a_2}}{L_1} = 8925 \text{ N.m}^2 \qquad ...(2)$$

Para el tramo B-C, solo hay una carga, ahí aplicamos el **caso 3:**



donde: $\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{7}{60} wL^3$

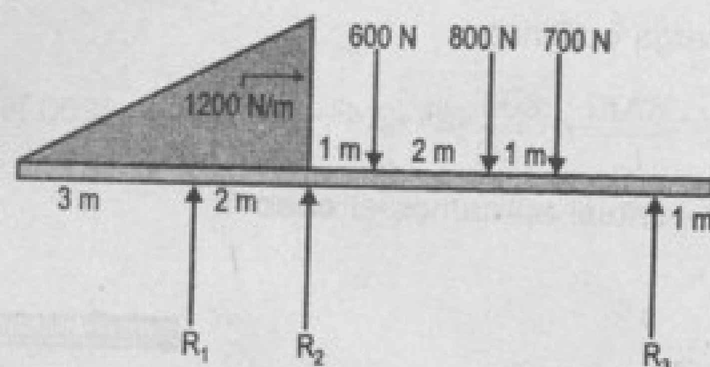
Para el problema: $w = 1200$ N/m
$L = 3$ m

Por lo tanto: $\frac{6A.\bar{b}}{L_2} = \frac{7}{60}(1200)(3)^3 = 3780 \text{ N.m}^2 \qquad ...(3)$

Llevando (2) y (3) a la ecuación (1):

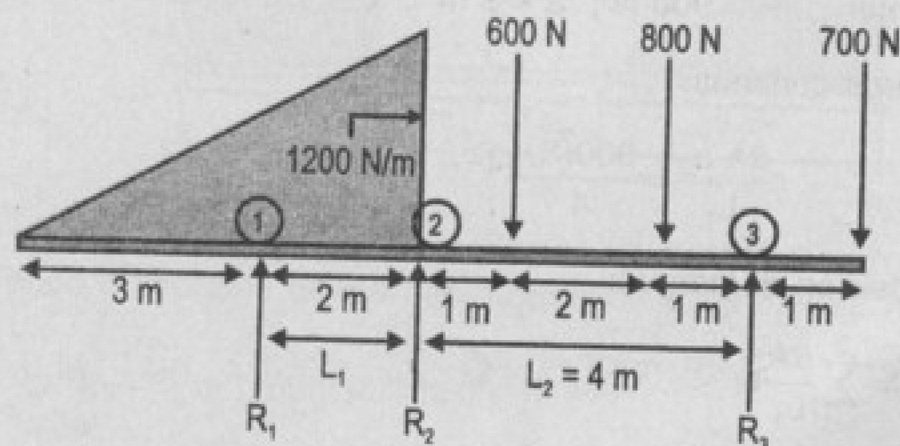
$$14 M_B = -8925 - 3780 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_B = -907{,}5 \text{ N.m}}$$

814. Véase figura.



Resolución:

Hallar los momentos en los puntos de las reacciones:



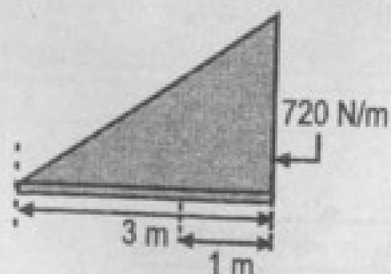
Por el teorema de los tres momentos en los tramos 1-2 y 2-3:

$$L_1M_1 + 2(L_1 + L_2)M_2 + L_2M_3 = -\frac{6A\bar{a}}{L_1} - \frac{6A\bar{b}}{L_2}$$

Como $L_1 = 2$ m y $L_2 = 4$ m, entonces:

$$2M_1 + 12M_2 + 4M_3 = -\frac{6A\bar{a}}{L_1} - \frac{6A\bar{b}}{L_2} \quad ...(1)$$

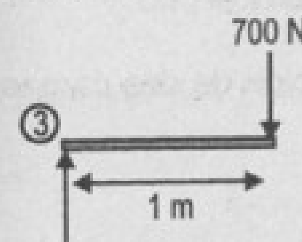
El momento flexionante en el apoyo (1) producido por la carga continua es:



donde:

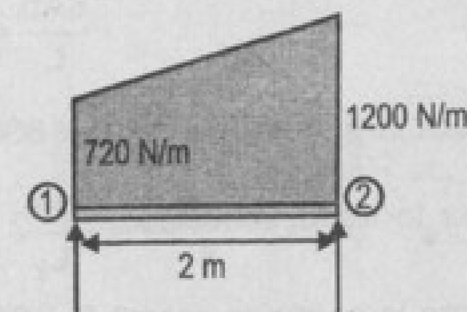
$$M_1 = -\frac{(720)(3)}{2}(1) = -1080 \text{ N.m} \quad ...(2)$$

El momento flexionante en el apoyo (3) producido por la carga de 700 N es:

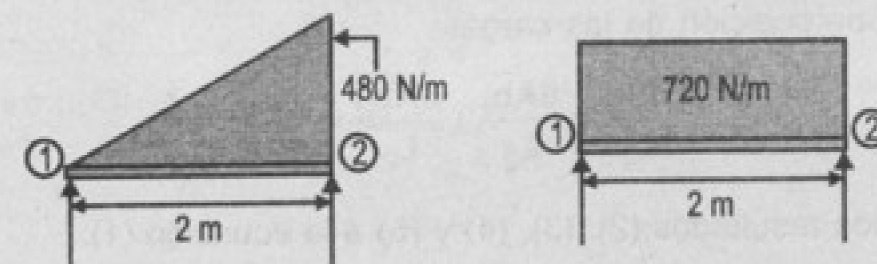


$$M_3 = -700(1) = -700 \text{ N.m} \quad ...(3)$$

En el tramo 1-2 tenemos el siguiente diagrama de cargas:



Este diagrama es en realidad la superposición de dos cargas:



Para la primera parte tenemos en el **caso 3** (ver problema 813), donde:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{8}{60}wL^3$$

Para el problema: L = 2 m; w = 480 N/m, por tanto, tenemos para la primera parte:

$$\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} = \frac{8}{60}(480)(2)^3 = 512 \text{ N.m}^2$$

Para la segunda parte estamos en el **caso 2,** donde:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4}$$

Para el problema: w = 720 N/m; L = 2 m, por tanto, tenemos:

$$\frac{6A\bar{a}_2}{L_1} = \frac{(720)(2)^3}{4} = 1440 \text{ N.m}^2$$

Para la superposición de ambas cargas tenemos:

$$\frac{6A\overline{a}}{L_1}=\frac{6A\overline{a_1}}{L_1}+\frac{6A\overline{a_2}}{L_1}=1952\ \text{N.m}^2 \qquad ...(4)$$

En el tramo 2-3 tenemos también una superposición de dos cargas concentradas. Utilizando el **caso 1** (ver problema 813):

$$\frac{6A\overline{b}}{L}=\frac{Pb}{L}(L^2-b^2)$$

- Para la primera carga: P = 600 N ; b = 3 m ; L = 4 m

  Por lo tanto, tenemos: $\frac{6A\overline{b_1}}{L_2}=\frac{600(3)(4^2-3^2)}{4}=3150\ \text{N.m}^2$

- Para la segunda carga: P = 800 N ; b = 1 m ; L = 4 m

  Así tenemos: $\frac{6A\overline{b_2}}{L_2}=\frac{800}{4}(1)(4^2-1^2)=3000\ \text{N.m}^2$

Para la superposición de las cargas:

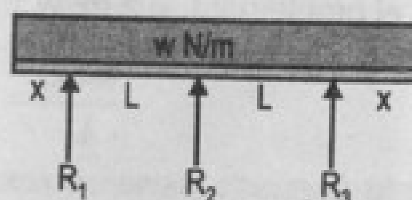
$$\frac{6A\overline{b}}{L_2}=\frac{6A\overline{b_1}}{L_2}+\frac{6A\overline{b_2}}{L_2}=6150\ \text{N.m}^2 \qquad ...(5)$$

Llevando los resultados (2), (3), (4) y (5) a la ecuación (1):

$$2(-1080)+12M_2+4(-700)=-(1952)-(6150)$$

Operando: $M_2=-\frac{3142}{12} \Rightarrow \boxed{M_2=-261{,}83\ \text{N.m}}$

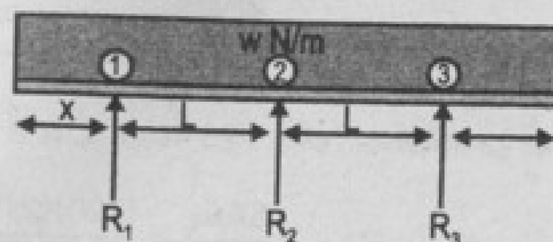
815. Determinar las longitudes de los voladizos en la viga continua de la figura, de manera que los momentos en los tres apoyos sean iguales.



Resolución:

Hallar "x" ; si $M_1 = M_2 = M_3$

Del sistema:



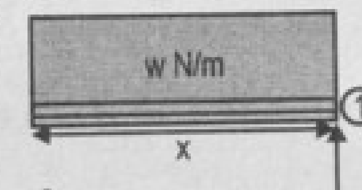
Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-3):

$$LM_1+2(2L)M_2+LM_3=-\left(\frac{6A\overline{a}}{L_1}+\frac{6A\overline{b}}{L_2}\right)$$

Por la condición de igualdad de momentos:

$$6LM_1=-\left(\frac{6A\overline{a}}{L_1}+\frac{6A\overline{b}}{L_2}\right) \qquad ...(1)$$

El momento flexionante en el apoyo (1):



Donde:

$$M_1=-wx\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{wx^2}{2} \qquad ...(2)$$

Para el claro (1-2) estamos en el **caso 2**:

$$\frac{6A.\overline{a}}{L_1}=\frac{wL^3}{4} \qquad ...(3)$$

Para el claro (2-3) es idéntico:

$$\frac{6A.\overline{b}}{L_1}=\frac{wL^3}{4} \qquad ...(4)$$

Llevando los resultados (2),(3) y (4) a la ecuación (1):

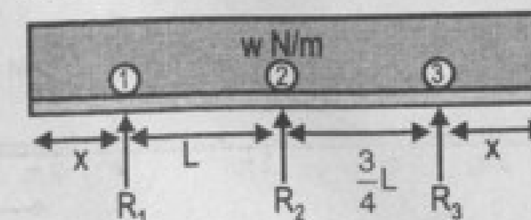
$$6L\left(\frac{-wx^2}{2}\right)=-\left(\frac{wL^3}{4}+\frac{wL^3}{4}\right)$$

donde: $x^2=\frac{L^2}{6}$, así: $\boxed{x=\frac{L}{\sqrt{6}}}$

816. Resolver el problema anterior si uno de los claros tiene una longitud de tres cuartas partes de la del otro.

Resolución:

Hallar "x", si $M_1 = M_2 = M_3$ para el sistema:



Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-3):

$$LM_1 + 2\left(L+\frac{3}{4}L\right)M_2 + \frac{3}{4}L\ M_3 = -\left(6\frac{A\bar{a}}{L_1}+6\frac{A\bar{b}}{L_2}\right)$$

Por la condición de igualdad de momentos:

$$\frac{21}{4}LM_1 = -\left(\frac{6A\bar{a}}{L_1}+\frac{6A\bar{b}}{L_2}\right) \qquad ...(1)$$

Para el momento flexionante en el apoyo (1) (ver problema 815):

$$M_1 = -\frac{wx^2}{2} \qquad ...(2)$$

Para el claro (1-2) por el **caso 2:**

$$\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \frac{wL^3}{4} \qquad ...(3)$$

Para el claro (2-3) por el **caso 2:**

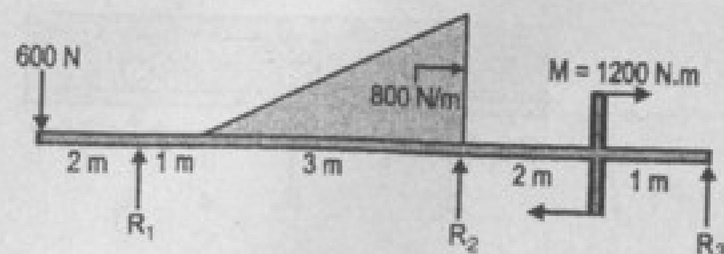
$$\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{w(3/4L)^3}{4} = \frac{27wL^3}{256} \qquad ...(4)$$

Llevando (2), (3) y (4) a la ecuación (1):

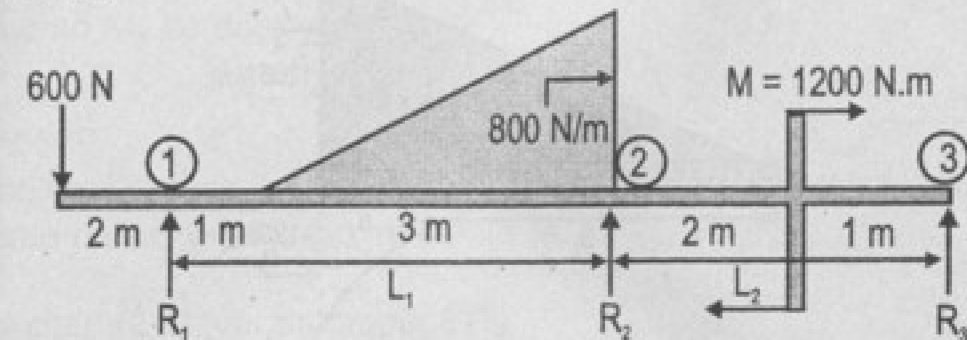
$$\frac{21}{4}L\left(-\frac{wx^2}{2}\right) = -\left(\frac{wL^3}{4}+\frac{27wL^3}{256}\right)$$

$$x^2 = \frac{13}{96}L^2 \quad ó \quad \boxed{x=\sqrt{\frac{13}{96}}L}$$

817. Véase figura.



Resolución:



Por el teorema de los tres momentos para los claros (1-2) y (2-3):

$$4M_1 + 2(4+3)M_2 + 3M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L_1}+\frac{6A.\bar{b}}{L_2}\right)$$

Así:

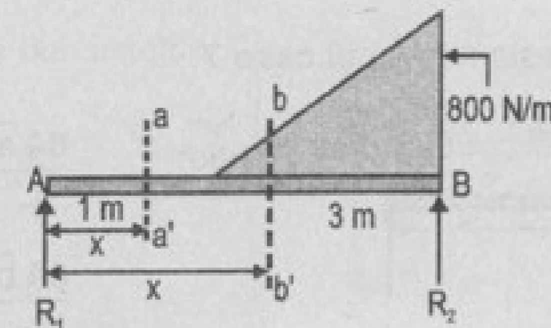
$$4M_1 + 14M_2 + 3M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L_1}+\frac{6A.\bar{b}}{L_2}\right) \qquad ...(1)$$

Por el momento flexionante en el apoyo (1) producido por la carga de 600 N:

$$M_1 = -600\ (2) = -1200\ \text{N.m} \qquad ...(2)$$

Por definición de momentos: $M_3 = 0$ ... (3)

Para el claro (1-2):



Donde:

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 1200 \qquad ...(\alpha)$$

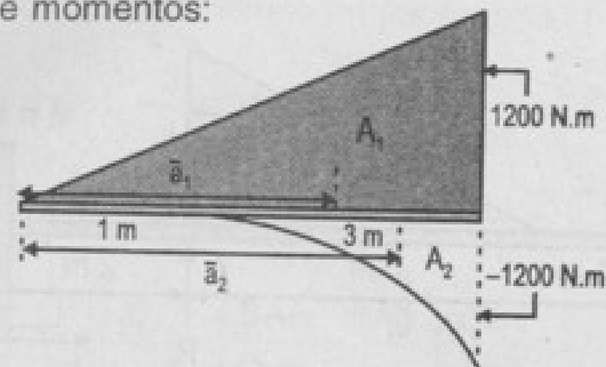
$$\Sigma M_A = 0 = 4R_1 - 1200\ (1) \qquad ...(\beta)$$

De (α) y (β): $R_1 = 300$ N y $R_2 = 900$ N

Hallando los momentos flectores por partes:

$$M_{aa'} = R_1x = 300x \quad ; \; x \in \langle 0;4\rangle \quad ; \; M_{bb'} = -\frac{400}{9}(x-1)^3 \quad ; \; x \in \langle 1;4\rangle$$

Hallando el área de momentos:



Donde: $A_1 = 2400\ N.m^2\ ;\ \ \bar{a}_1 = \frac{2}{3}(4)\ m$

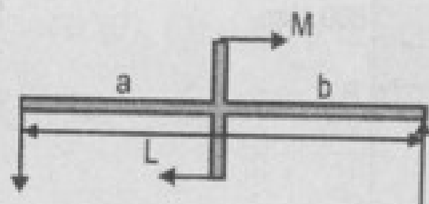
$A_2 = \frac{1}{4}(1200)(3)\ N.m^2\ ;\ \ \bar{a}_2 = \left(4 - \frac{1}{5}(3)\right)$

Sumando: $A.\bar{a} = A_1\bar{a}_1 - A_2\bar{a}_2$

$$A.\bar{a} = (2400)\left(\frac{8}{3}\right) - (900)\left(\frac{17}{5}\right) = 3340\ N.m^3$$

Al final: $\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = 3340\frac{(6)}{4} = 5010\ N.m^2$ ...(4)

Para el claro (2-3) estamos en el **caso 7**:



Donde: $\frac{6A.\bar{a}}{L} = -\frac{M}{L}(3a^2 - L^2)$

$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{M}{L}(3b^2 - L^2)$

Para el problema: M = 1200 N.m
L = 3 m
b = 1 m

Así: $\frac{6A.\bar{b}}{L_2} = \frac{1200}{3}(3(1)^2 - 3^2) = -2400\ N.m^2$ ...(5)

Llevando (2), (3), (4) y (5) a la ecuación (1):

$$4(-1200) + 14M_2 + 0 = -(5010 - 2400)$$

Reduciendo $\boxed{M_2 = +156,43\ N.m}$

818. En el problema anterior determinar el valor del par M aplicado, de manera que el momento M_2 se anule.

Resolución:

Del problema anterior se toman los resultados con la condición de que $M_2 = 0$ y hay que hallar el valor del momento M.

Para el claro (2-3) (ver problema 817):

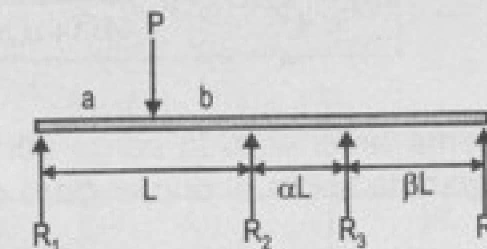
$$\frac{6A.\bar{b}}{L_2} = \frac{M}{3}(3(1)^2 - 3^2) = -2M \quad ...(5)'$$

Llevando este resultado a la ecuación (1) del problema anterior:

$$4(-1200) + 0 + 0 = -(5010 - 2M)$$

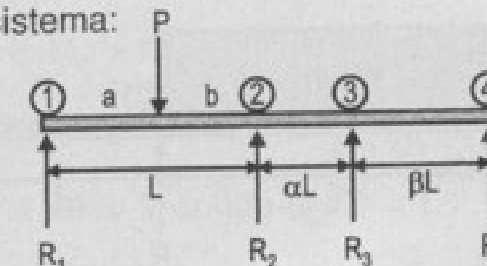
Donde: $\boxed{M = +105\ N.m}$ (en el sentido de las manecillas del reloj).

819. Véase la figura.



Resolución:

Hallar los momentos del sistema:



En los claros (2-3) y (3-4) al no tener cargas de ningún valor, la expresión $A.\bar{a}$ o $A.\bar{b}$, es de valor nulo.

En el claro (1-2) estamos en el **caso 1** (ver problema 813):

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2) \quad ...(1)$$

Por el teorema de los tres momentos en los claros:

• (1-2) y (2-3):

$$LM_1 + 2(L + \alpha L)M_2 + \alpha LM_3 = -\frac{Pa}{L}(L^2 - a^2) \quad ...(2)$$

• (2-3) y (3-4): $\alpha LM_2 + 2(\alpha L + \beta L)M_3 + \beta LM_4 = 0$ ...(3)

Por la definición de momentos:

$$M_1 = M_4 = 0 \qquad ...(4)$$

(2), (3), (4) nos da el sistema:

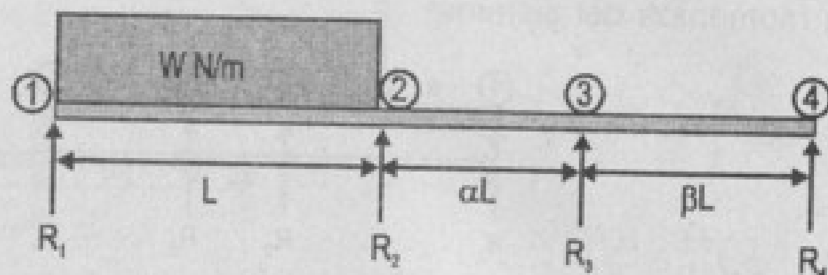
$$\begin{cases} 2L(1+\alpha)M_2 + \alpha LM_3 = -\dfrac{Pa}{L}(L^2 - a^2) \\ \alpha M_2 + 2(\alpha+\beta)M_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es: $\boxed{M_2 = -\dfrac{Pa}{L^2}(L^2 - a^2).\dfrac{2(\alpha+\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}}$

$$\boxed{M_3 = \frac{Pa}{L^2}(L^2 - a^2)\frac{\alpha}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}}$$

820. Resolver el problema anterior si la carga concentrada se sustituye por una uniformemente repartida sobre el primer claro de w N/m.

Resolución:
Hallar los momentos para el sistema:



Los resultados del problema anterior se mantienen, salvo en el claro (1-2) donde por el **caso 2**, (ver problema 814):

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad ...(1)'$$

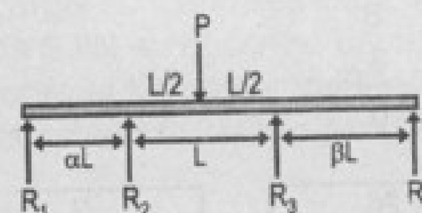
Sustituyendo este valor en la ecuación (2) del problema anterior nos da el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2(1+\alpha)M_2 + \alpha M_3 = -\dfrac{wL^2}{4} \\ \alpha M_2 + 2(\alpha+\beta)M_3 = 0 \end{cases}$$

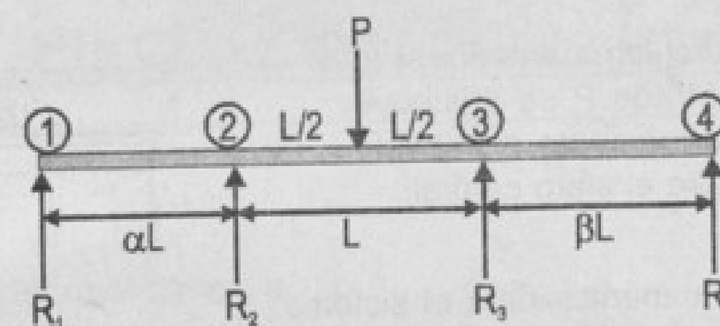
Cuya solución es: $\boxed{M_2 = \dfrac{-wL^2}{4}\dfrac{2(\alpha-\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}}$

$$\boxed{M_3 = \frac{wL^2}{4}\frac{\alpha}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}}$$

821. Véase figura.



Resolución:
Hallar los momentos para el sistema:



Por definición de momentos: $M_1 = M_4 = 0$ ...(1)

Por ausencia de cargas el valor de $A.\bar{a}$ y $A.\bar{b}$, en los claros (1-2) y (3-4), son nulos.
En el claro (2-3), tenemos el **caso 1** donde a = b = L/2.

Así: $\dfrac{6A.\bar{a}}{L} = \dfrac{6A.\bar{b}}{4} = \dfrac{Pa}{L}(L^2 - a^2)$

Luego: $\dfrac{6A.\bar{a}}{L} = \dfrac{6A.\bar{b}}{L} = \dfrac{P(L/2)}{L}(L^2 - L^2/4)$

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{3}{8}PL^2 \qquad ...(2)$$

Aplicando el teorema de los tres momentos:

- Claros (1-2) y (2-3):

$$\alpha LM_1 + 2(\alpha L + L)M_2 + LM_3 = -\left(0 + \frac{6A.\bar{b}}{L}\right) \qquad ...(3)$$

- Claros (2-3) y (3-4):

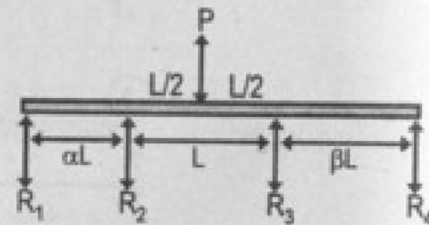
$$LM_2 + 2(L + \beta L)M_3 + \beta LM_4 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L} + 0\right) \quad ...(4)$$

De (1), (2), (3) y (4) nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2(1+\alpha)M_2 + M_3 = -\frac{3}{8}PL \\ M_2 + 2(1+\beta)M_3 = -\frac{3}{8}PL \end{cases}$$

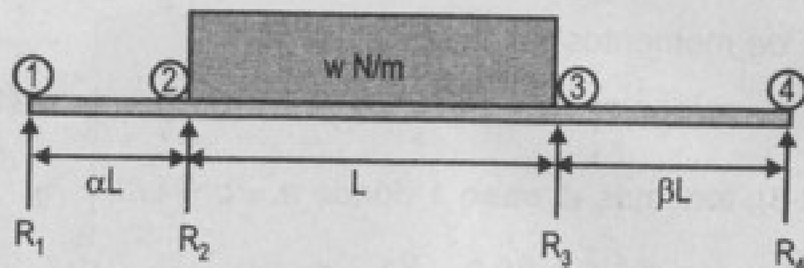
Resolviendo: $\boxed{M_2 = -\frac{3}{8}PL\frac{1+2\beta}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}}$; $\boxed{M_3 = -\frac{3}{8}PL\frac{1+2\alpha}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}}$

822. Resolver el problema anterior si la carga concentrada P se sustituye por una uniformemente distribuida de w N/m sobre el claro central.



Resolución:

Calcular los momentos para el sistema:



El claro (2-3) por el **caso 2** (ver problema 814):

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{wL^3}{4} \quad ...(2)'$$

Los demás cálculos son los mismos que las del problema anterior.

Llevando (2)' a las ecuaciones (3) y (4) del problema anterior:

$$\begin{cases} 2(1+\alpha)M_2 + M_3 = -\frac{wL^2}{4} \\ M_2 + 2(1+\beta)M_3 = -\frac{wL^2}{4} \end{cases}$$

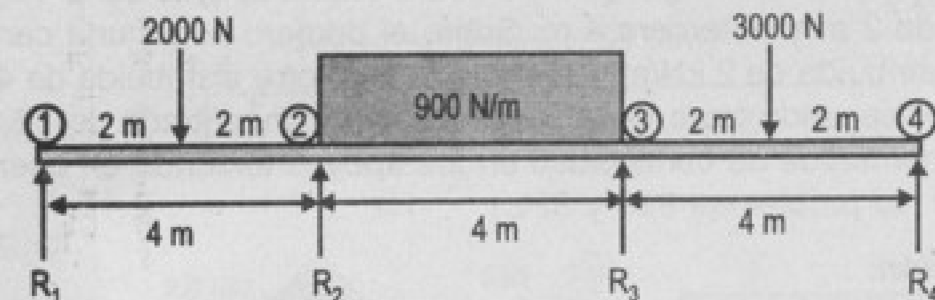
Resolviendo:

$$\boxed{M_2 = -\frac{wL^2}{4}\,\frac{1+2\beta}{(4(1+\alpha)(1+\beta)-1)}} \qquad \boxed{M_3 = -\frac{wL^2}{4}\,\frac{1+2\alpha}{(4(1+\alpha)(1+\beta)-1)}}$$

823. Se tiene una viga continua simplemente apoyada sobre tres claros de 4 m que soporta una carga concentrada de 2 kN en el centro del primer claro, otra concentrada de 3 kN en el centro del tercero y una uniformemente distribuida de 900 N/m sobre el tramo central. Determinar los momentos en los apoyos y confrontar el resultado utilizando las soluciones de los problemas 819 y 822.

Resolución:

El sistema de cargas es:



Para el claro (1-2), por el caso 1:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{2000}{4}(2)(4^2 - 2^2) = 12\ 000\ \text{N.m}^2 \quad ...(1)$$

Para el claro (2-3), por el caso 2:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{900}{4}(4)^3 = 14\ 400\ \text{N.m}^2 \quad ...(2)$$

Para el claro (3-4), por el caso 1:

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{3000}{4}(2)(4^2 - 2^2) = 18\ 000\ \text{N.m}^2 \quad ...(3)$$

Por la definición de momentos:

$$M_1 = M_4 = 0 \quad ...(4)$$

Por el teorema de los tres momentos en:

- **Claros (1-2) y (2-3)**

$$4M_1 + 2(8)M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L} + \frac{6A.\bar{b}}{L}\right) \quad ...(5)$$

- Claros (2-3) y (3-4):

$$4M_2 + 2(8)M_3 + 4M_4 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L} + \frac{6A.\bar{b}}{L}\right) \quad ...(6)$$

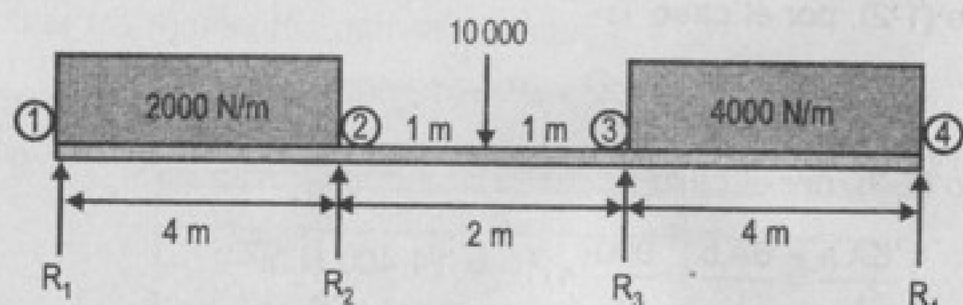
De (1), (2), (3), (4) en (5) y (6):

$$\begin{cases} 16M_2 + 4M_3 = -(12\,000 + 14\,400) \\ 4M_2 + 16M_3 = -(14\,400 + 18\,000) \end{cases}$$

Resolviendo: $\boxed{M_2 = -1220 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_3 = -1720 \text{ N.m}}$

824. El primer claro de una viga continua sobre cuatro apoyos tiene 4 m de longitud, el segundo 2 m y el tercero 4 m. Sobre el primero actúa una carga uniformemente distribuida de 2 kN/m y sobre el tercero otra distribuida de 4 kN/m. En el centro del segundo claro se aplica una carga concentrada de 10 kN. Determinar los momentos de continuidad en los apoyos teniendo en cuenta los resultados de los problemas 820 y 821.

Resolución:
El sistema de cargas es:



Para el claro (1-2), por el **caso 2**:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{2000(4)^3}{4} = 32\,000 \text{ N.m}^2 \quad ...(1)$$

Para el claro (2-3), por el **caso 1**:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{10\,000}{2}(1)(2^2 - 1^2) = 15\,000 \text{ N.m}^2 \quad ...(2)$$

Para el claro (3-4), por el **caso 2**:

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{4000}{4}(4)^3 = 64\,000 \text{ N.m}^2 \quad ...(3)$$

Por definición de momentos: $M_1 = M_4 = 0$ ...(4)

Por el teorema de los tres momentos en:
- Claros (1-2) y (2-3):

$$4M_1 + 12M_2 + 2M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}}{L_2}\right) \quad ...(5)$$

- Claros (2-3) y (3-4):

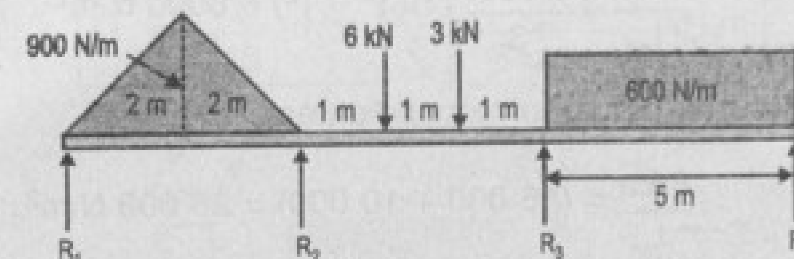
$$2M_2 + 12M_3 + 4M_4 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}}{L_2}\right) \quad ...(6)$$

Llevando (1), (2), (3) y (4) en (5) y (6):

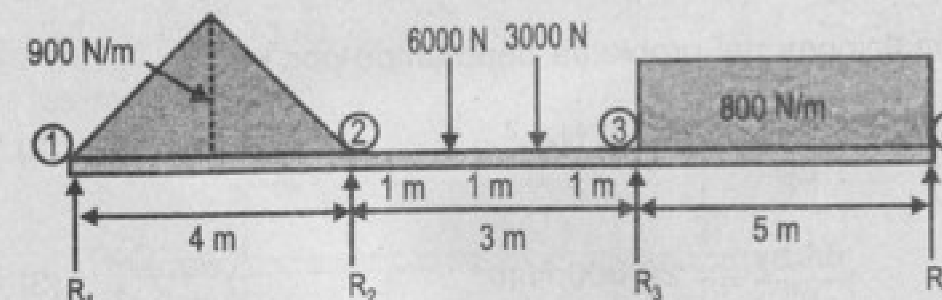
$$\begin{cases} 12M_2 + 2M_3 = -(32\,000 + 15\,000) \\ 2M_2 + 12M_3 = -(15\,000 + 64\,000) \end{cases}$$

Resolviendo: $\boxed{M_1 = -2900 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_3 = -6100 \text{ N.m}}$

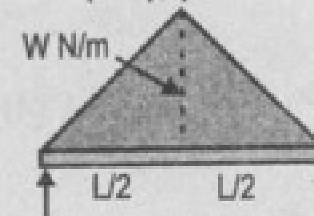
825. Véase figura.



Resolución:
Hallar los momentos del sistema:



Para el claro (1-2), por el **caso 6**:



donde:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{5}{32}wL^3$$

Para el problema: w = 900 N/m ; L = 4 m

Así: $$\frac{6A\overline{a_1}}{L_1}=\frac{5}{32}(900)(4)^3=9000\ \text{N.m}^2 \qquad ...(1)$$

Para el claro (2-3), por la superposición de cargas en el **caso 1:**

- Por la carga de 6000 N:

$$\frac{6A\bar{a}}{L}=\frac{(6000)(1)}{3}(3^2-1^2)=16\,000\ \text{N.m}^2$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L}=\frac{(6000)}{3}(2)(3^2-2^2)=20\,000\ \text{N.m}^2$$

- Por la carga de 3000 N:

$$\frac{6A\bar{a}}{L}=\frac{(3000)(2)}{3}(3^2-2^2)=10\,000\ \text{N.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{b}}{L}=\frac{(3000)}{3}(1)(3^2-1^2)=8000\ \text{N.m}^2$$

Sumando los términos correspondientes:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L}=(16\,000+10\,000)=26\,000\ \text{N.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{b}}{L}=(20\,000+8000)=28\,000\ \text{N.m}^2$$

Por las condiciones del problema denotamos por:

$$\frac{6A.\overline{a_2}}{L_2}=26\,000\ \text{N.m}^2 \qquad ...(2)$$

$$\frac{6A.\overline{b_2}}{L_2}==28\,000\ \text{N.m}^2 \qquad ...(3)$$

Para el claro (3-4), del **caso 2**:

$$\frac{6A.\overline{b_3}}{L_3}=\frac{800(5)^3}{4}=25\,000\ \text{N.m}^2 \qquad ...(4)$$

Por la definición de momentos:

$$M_1=M_4=0 \qquad ...(5)$$

Por el teorema de los tres momentos:

- Para los claros (1-2) y (2-3):

$$4M_1+14M_2+3M_3=-\left(\frac{6A.\overline{a_1}}{L_1}+\frac{6A.\overline{b_2}}{L_2}\right) \qquad ...(6)$$

- Para los claros (2-3) y (3-4):

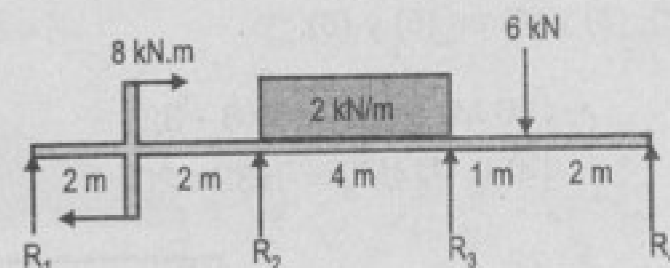
$$3M_2+16M_3+5M_4=-\left(\frac{6A.\overline{a_2}}{L_2}+\frac{6A.\overline{b_3}}{L_3}\right) \qquad ...(7)$$

Llevando las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) en (6) y (7):

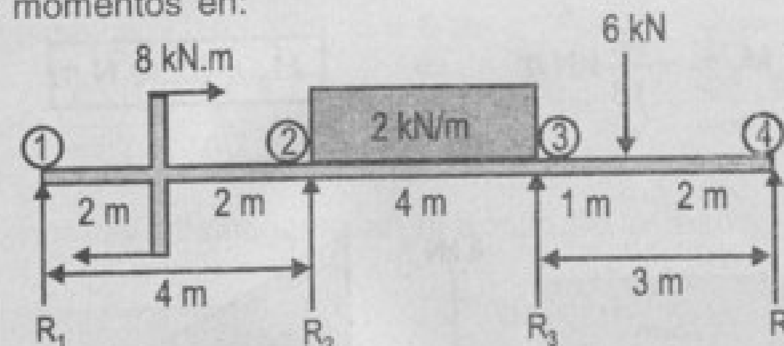
$$\begin{cases}14M_2+3M_3=-(9\,000+28\,000)\\ 3M_2+16M_3=-(26\,000+25\,000)\end{cases}$$

Resolviendo: $$\boxed{M_2=-\frac{439}{215}\ \text{kN.m}} \ ; \quad \boxed{M_3=-\frac{603}{215}\ \text{kN.m}}$$

826. Véase figura.



Resolución:
Calcular los momentos en:



Para el claro (1-2), por el **caso 7**:

$$\frac{6A.\overline{a_1}}{L_1}=-\frac{8}{4}(3(2)^2-4^2)=18\ \text{kN.m}^2 \qquad ...(1)$$

Para el claro (2-3), por el **caso 2**:

$$\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} = \frac{6A\bar{b}_2}{L_2} = \frac{2(4)^3}{4} = 32 \text{ kN.m}^2 \quad ...(2)$$

Para el claro (3-4), por el **caso 1**:

$$\frac{6A.\bar{b}_3}{L_3} = \frac{6(2)}{3}(3^2 - 2^2) = 20 \text{ kN.m}^2 \quad ...(3)$$

Por la definición de momentos:

$$M_1 = M_4 = 0 \quad ...(4)$$

Por el teorema de los tres momentos:

- Claros (1-2) y (2-3):

$$4M_1 + 16M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A\bar{b}_2}{L_2}\right) \quad ...(5)$$

$$4M_2 + 14M_3 + 3M_4 = -\left(\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A\bar{b}_2}{L_2}\right) \quad ...(6)$$

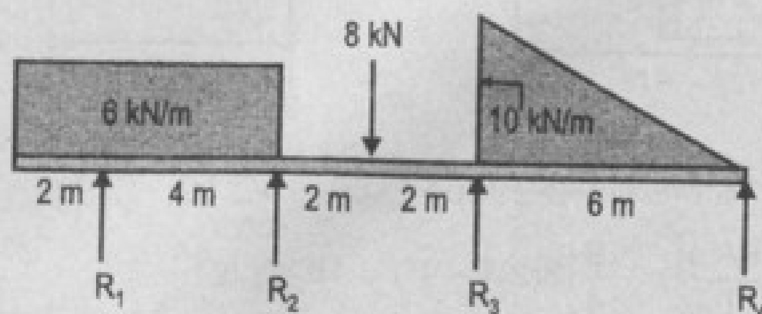
Llevando (1), (2), (3) y (4) en (5) y (6):

$$\begin{cases} 16M_2 + 4M_3 = -(8+32) \\ 4M_2 + 14M_3 = -(32+20) \end{cases}$$

Resolviendo: $M_2 = -\frac{22}{13}$ kN.m $\Rightarrow$ $\boxed{M_2 = 1692 \text{ N.m}}$

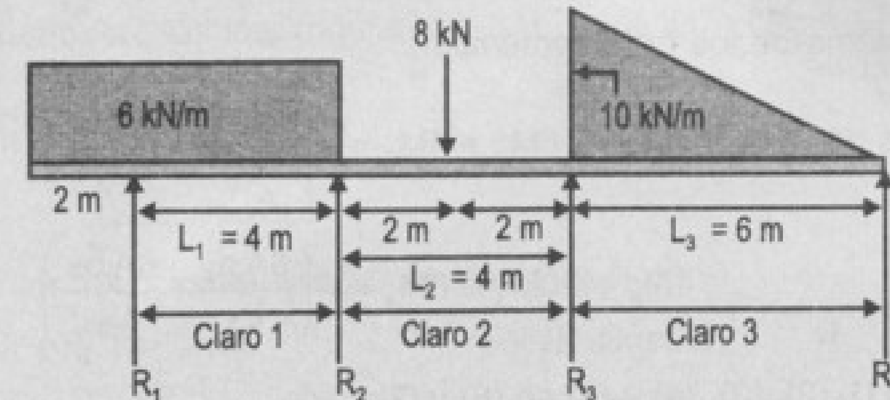
$M_3 = -\frac{42}{13}$ kN.m $\Rightarrow$ $\boxed{M_3 = 3230 \text{ N.m}}$

827. Véase figura.



Resolución:

Hallar los momentos de:



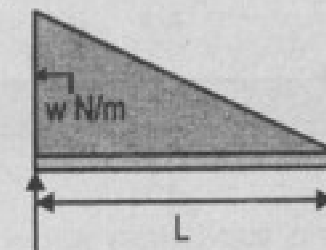
Claro 1, por el **caso 2**:

$$\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{6(4)^3}{4} = 96 \text{ kN.m}^2 \quad ...(1)$$

Claro 2, por el **caso 1**:

$$\frac{6A.\bar{b}_2}{L_2} = \frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} = \frac{8(2)}{4}(4^2 - 2^2) = 48 \text{ kN.m}^2 \quad ...(2)$$

Claro 3, por el **caso 4**:

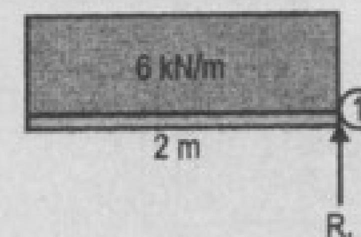


donde: $\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{7}{60}wL^3$ y $\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{8}{60}wL^3$

Para el problema: w = 10 kN/m; L = 6 m

Así: $$\frac{6A.\bar{b}_3}{L_3} = \frac{8}{60}(10)(6)^3 = 288 \text{ kN.m}^2 \quad ...(3)$$

Hallando el momento flexionante en el apoyo de la reacción R_1:



donde:

$M_1 = -6(2)(1) = -12$ kN.m ...(4)

Por la definición de momentos:

$$M_4 = 0 \qquad ...(5)$$

Por el teorema de los tres momentos:

- Claros 1 y 2: $$4M_1 + 16M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}\right) \qquad ...(6)$$

$$4M_2 + 20M_3 + 6M_4 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} + \frac{6A.\bar{b}_3}{L_3}\right) \qquad ...(7)$$

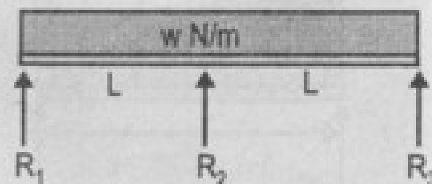
Llevando (1), (2), (3), (4) y (5) en (6) y (7):

$$\begin{cases} 16M_2 + 4M_3 = -(96+48)+48 \\ 4M_2 + 20M_3 = -(48+288) \end{cases}$$

Resolviendo: $\boxed{M_2 = -\frac{36}{19} \text{ kN.m}}$ y $\boxed{M_3 = -\frac{312}{19} \text{ kN.m}}$

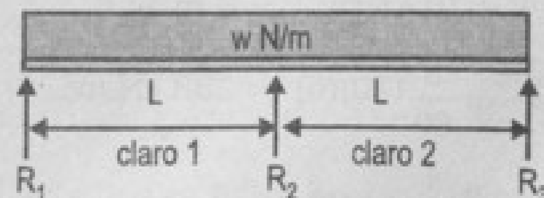
En los problemas siguientes, hallar las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante. Después, determinar los valores máximos de la fuerza cortante, y el valor máximo positivo del momento flexionante. Al resolver los problemas, y a menos que se indique lo contrario, utilizar los resultados obtenidos en los problemas de referencia.

828. Una viga continua de dos tramos iguales soporta una carga uniforme sobre toda ella como se indica en la figura.



Resolución:

Del sistema:



Para el claro 1, usando el **caso 2**:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad ...(1)$$

Para el claro 2, usando el **caso 2**:

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad ...(2)$$

Por definición de momentos: $M_1 = M_3 = 0 \qquad ...(3)$

Por el teorema de los tres momentos: $LM_1 + 2(2L)M_2 + LM_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L} + \frac{6A.\bar{b}}{L}\right)$

Así: $\boxed{M_2 = -\frac{wL^2}{8}} \qquad ...(4)$

Hallando las reacciones isostáticas en cada claro:

- Claro 1: $R_{i_1} = R_{i_2}$ ...(por la simetría)

  $\Sigma F_y = 0 = R_{i_1} + R_{i_2} - wL$

  Luego: $R_{i_1} = R_{i_2} = \frac{wL}{2}$

- Claro 2: $R_{i_2} = R_{i_3}$ ...(por la simetría)

  $\Sigma F_y = 0 = R_{i_2} + R_{i_3} - wL$

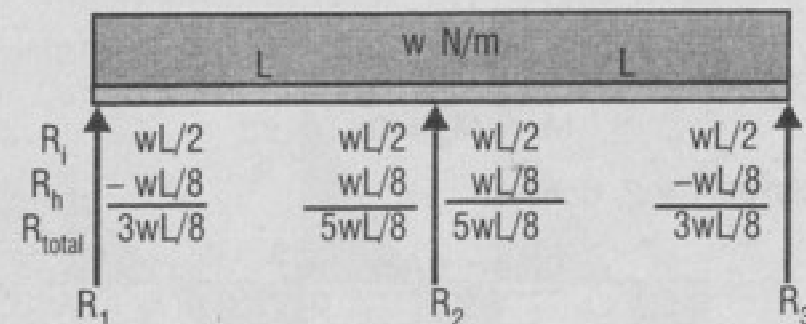
Luego: $R_{i_2} = R_{i_3} = \frac{wL}{2}$

Hallando las reacciones hiperestáticas:

- Claro 1: $R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = -\frac{wL}{8}$; $R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = \frac{wL}{8}$

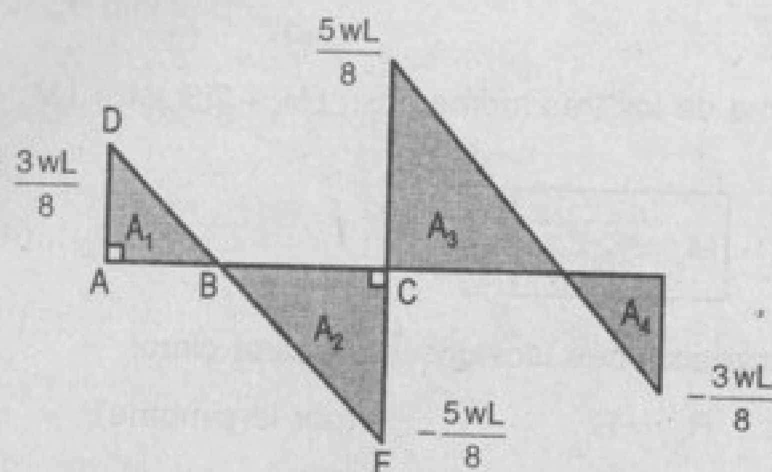
- Claro 2: $R_{h_2} = \frac{M_3 - M_2}{L} = \frac{wL}{8}$; $R_{h_3} = \frac{M_2 - M_3}{L} = -\frac{wL}{8}$

Todos estos resultados podemos colocarlos en una tabla:



Donde: $\boxed{\begin{array}{l} R_1 = 3wL/8 \\ R_2 = 5wL/8 + 5wL/8 = 5wL/4 \\ R_3 = 3wL/8 \end{array}}$

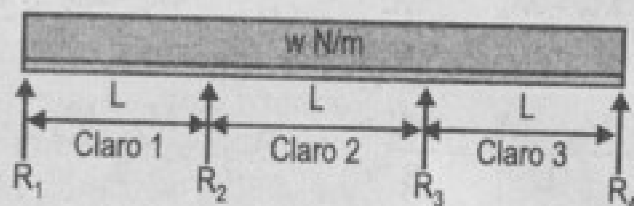
Realizando diagrama de fuerza cortante:



Por semejanza de triángulos ABD y BCE:

$$AB = \frac{3L}{8} \quad y \quad BC = \frac{5L}{8}, \quad \text{donde } A_1 = M_{máx} = \frac{9wL^2}{128}$$

829. Una carga uniforme sobre una viga de tres tramos iguales como indica la figura.



Resolución:

Del sistema:

w N/m; L, L, L; Claro 1, Claro 2, Claro 3; R_1, R_2, R_3, R_4

Por la simetría del sistema:

$$M_2 = M_3 \qquad ...(1)$$

Por definición de momentos:

$$M_1 = M_4 = 0 \qquad ...(2)$$

Tomando los claros 1 y 2, donde:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad ...(3)$$

Y por el teorema de los tres momentos:

$$LM_1 + 2(2L)M_2 + LM_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L} + \frac{6A.\bar{b}}{L}\right)$$

Así:
$$5LM_2 = -\left(\frac{wL^3}{4} + \frac{wL^3}{4}\right)$$

Luego:
$$\boxed{M_2 = -\frac{wL^2}{10} = M_3} \qquad ...(4)$$

Todas las reacciones isostáticas tienen el valor de: wL/2 ...(5)

Hallando las reacciones hiperestáticas:

- Claro 1: $R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = -\frac{wL}{10}$; $R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = \frac{wL}{10}$
- Claro 2: $R_{h_2} = \frac{M_3 - M_2}{L} = 0$; $R_{h_3} = \frac{M_2 - M_3}{L} = 0$
- Claro 3: $R_{h_3} = \frac{M_4 - M_3}{L} = \frac{wL}{10}$; $R_{h_4} = \frac{M_3 - M_4}{L} = \frac{-wL}{10}$

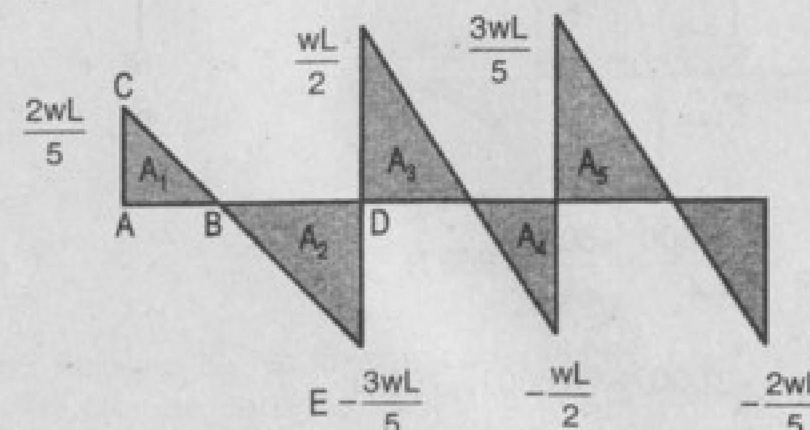
Ordenando estos resultados en una tabla:

w N/m

	R_1	R_2		R_3		R_4
R. isostática	wL/2	wL/2	wL/2	wL/2	wL/2	wL/2
R. hiperestática	-wL/10	wL/10	0	0	wL/10	-wL/10
R. total	2wL/5	3wL/5	wL/2	wL/2	3wL/5	2wL/5

Donde: $\boxed{R_1 = \frac{2}{5}wL = R_4}$ $\boxed{R_2 = \frac{11}{10}wL = R_3}$

En el diagrama de fuerza cortante:



Por semejanza de triángulos ABC y BDE: (AB + BD = L); $AB = \frac{2L}{5}$

$$A_1 = M_{máx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2wL}{5}\right)\left(\frac{2L}{5}\right) = \frac{2}{25}\,wL^2$$

830. Viga continua del problema 814.

Resolución:

Del problema 814 tenemos:

$M_1 = -1080$ N.m ; $M_2 = -261{,}83$ N.m ; $M_3 = -700$ N.m

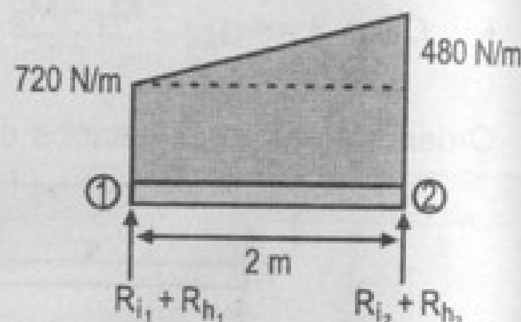
Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en cada tramo:

- Tramo (1-2):

Donde:

$$R_{i_1} = \left(720 + \frac{1}{3}(480)\right) = 880\ \text{N}$$

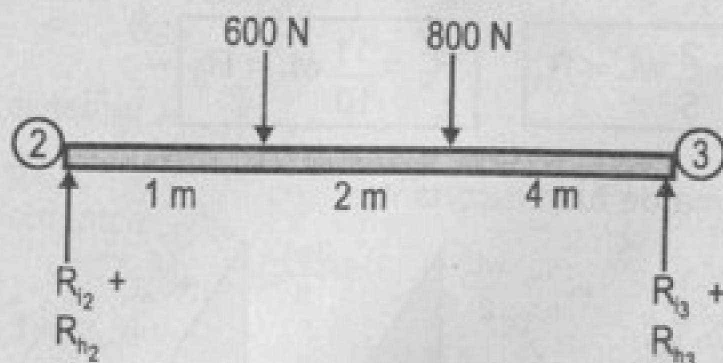
$$R_{i_2} = \left(720 + \frac{2}{3}(480)\right) = 1040\ \text{N}$$



$$R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = \frac{-261{,}83 + 1080}{2} = 409\ \text{N}$$

$$R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = -409\ \text{N}$$

- Tramo (2-3):



Donde: $R_{i_2} = \frac{3\times 600}{4} + \frac{800}{4} = 650\ \text{N}$

$$R_{i_3} = \frac{1}{4}(600) + \frac{3}{4}(800) = 750\ \text{N}$$

$$R_{h_2} = \frac{M_3 - M_2}{L} = \left(\frac{-700 + 261{,}83}{4}\right) = -109{,}5\ \text{N}$$

$$R_{h_3} = \frac{M_2 - M_3}{L} = 109{,}5\ \text{N}$$

Al lado izquierdo del apoyo 1 hay una fuerza de corte de: 1080 N

Al lado derecho del apoyo 3 hay una fuerza de corte igual a: 700 N

Colocando los datos en una tabla:

1200 N/m — 600 N — 800 N — 700 N

① ② ③

3 m — 2 m — 1 m — 2 m — 1 m — 1 m

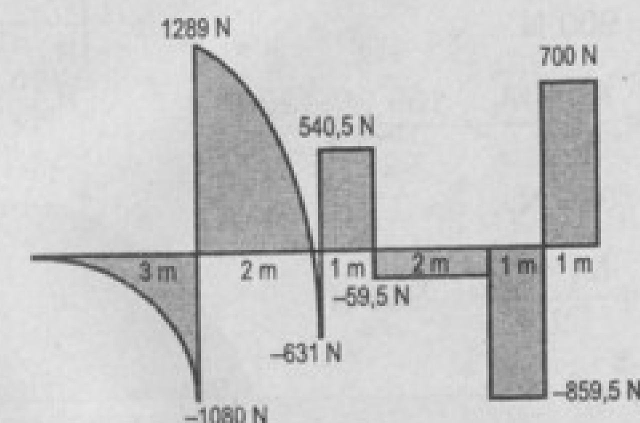
		R_1		R_2		R_3	
R. isostáticas	1080	880	1040	650	750	700
R. hiperestáticas	0	409	−409	−109,5	109,5	0
R. totales	1080	1289	631	540,5	859,5	700

Donde: $R_1 = 1080 + 1289 \Rightarrow$ $\boxed{R_1 = 2369}$

$R_2 = 631 + 540{,}5 \Rightarrow$ $\boxed{R_2 = 1171{,}5}$

$R_3 = 859{,}5 + 700 \Rightarrow$ $\boxed{R_3 = 1559{,}5}$

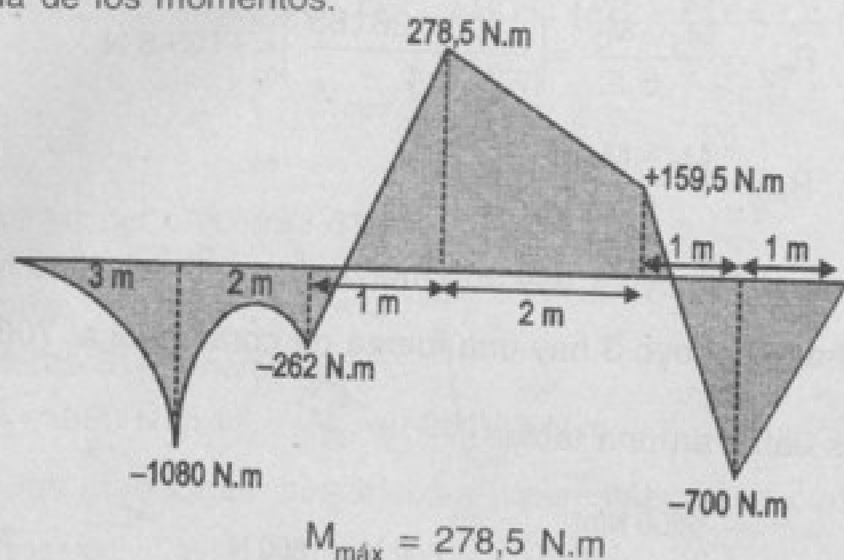
Haciendo el diagrama de fuerzas cortantes:



El valor máximo de las fuerzas cortantes es: $F_{máx} = 1289$ N

En los puntos de corte de la gráfica ha de hallarse los momentos máximo o mínimo.

Diagrama de los momentos:



$M_{máx} = 278{,}5$ N.m

831. Viga continua del problema 817, en la que $M_2 = 156$ N.m.

Resolución:

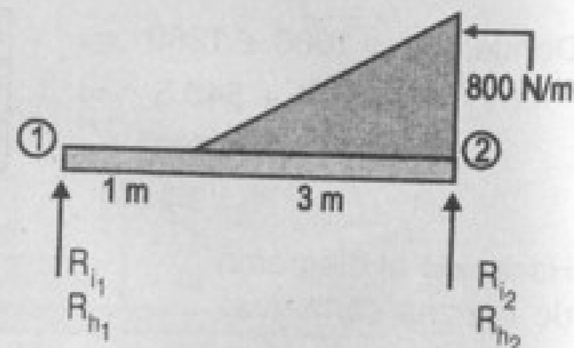
Del problema 817: $M_1 = -1200$ N.m

$M_2 = 156$ N.m (redondeando)

$M_3 = 0$

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en cada claro:

• Claro (1-2):



Por estática:

$R_{i_1} = 300$ N

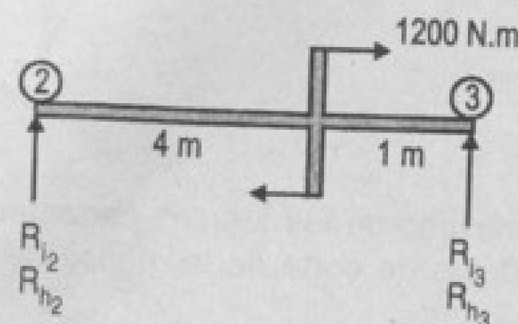
$R_{i_2} = 900$ N

$R_{h_1} = \dfrac{M_2 - M_1}{L} = \dfrac{156-(-1200)}{4}$

$R_{h_1} = 339$ N

$R_{h_2} = \dfrac{M_1 - M_2}{L} = -339$ N

• Claro (2-3):



Por estática: $R_{i_2} = -400$ N

$R_{i_3} = 400$ N

$R_{h_2} = \dfrac{M_3 - M_2}{L} = \dfrac{-156}{3} = -52$ N

$R_{h_3} = \dfrac{M_2 - M_3}{L} = 52$ N

La fuerza a la izquierda del apoyo ① es: $R_{i_1} = 600$ N.

En el diagrama-tabla:

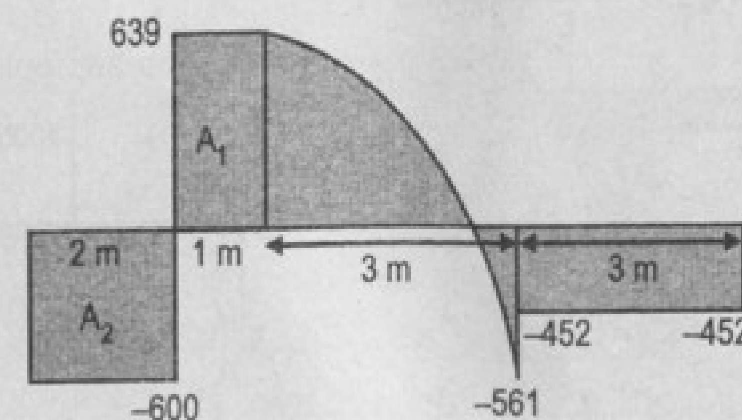
600 N — 800 N/m — 1200 N.m — ① — ② — ③ — 2 m, 1 m, 3 m, 2 m, 1 m

		R_1			R_2		R_3
R. isost.:	600		300	900		–400	400
R. hiperest.:	0		339	–339		–52	52
R. total:	600		639	561		–452	452

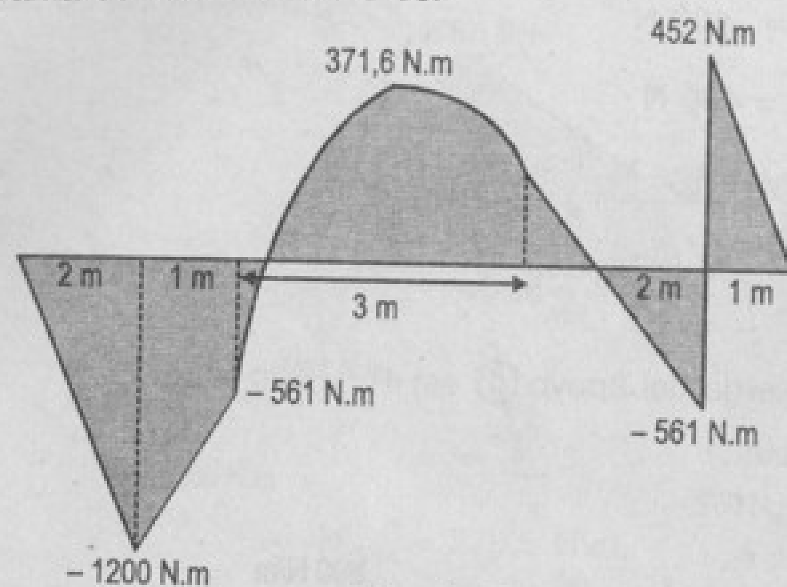
Luego:

$R_1 = 600 + 639 = 1239$ N
$R_2 = 561 - 452 = 109$ N
$R_3 = 452$ N

En el diagrama de fuerzas cortantes:



El diagrama de los momentos es:



Donde $M_{máx} = 452$ N.m

832. Viga continua del problema 824.

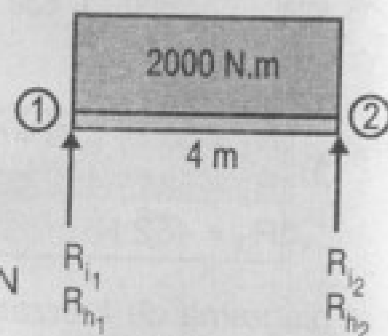
Resolución:

De los resultados del problema 824:

$M_1 = M_4 = 0 \qquad M_2 = -2900 \text{ N.m} \qquad M_3 = -6100 \text{ N.m}$

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en cada claro:

- Claro (1-2):

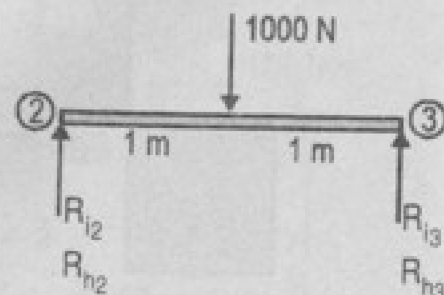


Donde: $R_{i_1} = R_{i_2} = 4000$ N

$$R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = \frac{-2900}{4} = -725 \text{ N}$$

$$R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = 725 \text{ N}$$

- Claro (2-3):

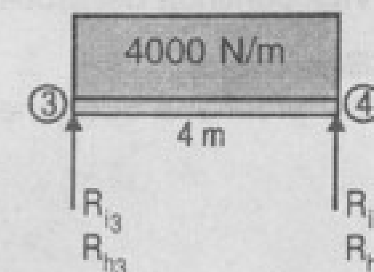


Donde: $R_{i_2} = R_{i_3} = 500$ N

$$R_{h_2} = \frac{M_3 - M_2}{L} = \frac{-6100 + 2900}{2} = -1600 \text{ N}$$

$$R_{h_3} = \frac{M_2 - M_3}{L} = 1600 \text{ N}$$

- Claro (3 - 4):



Donde: $R_{i_3} = R_{i_4} = 8000$ N

$$R_{h_3} = \frac{M_4 - M_3}{L} = \frac{6100}{4} = 1525 \text{ N}$$

$$R_{h_4} = \frac{M_3 - M_4}{L} = -1525 \text{ N}$$

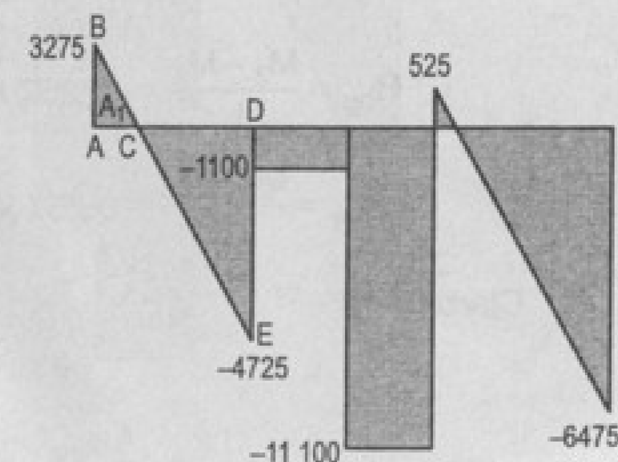
- En el diagrama-tabla:

10 000 N; 2000 N/m; 4000 N/m; ① 4 m ② 1 m 1 m ③ 4 m ④

	①	②	②	③	③	④
R_i:	4000	4000	500	500	8000	8000
R_h:	–725	725	–1600	1600	1525	–1525
R. total	3275	4725	–1100	2100	9525	6475
	R_1	R_2		R_3		R_4

Así:
$R_1 = 3275$ N
$R_2 = 4725 - 1100 = 3625$ N
$R_3 = 2100 + 9525 = 11\,625$ N
$R_4 = 6475$

Diagrama de fuerzas cortantes:



Por semejanza de los triángulos ABC y CDE; AC = 1,6375 m

Donde: $A_1 = M_{máx} = \frac{(3275)(1,6375)}{2} \Rightarrow M_{máx} = 2681,4$ N.m

833. Viga continua del problema 825 en el que $M_2 = -2,04$ kN.m y $M_3 = -2,81$ kN.m

Resolución:

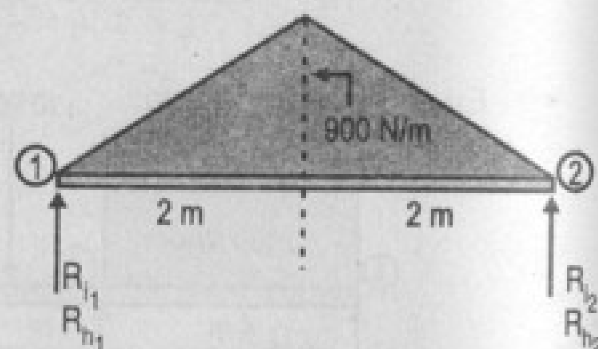
Del problema 825 tenemos: $M_1 = M_4 = 0$

$M_2 = -2,04$ kN.m (aprox.)

$M_3 = -2,81$ kN.m (aprox.)

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas:

- Claro (1-2):

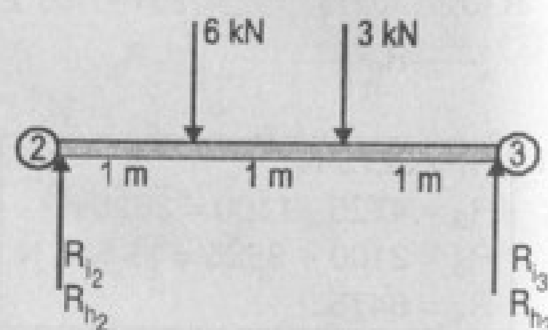


Donde: $R_{i_1} = R_{i_2} = 1,8$ kN

$R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = -0,51$ kN

$R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = 0,51$ kN

- Claro (2-3):



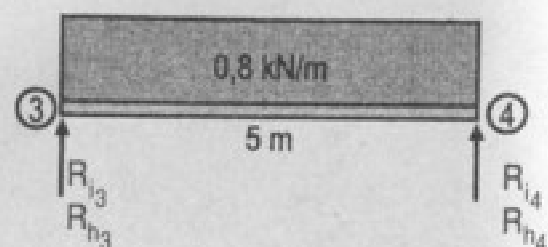
Donde: $R_{i_2} = 5$ kN

$R_{i_3} = 4$ kN

$R_{h_2} = \frac{M_3 - M_2}{L} = -0,257$ kN

$R_{h_3} = \frac{M_2 - M_3}{L} = 0,257$ kN

- Claro (3-4):

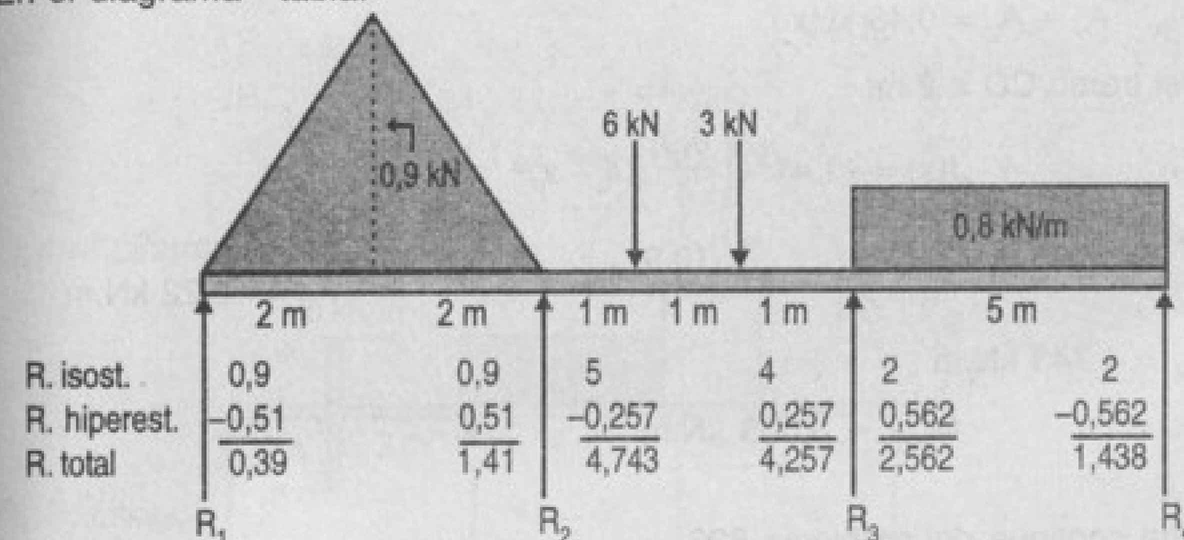


Donde: $R_{i_3} = R_{i_4} = 2$ kN

$R_{h_3} = \frac{M_4 - M_3}{L} = 0,562$ kN

$R_{h_4} = \frac{M_3 - M_4}{L} = -0,562$ kN

En el diagrama - tabla:



R. isost.	0,9	0,9	5	4	2	2
R. hiperest.	−0,51	0,51	−0,257	0,257	0,562	−0,562
R. total	0,39	1,41	4,743	4,257	2,562	1,438

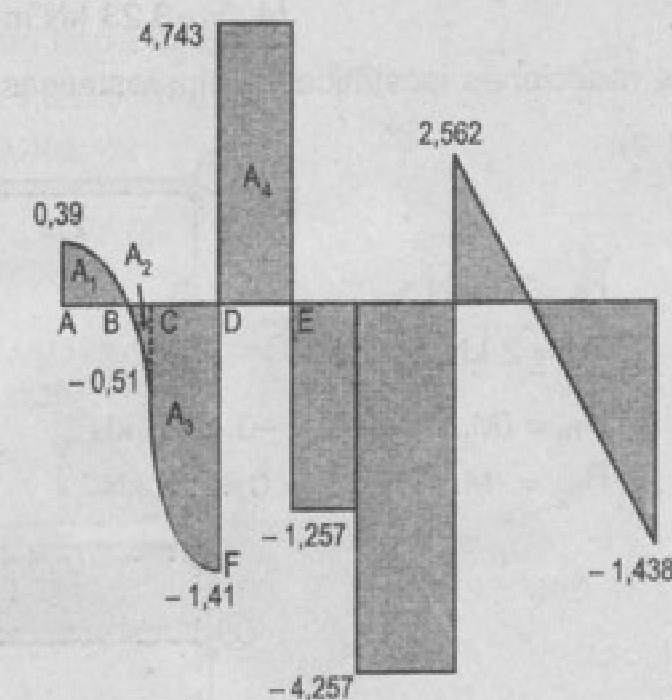
Donde: $R_1 = 0,39$ kN

$R_2 = 1,41 + 4,743 = 6,153$ kN

$R_3 = 4,257 + 2,562 = 6,819$ kN

$R_4 = 1,438$ kN

Diagrama de fuerzas cortantes:



$M_{máx} = A_4 + A_3 + A_2 + A_1$ ...(1)

Como la curva es generada por las ecuaciones:

Tramo ABC: $f(x) = 0{,}39 - \dfrac{(0{,}9)}{4}x^2;\ x \in \langle 0;2\rangle$

Donde AB = 1,316 m y AC = 2 m

Así: $A_1 + A_2 = \int_0^{1{,}316}\left(0{,}39 - \dfrac{0{,}9}{4}x^2\right)dx + \int_{1{,}316}^{2}\left(0{,}39 - \dfrac{0{,}9}{4}x^2\right)dx$

$A_1 + A_2 = 0{,}48$ kN.m

Del tramo CD = 2 m:

$$f(x) = -1{,}41 + \left(\dfrac{0{,}9}{4}\right)(4-x)^2$$

$$A_3 = \int_2^4\left(-1{,}41 + \dfrac{(0{,}9)}{4}(4-x)^2\right)dx \Rightarrow A_3 = -2{,}22 \text{ kN.m}$$

$A_4 = 4{,}743$ kN.m

Así: $M_{máx} = 3{,}003$ kN.m

834. Viga continua del problema 826.

Resolución:

Del problema 826, tenemos:

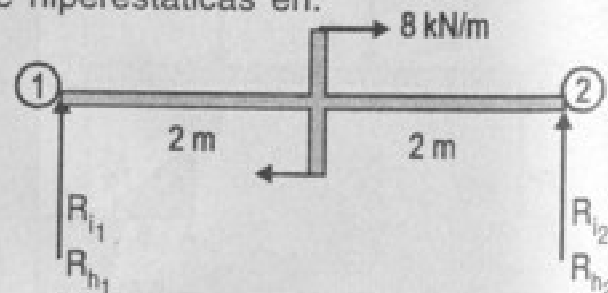
$M_1 = M_4 = 0$

$M_2 = -1{,}69$ kN.m (aprox.)

$M_3 = -3{,}23$ kN.m (aprox.)

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en:

- Claro (1-2):



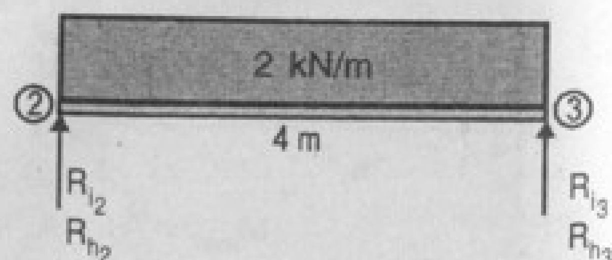
Donde: $R_{i_1} = -2$ kN

$R_{i_2} = 2$ kN

$R_{h_1} = (M_2 - M_1)/L = -0{,}4225$ kN

$R_{h_2} = (M_1 - M_2)/L = 0{,}4225$ kN

- Claro (2-3):

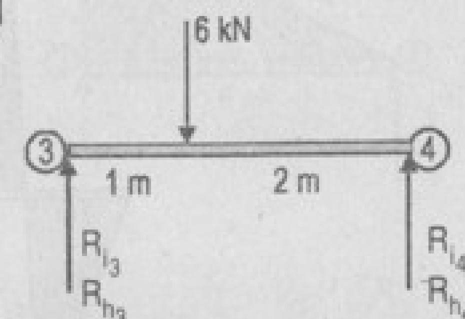


Donde: $R_{i_2} = R_{i_3} = 4$ kN

$R_{h_2} = (M_3 - M_2) / L = -0{,}385$ kN

$R_{h_3} = (M_2 - M_3) / L = +0{,}385$ kN

- Claro (3-4):



Donde: $R_{i_3} = 4$ kN

$R_{i_4} = 2$ kN

$R_{h_3} = (M_4 - M_3) / L = 1{,}077$ kN

$R_{h_4} = (M_3 - M_4) / L = -1{,}077$ kN

En el diagrama-tabla:

8 kN.m — 2 kN/m — 6 kN

	2 m	2 m	4 m		1 m	2 m
R. isostáticas	−2	2	4	4	4	2
R. hiperest.	−0,4225	0,4225	−0,385	0,385	1,077	−1,077
R. total	−2,4225	2,4225	3,615	4,385	5,077	0,923
	R_1		R_2		R_3	R_4

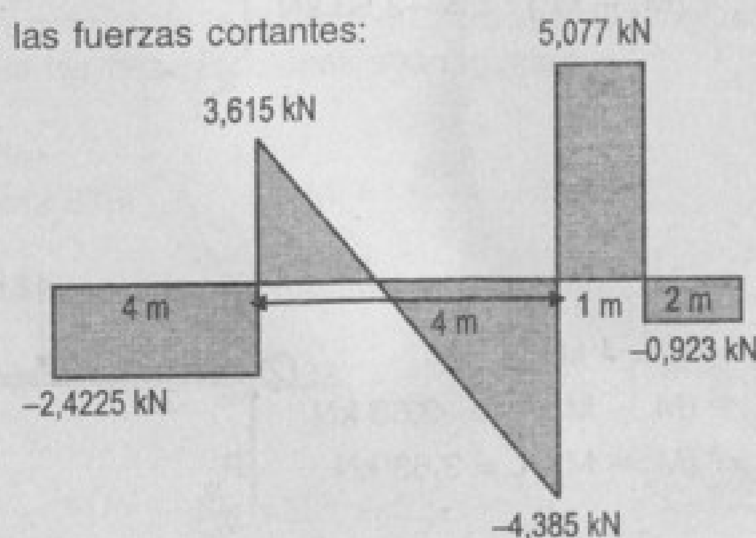
$R_1 = -2{,}4225$ kN (apunta hacia abajo)

$R_2 = 2{,}4225 + 3{,}615 = 6{,}0375$ kN

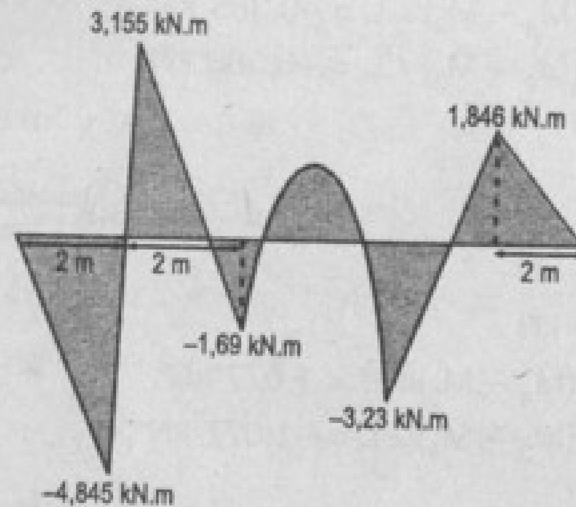
$R_3 = 4{,}385 + 5{,}077 = 9{,}462$ kN

$R_4 = 0{,}923$ kN

Gráfica de las fuerzas cortantes:



Gráfica de los momentos:



Así: $M_{máx} = 3,155$ kN.m

835. Viga continua del problema 827, en el que $M_2 = -1,895$ kN.m y $M_3 = -16,42$ kN.m

Resolución:

Por el problema 827, tenemos:

$M_1 = -12$ kN.m $\qquad M_2 = -1,895$ kN.m

$M_3 = -16,42$ kN.m $\qquad M_4 = 0$

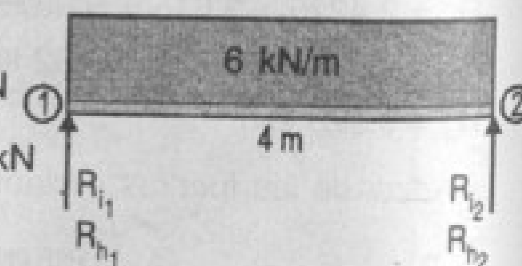
Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en:

- Claro 1:

Donde: $R_{i_1} = R_{i_2} = 12$ kN

$R_{h_1} = (M_2 - M_1) / L = 2,53$ kN

$R_{h_2} = (M_1 - M_2) / L = -2,53$ kN

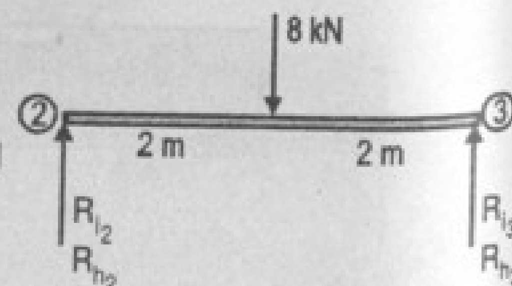


- Claro 2:

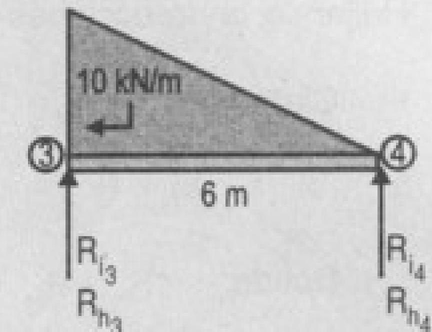
Donde: $R_{i_2} = R_{i_3} = 4$ kN

$R_{h_2} = (M_3 - M_2)/L = -3,63$ kN

$R_{h_3} = (M_2 - M_3)/L = 3,63$ kN



- Claro 3:



Donde: $R_{i_3} = 20$ kN

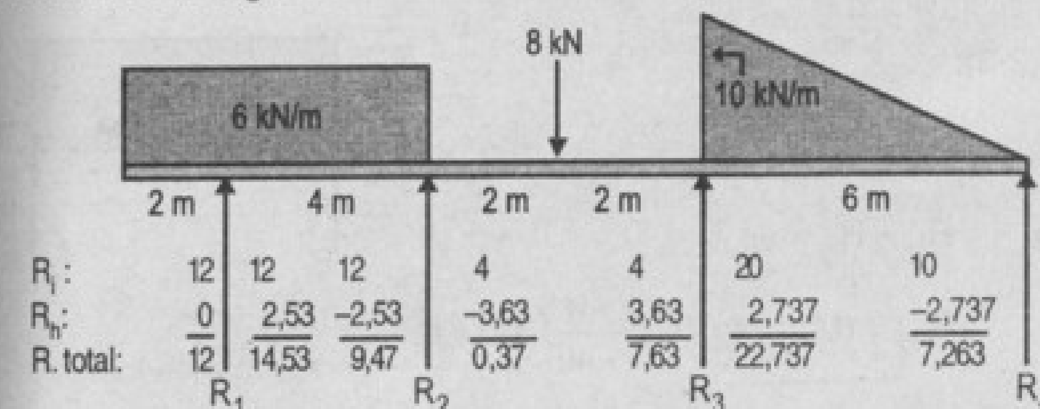
$R_{i_4} = 10$ kN

$R_{h_3} = (M_4 - M_3) / L = 2,737$ kN

$R_{h_4} = (M_3 - M_4) / L = -2,737$ kN

La reacción a la izquierda del apoyo (1) es: 12 kN $= R_{i_0}$

Llevando al diagrama-tabla:



Así: $R_1 = 12 + 14,53 = 26,53$ kN

$R_2 = 9,47 + 0,37 = 9,84$ kN

$R_3 = 7,63 + 22,73 = 30,36$ kN

$R_4 = 7,263$ kN

836. En la viga continua de la figura P-815 calcular la longitud x de los voladizos de manera que las tres reacciones sean iguales.

Resolución:

Del problema 815: $\qquad M_1 = -\dfrac{wx^2}{2} = M_3 \qquad$ ...(1)

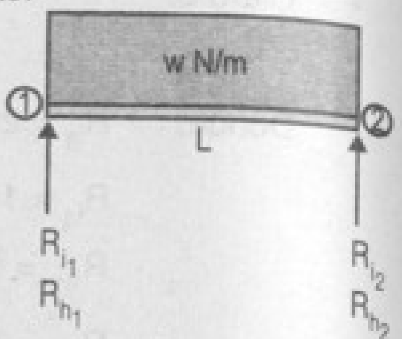
Por el teorema de los tres momentos (ver prob. 815):

$$L\,M_1 + 2(2L)\,M_2 + LM_3 = -\left(\frac{wL^3}{4} + \frac{wL^3}{4}\right)$$

Así: $\qquad M_2 = \dfrac{wx^2}{4} - \dfrac{wL^2}{8} \qquad$ ...(2)

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas:

- Claro (1-2):

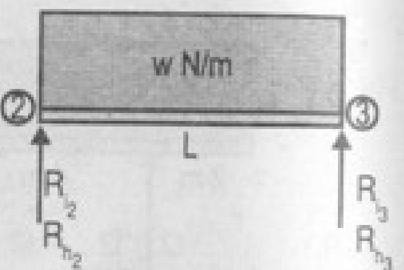


Donde: $R_{i_1} = R_{i_2} = wL/2$

$$R_{h_1} = (M_2 - M_1)/L = \frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{L^2}{2}\right)$$

$$R_{h_2} = (M_1 - M_2)/L = \frac{-w}{4L}\left(3x^2 - \frac{L^2}{2}\right)$$

- Claro (2-3):



Donde: $R_{i_2} = R_{i_3} = wL/2$

$$R_{h_2} = (M_3 - M_2)/L = -\frac{w}{4L}(3x^2 - L^2)$$

$$R_{h_3} = (M_2 - M_3)/L = \frac{w}{4L}(3x^2 - L^2)$$

A la izquierda del apoyo (1) hay una fuerza isostática: $R_{i_0} = wx$.

A la derecha del apoyo (3) hay una fuerza isostática: $R_{i_0} = wx$

En el diagrama-tabla:

	x	R_1	L	R_2	L	R_3	x
R. isostát.	wx	wL/2		wL/2	wL/2		wL/2	wx
R. hiperest.:	0	$\frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{L^2}{2}\right)$		$-\frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{L^2}{2}\right)$	$-\frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{L^2}{2}\right)$		$\frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{L^2}{2}\right)$	0
R. totales:	$\overline{wx}$	$\frac{w}{4L}\left(3x^2 + \frac{3L^2}{2}\right)$		$-\frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{5L^2}{2}\right)$	$-\frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{5L^2}{2}\right)$		$\frac{w}{4L}\left(3x^2 + \frac{3L^2}{2}\right)$	$\overline{wx}$

Así: $$R_1 = wx + \frac{w}{4L}\left(3x^2 + 3\frac{L^2}{2}\right) \quad ...(3)$$

$$R_2 = -\frac{w}{4L}\left(3x^2 - 5\frac{L^2}{2}\right) - \frac{w}{4L}\left(3x^2 - 5\frac{L^2}{2}\right) \quad ...(4)$$

$$R_3 = \frac{w}{4L}\left(3x^2 + 3\frac{L^2}{2}\right) + wx \quad ...(5)$$

Igualando $R_1 = R_2$, por condición del problema:

$$wx + \frac{w}{4L}\left(3x^2 + \frac{3L^2}{2}\right) = -\frac{w}{4L}\left(3x^2 - \frac{5L^2}{2}\right)(2)$$

Simplificando: $4Lx + 3x^2 + \frac{3L^2}{2} = -6x^2 + 5L^2$

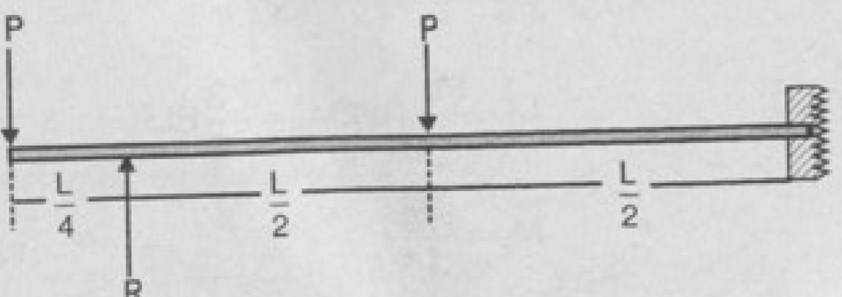
o $18x^2 + 8Lx - 7L^2 = 0$

Resolviendo: $x = \left(\frac{\sqrt{142} - 4}{18}\right)L \Rightarrow \boxed{x = 0{,}44\ L}$

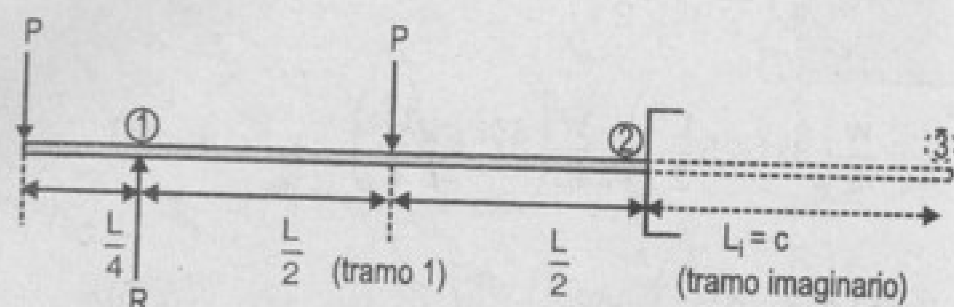
837, 838: problemas ilustrativos.

En los siguientes problemas se supone que los empotramientos de los extremos de las vigas son perfectos. A menos que se diga lo contrario, los apoyos están al mismo nivel.

839. Determinar la reacción en el apoyo en la viga de la figura.



Resolución:
Del diagrama:



Utilizando el artificio de crear un tramo imaginario donde no existen ni fuerzas ni momento.

Por el teorema de los tres momentos:

$$LM_1 + 2LM_2 + (0)M_3 = -\left(6\frac{A\bar{a}}{L_1} + 6\frac{A\bar{b}}{L_2}\right)$$

Así: $LM_1 + 2LM_2 = -6\dfrac{A\bar{a}}{L_1}$ ...(1)

(ya que $M_3 = 0 \wedge \dfrac{6A\bar{b}}{L_2} = 0$ son los valores que no existen)

Del **caso 1**, por efecto de la carga P:

$$\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2)$$

Para el problema a = L/2.

Así: $\dfrac{6A\bar{a}}{L_1} = \dfrac{3}{8}PL^2$ ...(2)

En el apoyo ①: $M_1 = -\dfrac{PL}{4}$ ...(3)

(3) y (2) en (1): $L\left(-\dfrac{PL}{4}\right) + 2M_2 = -\dfrac{3}{8}PL^2$

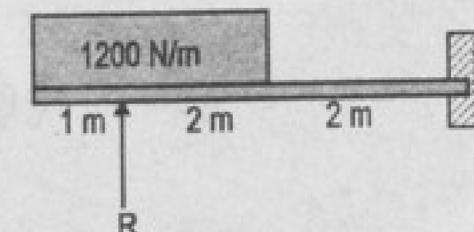
donde: $M_2 = \dfrac{-PL}{16}$ ...(4)

Para hallar la reacción R, tomamos momentos en ②:

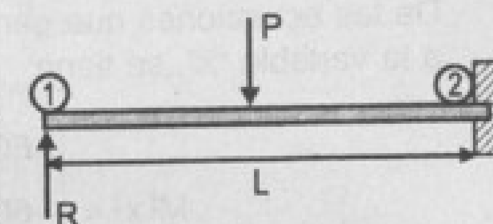
$$M_2 = -\frac{5}{4}PL + RL - \frac{PL}{2}$$

Colocando sus valores y simplificando: $\boxed{R = \dfrac{27}{16}P}$

840. En la viga empotrada y apoyada de la figura, determinar la reacción en el apoyo y el momento flexionante máximo positivo.



Resolución:
Del problema anterior podemos simplificar el teorema de los tres momentos en vigas empotradas, así:



Así:

$$LM_1 + 2(L + L_i)M_2 + (L_i)M_3 = -\left(6\frac{A\bar{a}}{L} + 6\frac{A\bar{b}}{L_i}\right)$$

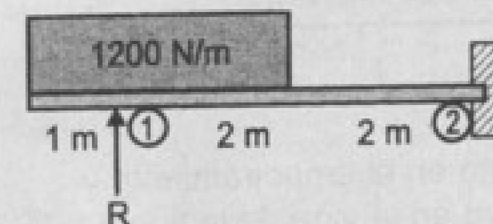
Pero L_i es una cantidad que no existe, así $L_i = 0$.

Además el término $\dfrac{6A.\bar{b}}{L_i}$ no existe, también es nulo.

La ecuación se simplifica así: $LM_1 + 2LM_2 = -\dfrac{6A.\bar{a}}{L}$ ... (1)

que es la expresión que frecuentemente usaremos:

Del problema:



Para $\dfrac{6A.\bar{a}}{L}$ estamos en el **caso 5**:

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{w}{4L}[b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2)]$$

Para el problema: $a = 0$; $b = 2$ m; $L = 4$ m; $w = 1200$ N/m

Luego: $\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{1200}{4(4)}(2^2(2.4^2 - 2^2)) = 8400$ N.m²

En el apoyo ①: $M_1 = -(1200)(1)(0{,}5) = -600$ N.m

En la ecuación (1): $4(-600) + 2(4)M_2 = -8400$

$M_2 = -750$ Nm

Tomando momentos en ②:

$$M_2 = -(1200)(3)\left(2 + \frac{3}{2}\right) + 4R$$

$$-750 = -12\,600 + 4R$$

Así: $\boxed{R = 2962{,}5 \text{ N}}$

De las ecuaciones que generan la gráfica de los momentos flectores respecto a la variable "x", se tiene:

$$M(x) = \begin{cases} -600x^2 ; \; x \in \langle 0;1 \rangle \\ -600x^2 + 2962{,}5(x-1); \; x \in \langle 1;3 \rangle \\ -3600(x-1{,}5) + 2962{,}5(x-1); \; x \in \langle 3;5 \rangle \end{cases}$$

Alcanza el valor máximo para:

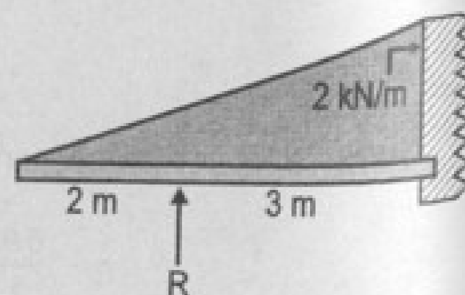
$$M'(x) = -1200x + 2962{,}5 = 0; \; x \in \langle 1;3 \rangle$$

$$x = 2{,}46875$$

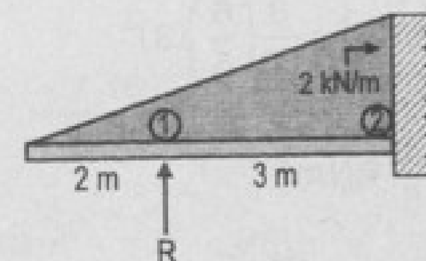
Así: $M(2{,}46875) = -600(2{,}46875)^2 + 2962{,}5(2{,}46875 - 1)$

$\therefore$ $\boxed{M_{máx} = 694{,}34 \text{ N.m}}$

841. Determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo en la viga de la figura.



Resolución:

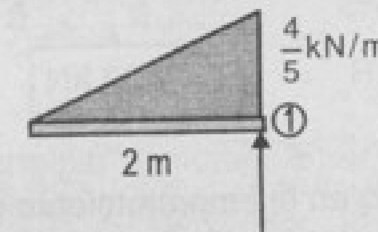


Aplicando el teorema de los tres momentos a la viga empotrada:

$$3M_1 + 6M_2 = -\left(6\frac{A.\bar{a}}{L_1}\right) \quad \text{...(1)}$$

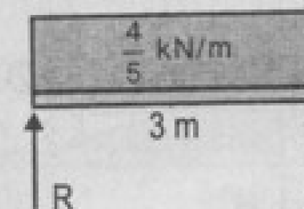
Aplicando momentos en el apoyo ①:

$$M_1 = -\frac{4}{5}\frac{(2)}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{15} \text{ kN.m} \quad \text{...(2)}$$



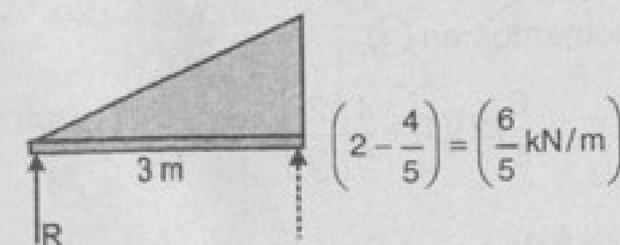
Para hallar $6\frac{A.\bar{a}}{L_1}$, tenemos la superposición de dos cargas:

- Carga 1:



Caso 2: $6\frac{A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{wL^3}{4} = \frac{4}{5}\frac{(3)^3}{(4)} = \frac{27}{5}$ kN.m² ...(α)

- Carga 2:



Caso 3: $6\frac{A.\bar{a}_2}{L_1} = \frac{8}{60}wL^3 = \frac{8}{60}\left(\frac{6}{5}\right)(3)^3$

$$6\frac{A.\bar{a}_2}{L_1} = \frac{108}{25}\ \text{kN.m}^2 \qquad ...(\beta)$$

Sumando (α) y (β): $6\frac{A.\bar{a}}{L_1} = \left(\frac{27}{5}+\frac{108}{25}\right) = \frac{243}{25}\ \text{kN.m}^2$

Llevando los resultados a (1): $3\left(-\frac{8}{15}\right)+6M_2 = -\frac{243}{25} \Rightarrow \boxed{M_2 = -1{,}35\ \text{kN.m}}$

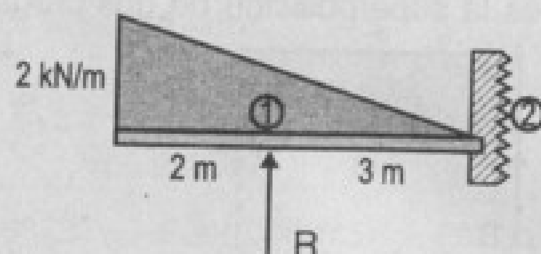
Tomando momentos en ②:

$$M_2 = 3R - 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{203}{150}+\frac{25}{3}\right)\frac{1}{3} = R \Rightarrow \boxed{R = 2{,}33\ \text{kN}}$$

842. Determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo en la viga empotrada y apoyada de la figura.

Resolución:



Por el teorema de los tres momentos sobre la viga empotrada:

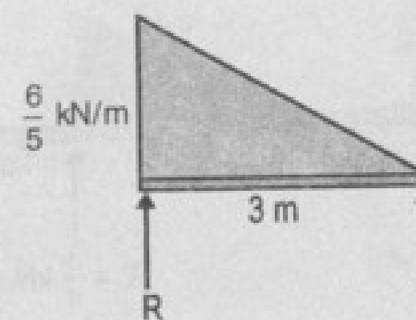
$$3M_1 + 6M_2 = -6\frac{A.\bar{a}}{L_1} \qquad ...(1)$$

Tomando momentos en ①

$$M_1 = -\frac{6}{5}(2)(1)+\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\right)(2) = \frac{-52}{15}\ \text{kN.m} \qquad ...(\alpha)$$

Para hallar $6\frac{A.\bar{a}}{L_1}$, tenemos:

Caso 4:



$$\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = \frac{7}{60}wL^3 = \frac{7}{60}\frac{(6)}{5}(3)^3$$

Así. $\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = \frac{189}{50}\ \text{kN.m}^2 \qquad ...(\beta)$

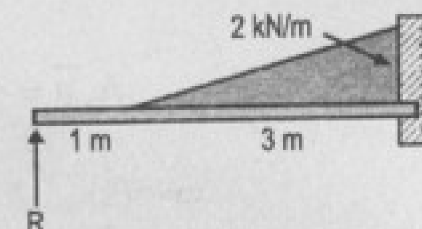
(α) y (β) en (1): $3\left(\frac{-52}{15}\right)+6M_2 = -\frac{189}{50}$

Donde: $\boxed{M_2 = \frac{331}{300}\ \text{kN.m}}$

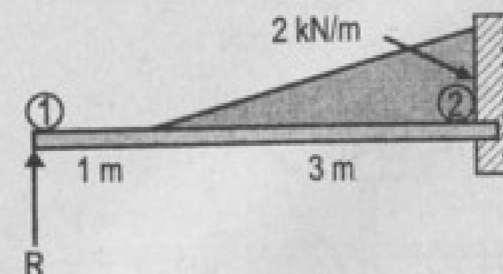
Tomando momentos en ②:

$$\frac{331}{300} = 3R - \left(\frac{2}{2}\right)(5)\left(\frac{2}{3}\right)(5) \Rightarrow \boxed{R = \frac{1777}{300}\ \text{k.N}}$$

843. Para la viga de la figura, determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo.



Resolución:



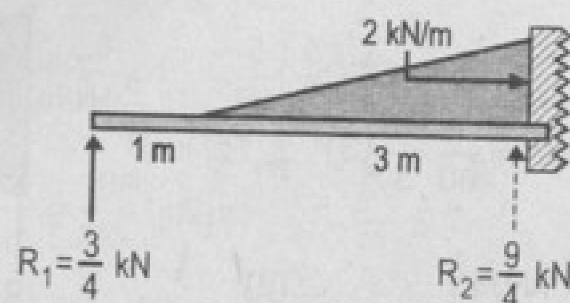
Por el teorema de los tres momentos sobre la viga empotrada:

$$4M_1 + 8M_2 = -6\frac{A.\bar{a}}{L_1} \qquad ...(1)$$

Por definición de momentos:

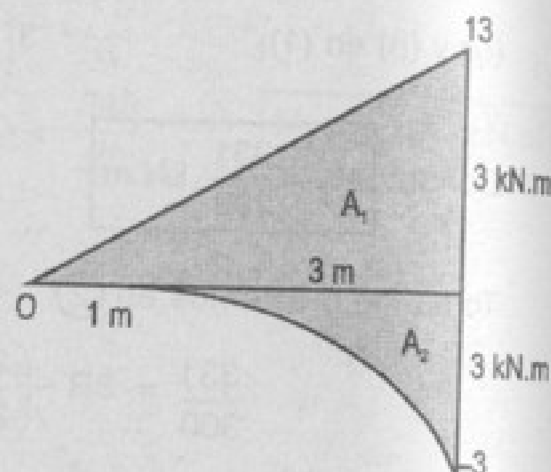
$$M_1 = 0 \qquad ...(2)$$

Hallando $6\dfrac{A.\bar{a}}{L_1}$:



Graficando los momentos reaccionantes:

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}x\,;\; x\in\langle 0;\,4\rangle\\[2mm] -\dfrac{(x-1)^3}{9}\,;\; x\in\langle 1;\,4\rangle\end{cases}$$



Así: $A_1\,.\,\bar{a}=\dfrac{3}{2}(4)\left(\dfrac{2}{3}\right)(4)=16$

$$A_2.\bar{a}=\frac{1}{4}(3)(3)\left(1+\frac{4}{5}(3)\right)=\frac{153}{20}$$

Donde: $A\,.\,\bar{a}=16-\dfrac{153}{20}=\dfrac{167}{20}$

Luego: $6\dfrac{A.\bar{a}}{L}=\dfrac{6}{4}\dfrac{(167)}{20}=\dfrac{501}{40}\ \text{kN.m}^2$

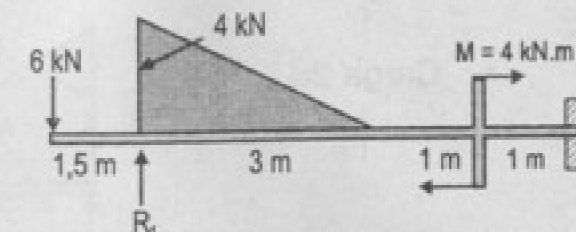
En (1): $8M_2=-\dfrac{501}{40}\ \Rightarrow\ M_2=-\dfrac{501}{320}\ \text{kN.m}\ \Rightarrow\ \boxed{M_2=-1566\ \text{N.m}}$

Tomando momentos en ②:

$$4R-\frac{1}{2}(2)(3)\left(\frac{3}{3}\right)=M_2$$

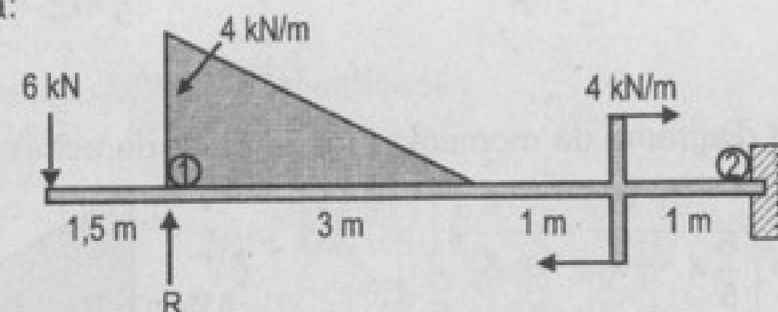
$$4R=3-\frac{501}{320}\ \Rightarrow\ \boxed{R=359\ \text{kN}}$$

344. Determinar la reacción en el apoyo de la viga de la figura.



Resolución:

Del sistema:



Por momentos en una viga empotrada:

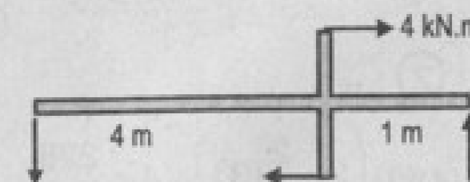
$$5M_1+10M_2=-\left(6\frac{A.\bar{a}}{L}\right)\quad\ldots(1)$$

Por momentos en el apoyo ①:

$$M_1=-(1{,}5)(6)=-9\ \text{kN.m}\ \ldots(2)$$

Para hallar $6\dfrac{A.\bar{a}}{L}$ de dos cargas superpuestas:

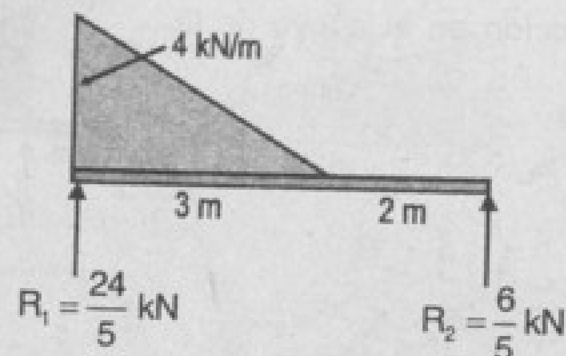
- Carga 1:



Caso 7: $6\dfrac{A.\bar{a}_1}{L}=-\dfrac{M}{L}(3a^2-L^2)$

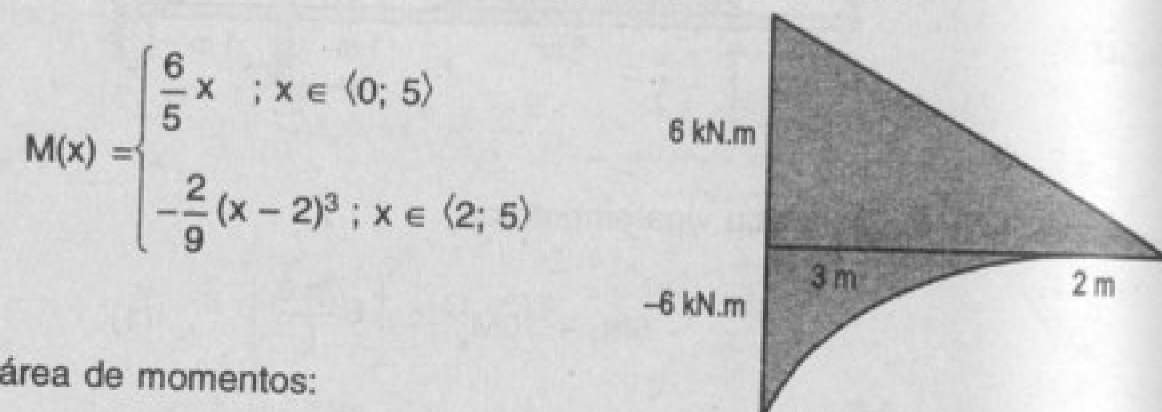
Así: $6\dfrac{A.\bar{a}_1}{L}=-\dfrac{4}{5}(3(4)^2-5^2)=-\dfrac{92}{5}\ \text{kN.m}^2$

- Carga 2:



Haciendo el diagrama de momentos (de la parte derecha):

$$M(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & ; x \in \langle 0; 5\rangle \\ -\frac{2}{9}(x-2)^3 & ; x \in \langle 2; 5\rangle \end{cases}$$



Por área de momentos:

$$A\,.\,\bar{a} = \frac{1}{2}(6)(5)\left(\frac{1}{3}.5\right) - \frac{1}{4}(3)(6)\left(\frac{1}{5}(3)\right) \Rightarrow A\,.\,\bar{a} = \frac{223}{10}$$

Luego: $\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6}{5}\frac{(223)}{10} \Rightarrow \frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{669}{25}$ kN.m² ... (3)

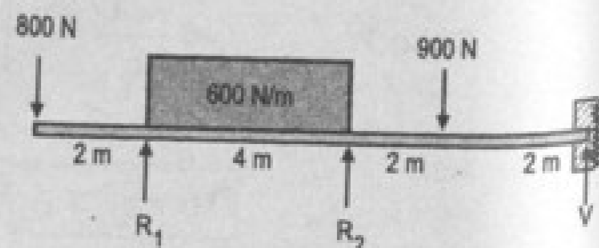
Llevando (2) y (3) en (1):

$$5(-9) + 10M_2 = -\frac{669}{25} \Rightarrow M_2 = \frac{228}{125} \text{ kN.m}$$

Tomando momentos en ②:

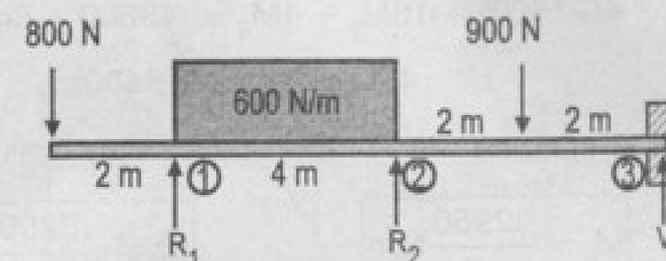
$$-6(6,5) + 5R - \frac{1}{2}(4)(3)\left(2 + \frac{2}{3}(3)\right) + 4 = \frac{228}{125} \Rightarrow \boxed{R = \frac{7603}{625}\text{kN}}$$

845. Calcular los momentos en los apoyos y empotramientos en la viga de la figura, y trazar el diagrama de fuerza cortante.



Resolución:

Del diagrama:



Por el teorema de los tres momentos:

- Claros (1-2) y (2-3):

$$4M_1 + 16M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}\right) \quad ...(1)$$

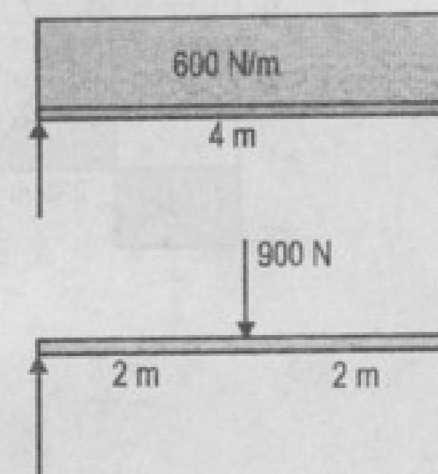
- Claro (2-3) (viga empotrada):

$$4M_2 + 8M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2}\right) \quad ...(2)$$

Por momentos en ①:

$$\boxed{M_1 = -(800)(2) = -1600 \text{ N.m}} \quad ...(3)$$

Calculando (6A. $\bar{a}$ /L):



Por **caso 2:**

$$\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{wL^3}{4} = \frac{(600)(4)^3}{4} = 9600$$

Por **caso 1:**

$$6\frac{A.\bar{a}_2}{L_2} = 6\frac{A.\bar{b}_2}{L_2} = \frac{P}{L}a\ (L^2 - a^2)$$

Para el problema: a = 2; P = 900; L = 4

$$6\frac{A.\bar{a}_2}{L_2} = 6\frac{A.\bar{b}_2}{L_2} = \frac{(900)(2)}{4}(4^2 - 2^2) = 5400$$

Llevando a las ecuaciones (1) y (2):

$$4(-1600) + 16M_2 + 4M_3 = -(9600 + 5400)$$
$$4M_2 + 8M_3 = -(5400)$$

Resolviendo el sistema:

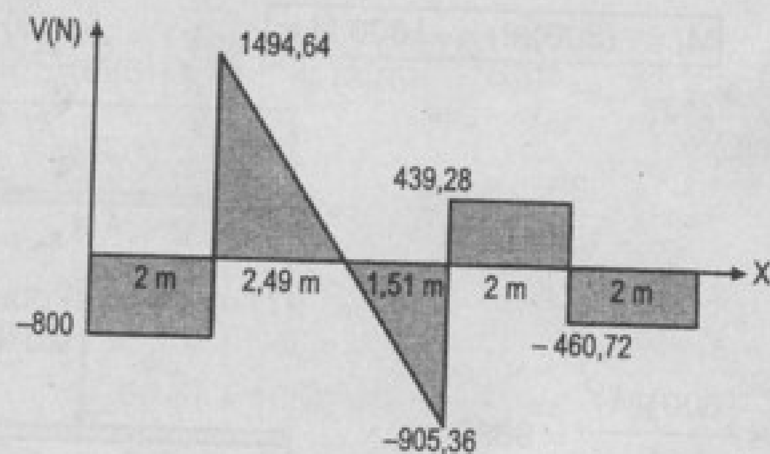
$$\boxed{M_2 = -\frac{2950}{7}\text{N.m}} \qquad \boxed{M_3 = -\frac{3250}{7}\text{N.m}}$$

Tomando momentos en ③ y en ②:

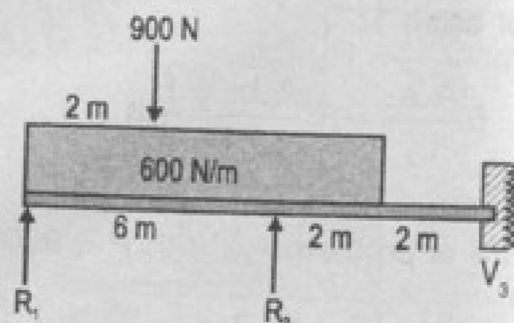
$$\begin{cases} -800(10)+8R_1+4R_2-(600)(4)(6)-900(2)=M_3 \\ -800(6)+4R_1-(600)(4)(2)=M_2 \end{cases}$$

Resolviendo:
R_1= 2294,64 N
R_2= 1344,64 N

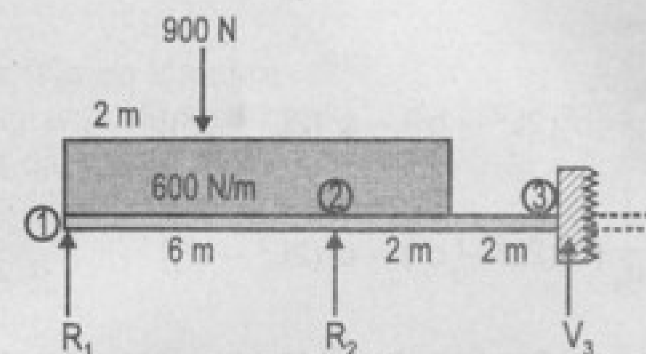
Diagrama de cortantes:



846. Dibujar el diagrama de fuerza cortante en la viga continua de la figura.



Resolución:
Del diagrama:



Por el teorema de los tres momentos:

- Claros (1-2) y (2-3):

$$6M_1 + 20M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}\right) \quad \text{... (1)}$$

- Claro (2-3), por viga empotrada:

$$4M_2 + 8M_3 = -\left(\frac{6\,A.\bar{a}_2}{L_2}\right) \quad \text{... (2)}$$

Por definición de momentos: $\boxed{M_1 = 0}$ ... (3)

Hallando (6 A . $\bar{a}$/L):

- Claro (1-2): (dos cargas superpuestas)

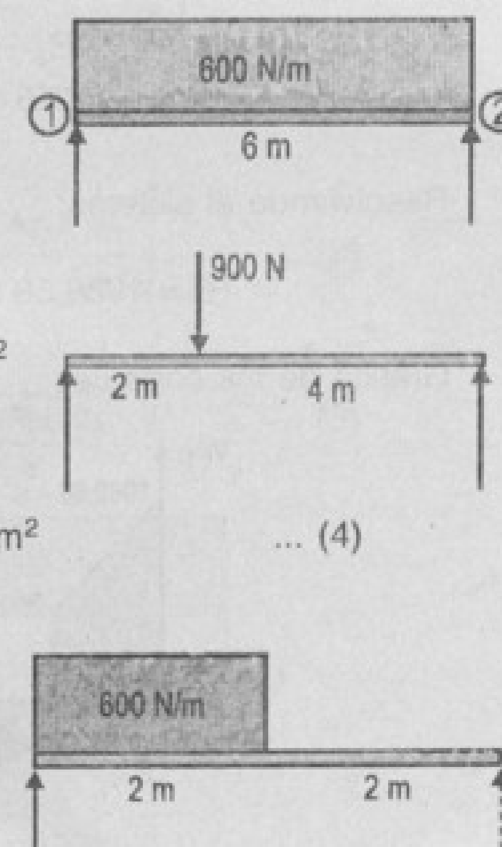
$$\frac{6\,A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{(600)(6)^3}{4} = 32\,400 \text{ N.m}^2$$

$$\frac{6\,A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{(900)}{6}(2)(6^2 - 2^2) = 9600 \text{ N.m}^2$$

Sumando las cargas:

$$\frac{6\,A.\bar{a}_1}{L_1} = (32\,400 + 9600) = 42\,000 \text{ N.m}^2 \quad \text{... (4)}$$

- Claro (2-3):



Caso 5

$$\frac{6\,A.\bar{a}}{L} = \frac{w}{4L}\left[b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2)\right]$$

$$\frac{6\,A.\bar{b}}{L} = \frac{w}{4L}\left[d^2(2L^2 - d^2) - c^2(2L^2 - c^2)\right]$$

Del problema: $a = 0$; $b = 2$ m ; $c = 2$ m ; $d = 4$ m

$L = 4$; $w = 600$ N/m

Así: $\frac{6\,A.\bar{a}_2}{L_2} = 4200$ N.m^2 ; $\frac{6\,A.\bar{b}_2}{L_2} = 5400$ N.m^2

En (1) y (2):

$$20M_2 + 4M_3 = -(42\,000 + 5400)$$

$$4M_2 + 8M_3 = -(4200)$$

Resolviendo:

$$\boxed{M_2 = -\frac{7550}{3}\ \text{N.m}} \qquad \boxed{M_3 = \frac{2200}{3}\ \text{N.m}}$$

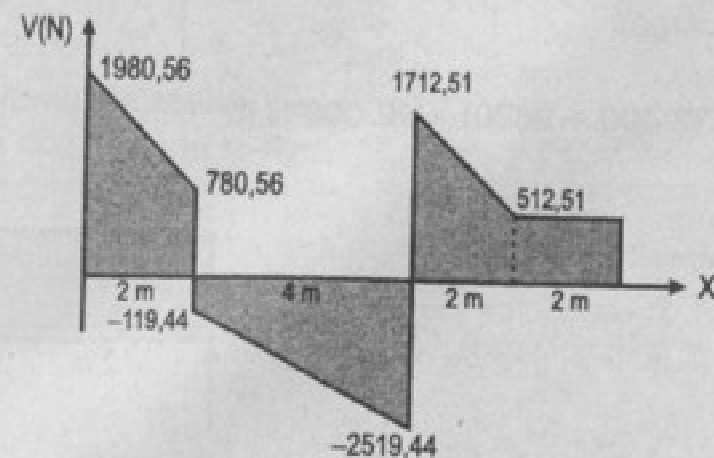
Tomando momentos en ③ y ②:

$$\begin{cases} 10R_1 + 4R_2 - 900(8) - (600)(8)(2+4) = M_3 \\ 6R_1 - 900(6-2) - (600)(6)(3) = M_2 \end{cases}$$

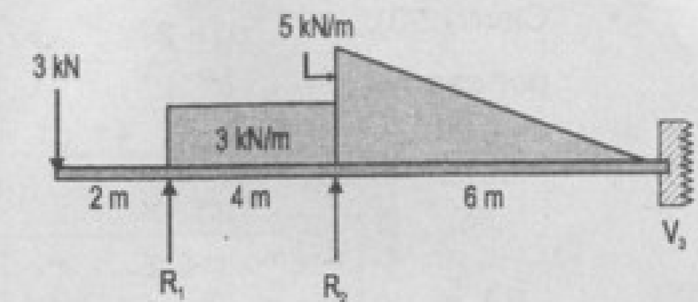
Resolviendo el sistema:

$$R_1 = 1980{,}56\ \text{N}\ ,\ R_2 = 4231{,}95\ \text{N}$$

Gráfica de los cortantes:

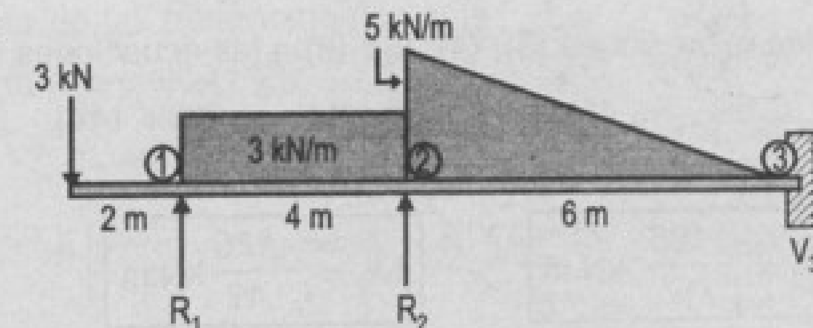


847. Calcular los momentos en los apoyos y trazar el diagrama de fuerza cortante en la viga de la figura.



Resolución:

Del diagrama:



Por el teorema de los tres momentos:

- Claros (1-2) y (2-3):

$$4M_1 + 20M_2 + 6M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}\right) \qquad ...(1)$$

- Claro (2-3) y viga empotrada:

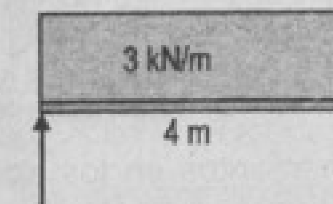
$$6M_2 + 12M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2}\right) \qquad ...(2)$$

Por definición de momentos:

$$\boxed{M_1 = -3(2) = -6\ \text{kN.m}} \qquad ...(3)$$

Para las expresiones $\frac{6A.\bar{a}}{L}$:

- Claro (1-2):



por **caso 2**: $\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{wL^3}{4} = \frac{3(4)^3}{4} = 48$ kN.m^2 ...(4)

- Claro (2-3):

por **caso 4**:

$$\frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}=\frac{8}{60}wL^3=\frac{8}{60}(5)(6)^3=144\ \text{kN.m}^2 \quad ...(5)$$

$$\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2}=\frac{7}{60}wL^3=\frac{7}{60}(5)(6)^3=126\ \text{kN.m}^2 \quad ...(6)$$

Llevando las expresiones (3), (4), (5), (6) a las ecuaciones (1) y (2):

$$4(-6)+20M_2+6M_3=-(48+144)$$

$$6M_2+12M_3=-126$$

Donde: $M_2=-\dfrac{105}{17}$ kN.m $\qquad M_3=-\dfrac{126}{17}$ kN.m

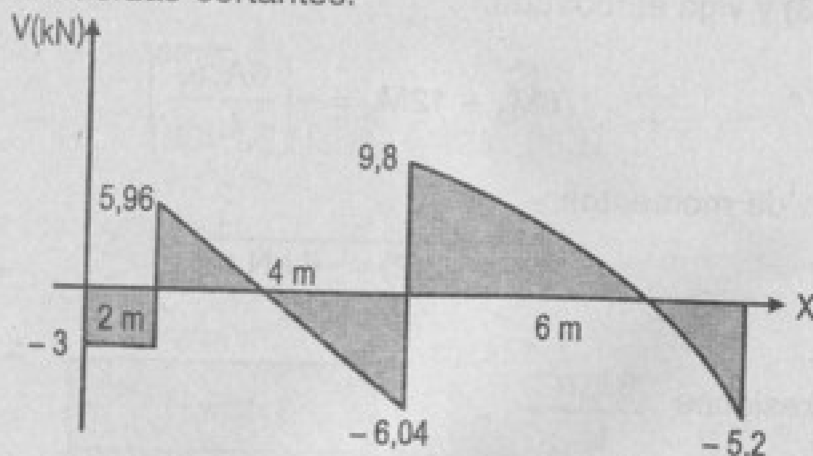
Tomando momentos en ③ y ②:

$$\begin{cases}-3(12)+10R_1+6R_2-3(4)(6+2)-\frac{1}{2}(5)(6)\left(\frac{2}{3}\times 6\right)=M_3\\ -3(6)+4R_1-3(4)(2)=M_2\end{cases}$$

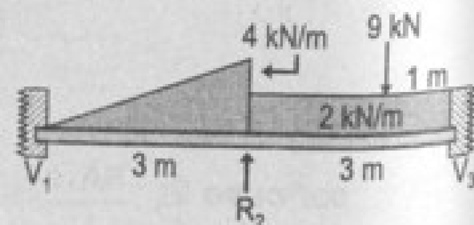
Resolviendo

$R_1=8{,}96$ kN ; $R_2=15{,}84$ kN

Gráfica de las fuerzas cortantes:

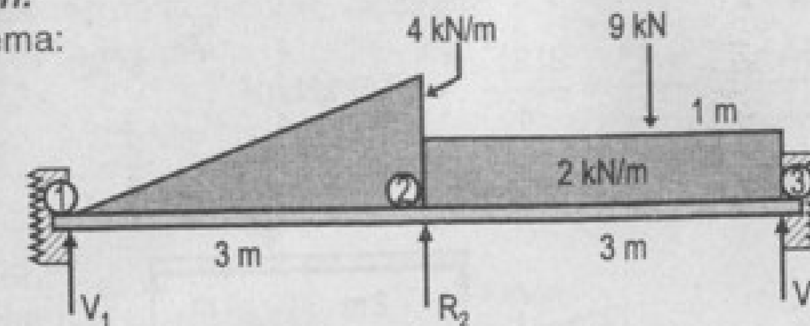


848. Determinar los momentos en los apoyos y las reacciones en la viga continua de la figura.



Resolución:

Del sistema:



Por el teorema de las tres momentos en:

- Viga empotrada-claro (1-2):

$$6M_1+3M_2=-\frac{6A.\bar{b}_1}{L_1} \quad ...(1)$$

- Claros (1-2) y (2-3):

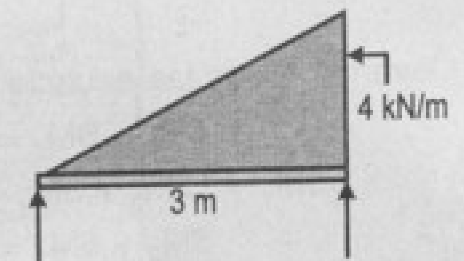
$$3M_1+12M_2+3M_3=-\left(\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1}+\frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}\right) \quad ...(2)$$

- Claro (2-3) y la viga empotrada:

$$3M_2+6M_3=-\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} \quad ...(3)$$

Hallando las expresiones $\dfrac{6A.\bar{a}}{L}$:

- Claro (1-2):



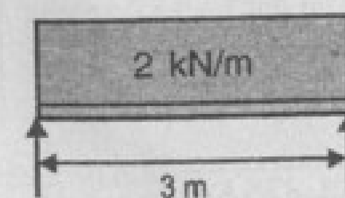
Caso 3:

$$\frac{6A}{L_1}\bar{a}_1=\frac{8}{60}wL^3=\frac{8(4)(3)^3}{60}=14{,}4\ \text{kN.m}^2 \quad ...(4)$$

$$\frac{6A}{L_1}\bar{b}_1=\frac{7}{60}wL^3=\frac{7(4)(3)^3}{60}=12{,}6\ \text{kN.m}^2 \quad ...(5)$$

- Claro (2-3); hay dos cargas superpuestas.

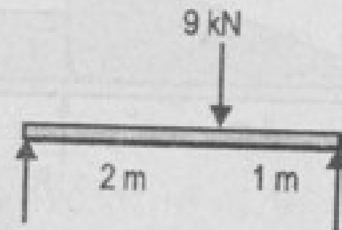
Carga 1:



Caso 2:

$$\frac{6A}{L_1}\bar{a}_{2_1} = \frac{6A\bar{b}_{2_1}}{L_2} = \frac{wL^3}{4} = \frac{2(3)^3}{4} = 13,5 \text{ kN.m}^2$$

Carga 2:



Caso 1:

$$\frac{6A.\bar{a}_{2_2}}{L_2} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2) \; ; \; a = 2 \;\Rightarrow\; \frac{6A.\bar{a}_{2_2}}{L_2} = \frac{9(2)}{3}(3^2 - 2^2) = 30 \text{ kN.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{b}_{2_2}}{L_2} = \frac{Pb}{L}(L^2 - b^2) \; ; \; b = 1 \;\Rightarrow\; \frac{6A.\bar{b}_{2_2}}{L_2} = \frac{9(1)}{3}(3^2 - 1^2) = 24 \text{ kN.m}^2$$

Sumando las cargas:

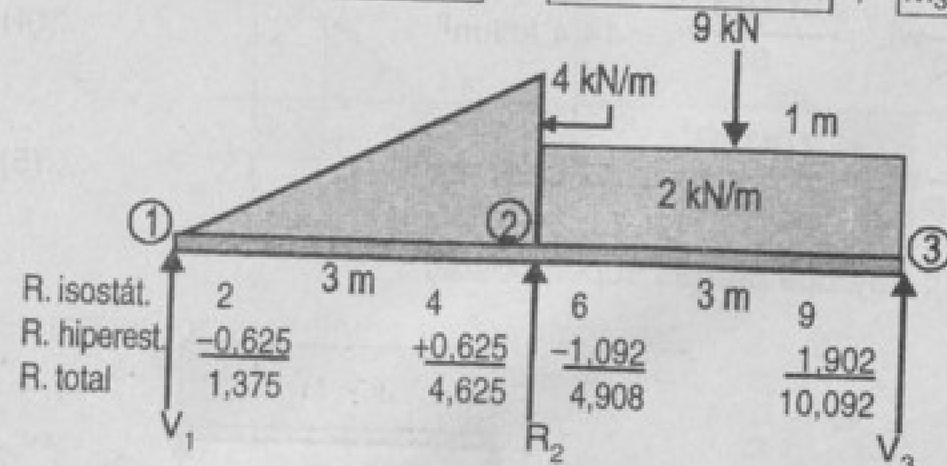
$$\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} = \frac{6A\;\bar{a}_{2_1}}{L_2} + \frac{6A.\bar{a}_{2_2}}{L_2} = (13,5 + 30) \;\Rightarrow\; \frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} = 43,5 \text{ kN.m}^2 \quad ...(6)$$

$$\frac{6A.\bar{b}_2}{L_2} = \frac{6A.\bar{b}_{2_1}}{L_2} + \frac{6A.\bar{b}_{2_2}}{L_2} = (13,5 + 24) \;\Rightarrow\; \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2} = 37,5 \text{ kN.m}^2 \quad ...(7)$$

Llevando todas las ecuaciones a los sistemas (1), (2) y (3):

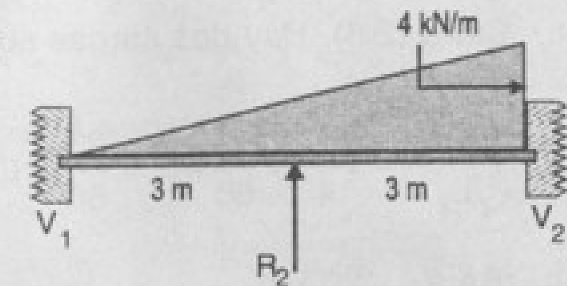
$$6M_1 + 3M_2 = -12,6$$
$$3M_1 + 12M_2 + 3M_3 = -(14,4 + 37,5)$$
$$3M_2 + 6M_3 = -43,5$$

Resolviendo: $\boxed{M_1 = -0,775 \text{ kN.m}}$; $\boxed{M_2 = -2,65 \text{ kN.m}}$; $\boxed{M_3 = -5,925 \text{ kN.m}}$

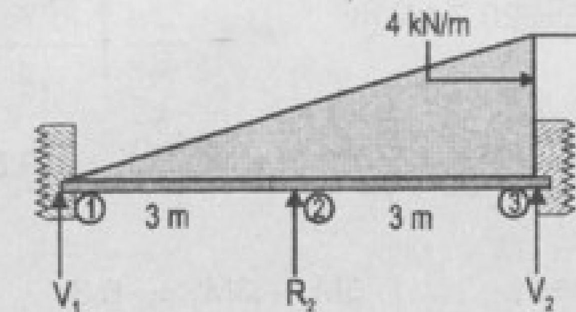


Donde: $\boxed{V_1 = 1,375 \text{ kN}}$; $\boxed{R_2 = 9,533 \text{ kN}}$; $\boxed{V_3 = 10,092 \text{ kN}}$

849. Calcular los momentos en los apoyos de la viga de la figura.



Resolución:
Del sistema:



Por el teorema de los tres momentos en:

- Viga empotrada - claro (1-2):

$$6M_1 + 3M_2 = -\frac{6A.\bar{b}_1}{L_1} \quad ...(1)$$

- Claros (1-2) y (2-3):

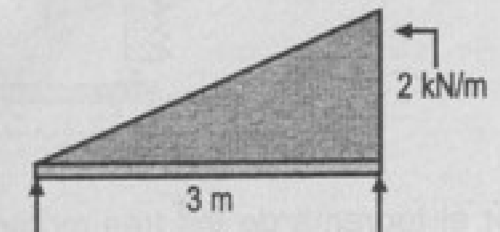
$$3M_1 + 12M_2 + 3M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}\right) \quad ...(2)$$

- Claro (2-3) y viga empotrada:

$$3M_2 + 6M_3 = -\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} \quad ...(3)$$

Hallando las relaciones $(6A.\bar{a}) / L$:

- Claro (1-2):

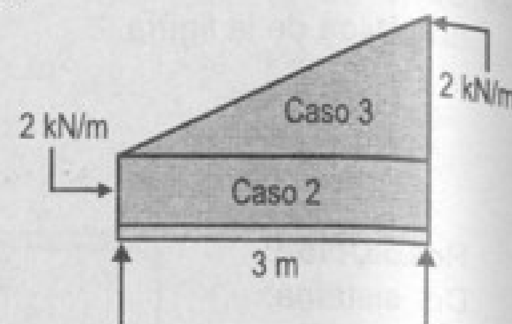


Caso 3:

$$\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{8}{60}(2)(3)^3 = 7,2 \text{ kN.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{b}_1}{L_1} = \frac{7}{60}(2)(3)^3 = 6,3 \text{ kN.m}^2$$

- Claro (2-3). Hay dos cargas superpuestas:



$$\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2}=\frac{wL^3}{4}+\frac{8}{60}wL^3=\frac{23}{60}(2)(3)^3$$

$$\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2}=\frac{207}{10}\ kN.m^2 = 20{,}7\ kN.m^2$$

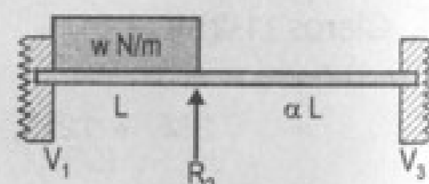
$$\frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}=\frac{wL^3}{4}+\frac{7}{60}wL^3=\frac{22}{60}(2)(3)^3 \Rightarrow \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}=19{,}8\ kN.m^2$$

Se forman las ecuaciones:

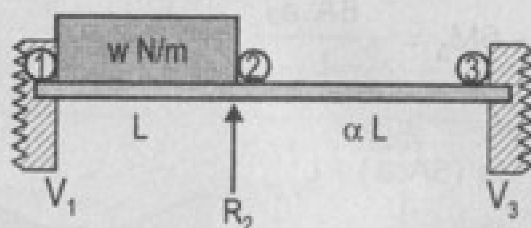
$$\begin{cases} 6M_1 + 3M_2 = -6{,}3 \\ 3M_1 + 12M_2 + 3M_3 = -(7{,}2 + 19{,}8) \\ 3M_2 + 6M_3 = -20{,}7 \end{cases}$$

Resolviendo: $\boxed{M_1 = -0{,}3\ kN.m}$; $\boxed{M_2 = -1{,}5\ kN.m}$; $\boxed{M_3 = -2{,}7\ kN.m}$

850. Determinar los momentos en los apoyos de la viga cargada como indica la figura.



Resolución:
Del diagrama:



Por el teorema de los tres momentos:

- Viga empotrada-claro (1-2):

$$2LM_1 + LM_2 = -\frac{6A.\bar{b}_1}{L_1} \quad ...(1)$$

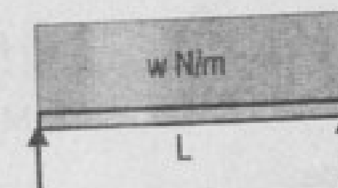
- Claros (1-2) y (2-3):

$$LM_1 + 2(L+\alpha L)M_2 + \alpha LM_3 = -\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} \quad ...(2)$$

- Claro (2-3)-viga empotrada:

$$\alpha LM_2 + 2\alpha LM_3 = 0 \quad ...(3)$$

Del claro (1-2):



$$\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1}=\frac{6A.\bar{b}_1}{L_1}=\frac{wL^3}{4} \quad ...(4)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2M_1 + M_2 = -\frac{wL^2}{4}$$

$$M_1 + 2(1+\alpha)M_2 + \alpha M_3 = -\frac{wL^2}{4}$$

$$M_2 + 2M_3 = 0$$

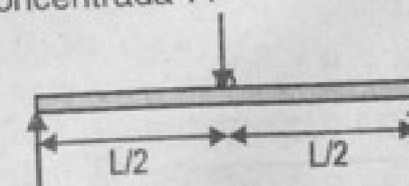
Resolviendo:

$$\boxed{M_1 = -\frac{wL^2}{8}\frac{(2+3\alpha)}{(3+3\alpha)}} \ ; \ \boxed{M_2 = -\frac{wL^2}{8}\frac{2}{(3+3\alpha)}} \ ; \ \boxed{M_3 = \frac{wL^2}{8}\frac{1}{(3+3\alpha)}}$$

851. Sustituir la carga distribuida, del problema anterior, por una carga concentrada P en el centro del claro, y calcular los momentos en los apoyos.

Resolución:
Tiene las mismas ecuaciones del problema anterior, salvo en el claro (1-2) donde hay una carga concentrada P.

- Claro (1-2):



donde: $\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1}=\frac{6A.\bar{b}_1}{L_1}=\frac{P(L/2)}{L}(L^2-(L/2)^2)$ o $\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1}=\frac{6A.\bar{b}_1}{L_1}=\frac{3}{8}PL^2$

Así el sistema de ecuaciones es:

$$2M_1 + M_2 = -\frac{3}{8}PL$$

$$M_1 + 2(1+\alpha)M_2 + \alpha M_3 = -\frac{3}{8}PL$$

$$M_2 + 2M_3 = 0$$

Resolviendo:

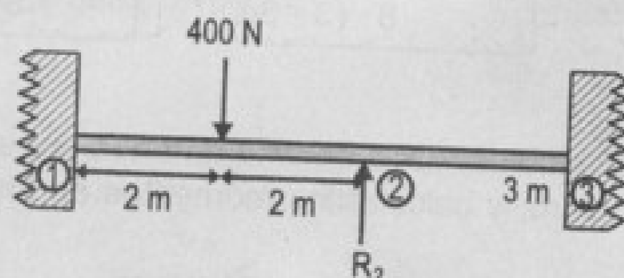
$$\boxed{M_1 = -\frac{3PL}{16}\cdot\frac{(2+3\alpha)}{(3+3\alpha)}}\ ;\quad \boxed{M_2 = -\frac{3PL}{16}\cdot\frac{2}{(3+3\alpha)}}\ ;\quad \boxed{M_3 = \frac{3PL}{16}\cdot\frac{1}{(3+3\alpha)}}$$

852. Aplicar los resultados de los problemas 850 y 851 para confrontar la solución del ejemplo 838.

Resolución:

El problema 828 lo dividimos en dos partes:

Parte 1:



Del problema anterior:

Si: P = 400 N ; L = 4 m ; $\alpha = 3/4$

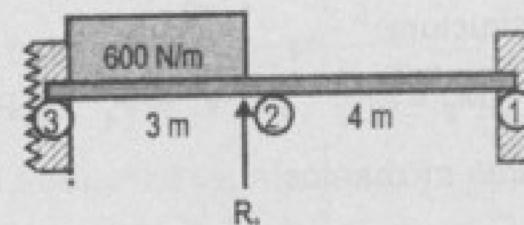
$$M_{1_1} = -\frac{3}{16}(400)(4)\frac{(2+3(3/4))}{(3+3(3/4))}\ ;\quad M_{2_1} = -\frac{3}{16}(400)(4)\frac{2}{(3+3(3/4))}$$

$$M_{3_1} = \frac{3}{16}(400)(4)\frac{1}{(3+3(3/4))}$$

Operando:

$M_{1_1} = -242{,}86$ N.m ; $M_{2_1} = -114{,}29$ N.m ; $M_{3_1} = +57{,}14$ N.m

Parte 2:



Donde: w = 600 N/m ; L = 3 m ; $\alpha = 4/3$

Del problema 850:

$$M_{3_2} = M_1\ ;\ M_{2_2} = M_2\ ;\ M_{1_2} = M_3$$

$$M_{3_2} = -\frac{600}{8}(3)^2\frac{(2+3(4/3))}{(3+3(4/3))} = -578{,}57 \text{ N.m}$$

$$M_{2_2} = -\frac{600}{8}(3)^2\frac{(2)}{(3+3(4/3))} = -192{,}36 \text{ N.m}$$

$$M_{1_2} = \frac{600}{8}(3)^2\frac{(1)}{(3+3(4/3))} = +96{,}43 \text{ N.m}$$

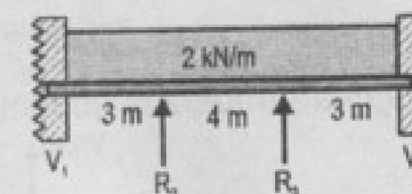
Sumando los momentos:

$$M_1 = M_{1_1} + M_{1_2} = (-242{,}86 + 96{,}43) \Rightarrow \boxed{M_1 = -146{,}43 \text{ N.m}}$$

$$M_2 = M_{2_1} + M_{2_2} = (-114{,}29 - 192{,}36) \Rightarrow \boxed{M_2 = -306{,}65 \text{ N.m}}$$

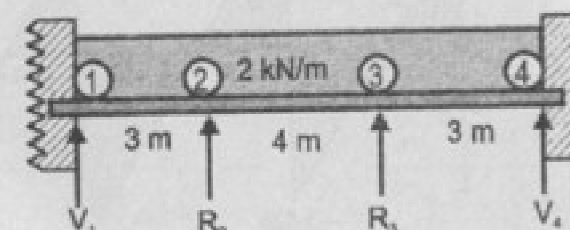
$$M_3 = M_{3_1} + M_{3_2} = (57{,}14 - 578{,}57) \Rightarrow \boxed{M_3 = -521{,}43 \text{ N.m}}$$

853. En la viga continua de la figura, determinar los momentos en los apoyos y en los empotramientos. Trazar el diagrama de fuerza cortante y calcular el momento flexionante máximo positivo. *Indicación:* aprovechar la simetría.



Resolución:

Del diagrama:



Por la simetría de la estructura:

$$M_1 = M_4 \;;\; M_2 = M_3 \quad y \quad V_1 = V_4 \;;\; R_2 = R_3$$

Por el teorema de los tres momentos:

- Claro (1-2) (y viga empotrada): $\left(\text{de } \frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4}\right)$

$$6M_1 + 3M_2 = -\frac{2(3)^3}{4} \qquad ...(1)$$

- Claros (1-2) y (2-3):

$$3M_1 + 14M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{2(3)^3}{4} + \frac{2(4)^3}{4}\right) \qquad ...(2)$$

De las condiciones iniciales:

$$6M_1 + 3M_2 = -13{,}5$$
$$3M_1 + 18M_2 = -45{,}5$$

Resolviendo:

$\boxed{M_1 = M_4 = -1{,}076 \text{ kN.m}}$ $\boxed{M_2 = M_3 = -2{,}348 \text{ kN.m}}$

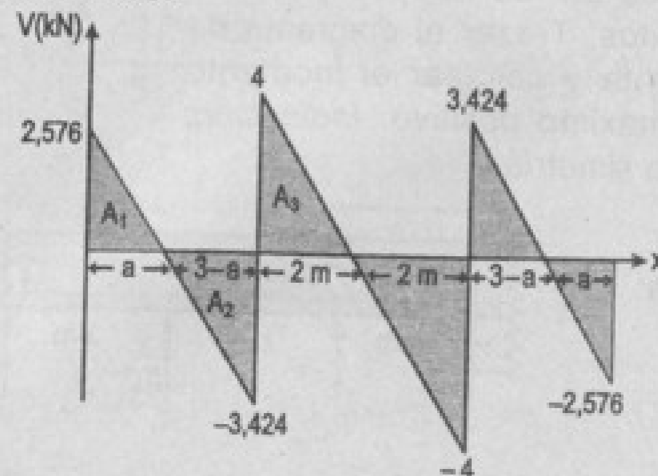
En el diagrama-tabla:

2 kN/m; ① ② ③ ④; 3 m, 4 m, 3 m

	V_1	R_2		R_3		V_4
R. isostát.:	3	3	4	4	3	3
R. hiperst.	–0,424	0,424	0	0	0,424	–0,424
R. total	2,576	3,424	4	4	3,424	2,576

$$V_1 = 2{,}576 \text{ kN} = V_4$$
$$R_2 = 7{,}424 \text{ kN} = R_3$$

Diagrama de fuerzas cortantes:



Por semejanza de triángulos $\frac{2{,}576}{a} = \frac{3{,}424}{3-a} \Rightarrow a = 1{,}288$

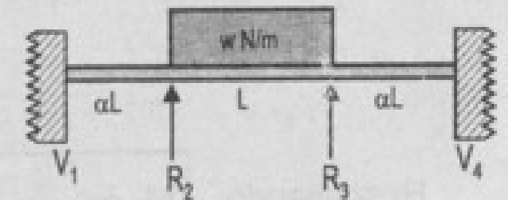
Así $A_1 = \frac{1}{2}(2{,}576)(1{,}288) = 1{,}659$; $A_3 = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$

$A_2 = \frac{1}{2}(3{,}424)(3 - 1{,}288) = 2{,}931$

Tenemos que el momento máximo positivo se da en x = 5 m:

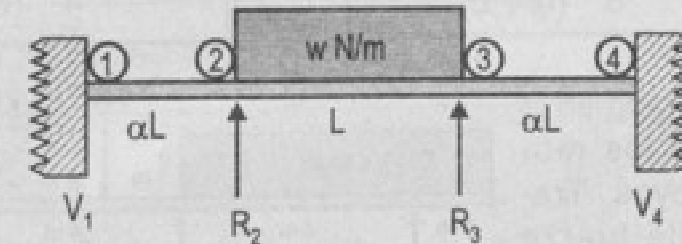
$$M_{máx} = A_1 - A_2 + A_3 + M_1 \quad \therefore \quad \boxed{M_{máx} = 1{,}652 \text{ kN.m}}$$

854. Calcular los momentos en los apoyos en la viga cargada como indica la figura.



Resolución:

Del sistema:



Por la simetría del sistema:

$$M_1 = M_4 \quad ... (\alpha) \quad \wedge \quad M_2 = M_3 \quad ... (\beta)$$

Por el teorema de los tres momentos:

- Viga empotrada y claro (1-2): $2\alpha L M_1 + \alpha L M_2 = 0$ ... (1)
- Claros (1-2) y (2-3):

$$\alpha L M_1 + 2L(1 + \alpha) M_2 + LM_3 = -\frac{wL^3}{4} \qquad ... (2)$$

De (α) y (β) en (1) y (2):

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 = 0 \\ \alpha M_1 + (3 + 2\alpha)M_2 = -\frac{wL^2}{4} \end{cases}$$

Resolviendo: $\boxed{M_1 = \frac{wL^2}{12(\alpha+2)} = M_4}$ $\boxed{M_2 = \frac{wL^2}{6(\alpha+2)} = M_3}$

855. Sustituyendo la carga repartida del problema anterior por una carga concentrada en el centro del claro, determinar los momentos en los apoyos.

Resolución:

La carga "P" concentrada en el centro del claro (2-3), solo modifica la ecuación (2) del problema anterior.

Así la ecuación (2) sería:

$$\alpha L M_1 + 2L(1+\alpha)M_2 + LM_3 = -\frac{P}{L}(L/2)(L^2 - L^2/4) \quad \dots (2)$$

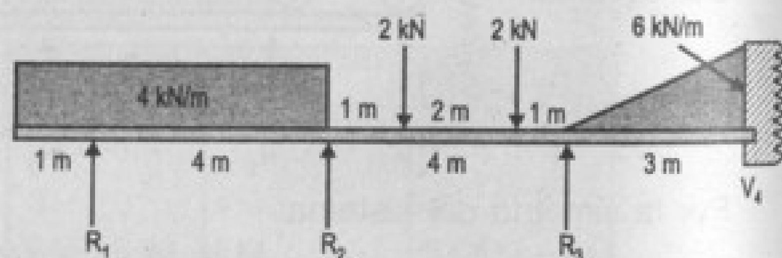
Teniendo en cuenta las demás ecuaciones:

$$2M_1 + M_2 = 0$$

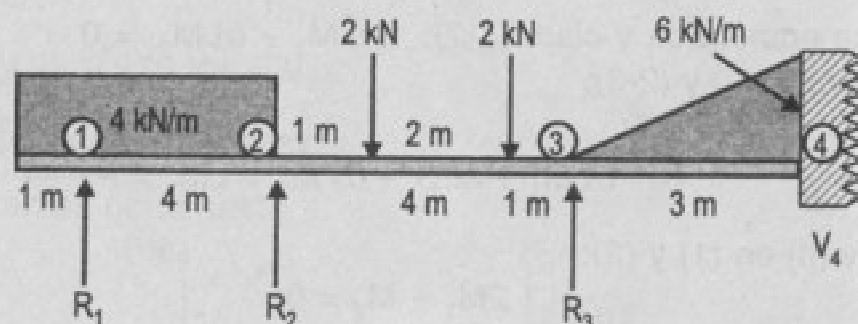
$$\alpha M_1 + (3+2\alpha)M_2 = -\frac{3}{8}PL$$

Resolviendo: $\boxed{M_1 = \frac{PL}{8}.\frac{1}{(\alpha+2)} = M_4}$; $\boxed{M_2 = -\frac{PL}{4}.\frac{1}{(\alpha+2)} = M_3}$

856. En la viga representada en la figura, determinar los momentos en los apoyos. Trazar el diagrama de fuerza cortante y calcular el valor del máximo momento positivo.



Resolución:
Del sistema:



Por el teorema de los tres momentos:

(en el apoyo (1): $M_1 = -4(1)\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ kN.m)

- Claros (1-2) y (2-3):

$$4(-2) + 2(8)M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{4(4)^3}{4} + \frac{2(3)}{4}(4^2-3^2) + \frac{2(1)}{4}(4^2-1^2)\right) \quad \dots(1)$$

- Claros (2-3) y (3-4):

$$4M_2 + 2(7)M_3 + 3M_4 = -\left(\frac{2(1)}{4}(4^2-1^2) + \frac{2}{4}(3)(4^2-3^2) + \frac{7}{60}(6)(3)^3\right) \quad \dots(2)$$

- Claro (3-4) y viga empotrada:

$$3M_3 + 6M_4 = -\left(\frac{8}{60}(6)(3)^3\right) \quad \dots (3)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$16M_2 + 4M_3 = -74$$
$$4M_2 + 14M_3 + 3M_4 = -36{,}9$$
$$3M_3 + 6M_4 = -21{,}6$$

Donde: $\boxed{M_2 = -4{,}4598 \text{ kN.m}}$ $\boxed{M_3 = -0{,}6609 \text{ kN.m}}$

$\boxed{M_4 = -3{,}2696 \text{ kN.m}}$ $\boxed{M_1 = -2 \text{ kN.m}}$

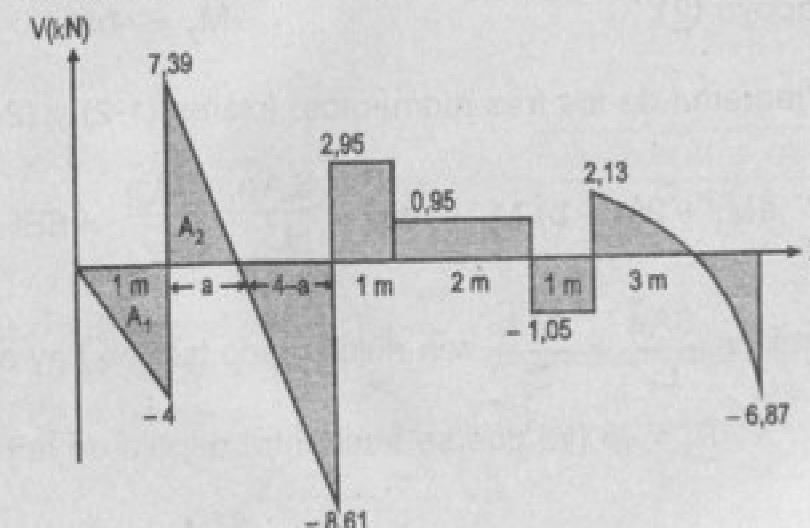
En el diagrama-tabla:

(Apoyos ①, ②, ③, ④; claros 4 m, 4 m, 3 m)

		R₁		R₂		R₃	V₄
R. isost.	4	8	8	2	2	3	6
R. hiperest.	0	–0,61	0,61	0,95	–0,95	–0,87	0,87
R. total:	4	7,39	8,61	2,95	1,05	2,13	6,87

Donde: $R_1 = 11{,}39$ kN $R_2 = 11{,}56$ kN
$R_3 = 3{,}18$ kN $R_4 = 6{,}87$ kN

Gráfica de fuerzas cortantes:



Vemos que el momento máximo positivo se da en x = (1+a) m:

$\Rightarrow M_{máx} = -A_1 + A_2$ ...(1)

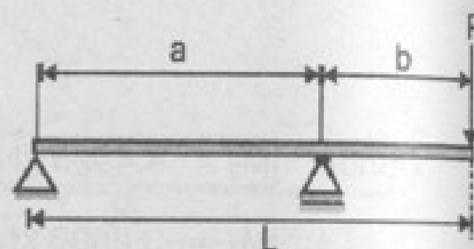
Por semejanza de triángulos:

$$\frac{7,39}{a} = \frac{8,61}{4-a} \quad \Rightarrow \quad a = 1,8475 \text{ m}$$

$$M_{máx} = -\frac{1}{2}(4)(1) + \frac{1}{2}(7,39)(1,8475) \quad \therefore \quad \boxed{M_{máx} = 4,83 \text{ kN.m}}$$

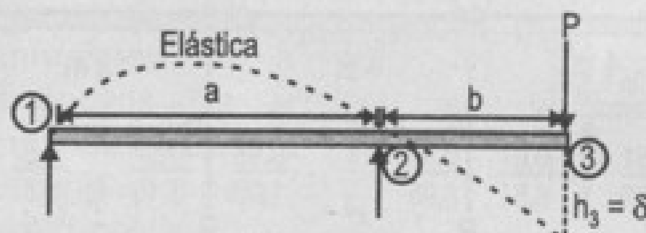
857, 858: problemas ilustrativos.

859. Determinar el valor de EIδ bajo P en la figura. ¿Qué se obtendrá si P se sustituyese por un par con sentido del reloj M?



Resolución:

Del sistema:



Por definición de momentos: $M_1 = M_3 = 0$

En el apoyo ②: $M_2 = -bP$ ... (1)

Por el teorema de los tres momentos: (claros (1-2) y (2-3))

$$aM_1 + 2(a+b)M_2 + bM_3 + \frac{6A\bar{a}}{L_1} + \frac{6A\bar{b}}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_3}\right) \quad ...(2)$$

Los términos $\frac{6A\bar{a}}{L_1} \wedge \frac{6A\bar{b}}{L_2}$ son nulos, dado que no hay cargas en sus claros.

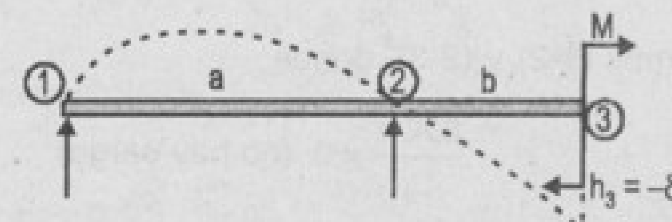
$h_1 = 0 \quad \wedge \quad h_3 = -\delta$ (ya que se encuentra debajo de la horizontal)

$L_1 = a \quad \wedge \quad L_2 = b$

Resolviendo (1) y (2): $2(a+b)(-bP) = -\frac{\delta}{b}(6EI)$

Despejando: $\boxed{EI\delta = \frac{PLb^2}{3}}$, dado que (a + b) = L

Al cambiar P por un par de valor M, tenemos:



Por lo mismo: $M_1 = M_3 = 0$

En el apoyo ②: $M_2 = -M$ ...(1)

Por el teorema de los tres momentos en los claros (1-2) y (2-3):

$$2(a+b)M_2 + 6\frac{A.\bar{a}}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}}{L_1} = 6EI\left(\frac{-\delta}{b}\right) \quad ...(2)$$

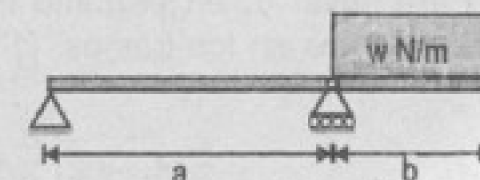
Pero $6\frac{A.\bar{a}}{L_1} = 0$

Además en: $\frac{6A.\bar{b}}{L_1} = \frac{M}{b}(3(0^2) - b^2) = -Mb$

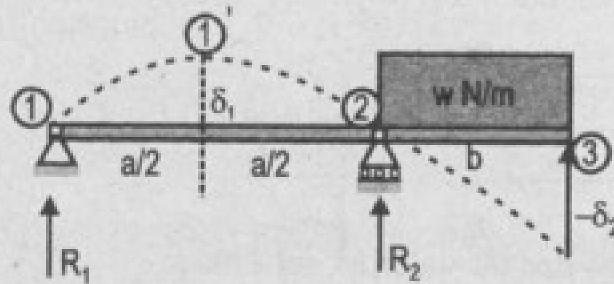
(Caso 7)

En (2): $2(L)(-M) - Mb = 6EI\frac{(-\delta)}{b}$ o $\boxed{EI\delta = Mb(2L+b)/6}$

860. Determinar el valor de EIδ en el extremo del voladizo y en el punto medio del claro en la viga de la figura.



Resolución:
Del diagrama:



Tomando los tramos (1-2) y (2-3), donde:

- Tramo (1-2): $\frac{6A.\bar{a}}{L_1}=0$ (no hay carga)

- Tramo (2-3): $\frac{6A.\bar{b}}{L_1}=\frac{wb^3}{4}$ ... (1)

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-3):

$$aM_1+2(a+b)M_2+bM_3+\frac{6A.\bar{a}}{L_1}+\frac{6A.\bar{b}}{L_2}=6EI\left(\frac{h_1}{a}+\frac{(-\delta_2)}{b}\right) \quad ...(2)$$

Por momentos en el apoyo ②:

$$M_2=-wb\left(\frac{b}{2}\right)=-\frac{w}{2}b^2 \quad ...(3)$$

Además: $M_1=0=M_3$ ...(4)

Así: $$2(a+b)\left(-\frac{w}{2}b^2\right)+\frac{wb^3}{4}=-\frac{6}{b}(\delta_2 EI)$$

o $$\boxed{EI\delta_2=\frac{(4a+3b)}{24}b^3w} \quad ...(\alpha)$$

Para hallar δ_1 en el punto medio del claro; toma por el teorema de los tres momentos en los tramos: (1'-2) y (2-3), así:

$$\frac{a}{2}M_{1'}+2\left(\frac{a}{2}+b\right)M_2+\frac{wb^3}{4}=6EI\left(\frac{\delta_1}{a/2}-\frac{\delta_2}{b}\right) \quad ...(5)$$

Tomando momentos en el apoyo ②:

$$R_1(a)+\frac{wb^2}{2a}=0$$

Así: $$R_1=-\frac{wb^2}{2a} \quad ...(6)$$

Tomando momentos en ①':

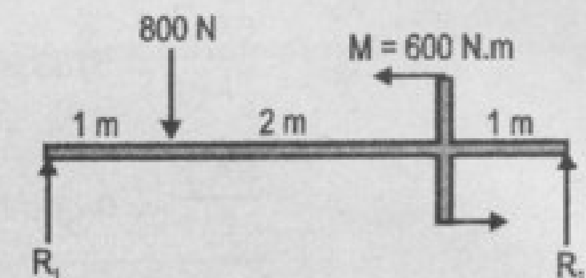
$$M_{1'}=-\frac{wb^2}{2a}\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{wb^2}{4} \quad ...(7)$$

Llevando a la ecuación (5):

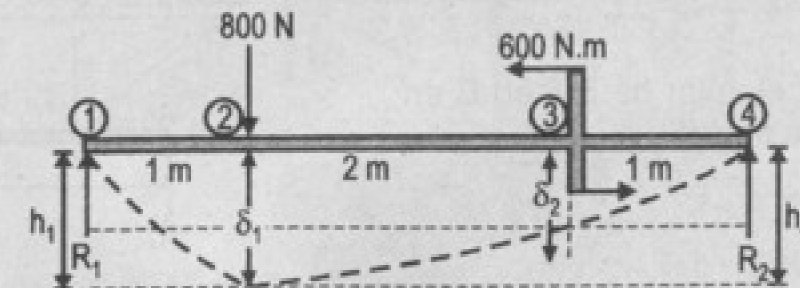
$$\frac{a}{2}\left(-\frac{wb^2}{4}\right)+2\left(\frac{a}{2}+b\right)\left(-\frac{w}{2}b^2\right)+\frac{wb^3}{4}=6EI\left(\frac{\delta_1}{a/2}-\frac{\delta_2}{b}\right)$$

Reemplazando el valor de (α): $\boxed{EI\delta_1=\frac{3}{96}a^2b^2w}$

861. Para la viga de la figura, determinar el valor de EIδ a 1 m y a 3 m del apoyo izquierdo.



Resolución:
Del diagrama:



Por las ecuaciones de la estática: $M_1=0=4R_2+600-800$

Así: $R_2=50$ N

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow R_1+50=800$

$R_1=750$ N

$M_2=750(1)=750$ N.m ; $M_3=50(1)=50$ N.m

También: $M_1 = M_4 = 0$; donde $\delta_1 = h_1 = h_4$

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-4):

$$2(4)M_2 + \left[-\frac{600}{3}\left(3(1)^2 - 3^2\right)\right] = 6EI\left(\frac{\delta_1}{1} + \frac{\delta_1}{3}\right) ; \quad \text{(utilizando el \textbf{caso 7})}$$

$$8(750) + 1200 = 8EI\delta_1 \Rightarrow EI\delta_1 = 900 \text{ N.m}^3$$

Teorema de los tres momentos en los tramos (1-3) y (3-4):

$$2(4)M_3 + 6\frac{A.\bar{a}}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}}{L_2} = 6EI\left(\frac{\delta_2}{3} + \frac{\delta_2}{1}\right)$$

- En el claro (1-3): (dos cargas superpuestas)

Caso 1 y **caso 7**

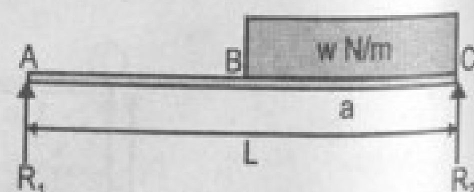
$$\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = \frac{800(1)}{3}\left(3^2 - 1^2\right) + \left(-\frac{(-600)}{3}\left(3(3^2) - 3^2\right)\right)$$

$$\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = 5733{,}3 \text{ N.m}^2$$

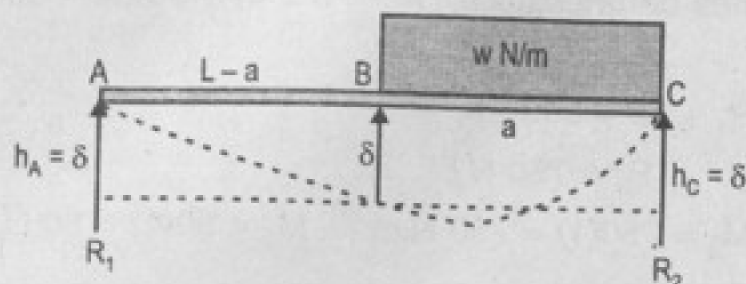
$$\frac{6A.\bar{b}}{L_2} = 0 \text{ , no hay cargas en (3-4)}$$

Así los valores: $8(50) + 5733{,}3 = 8EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta_2 = 766{,}6 \text{ N.m}^3}$

862. Determinar el valor de $EI\delta$ en B en la viga de la figura.



Resolución:
Del sistema:



Por momentos: $M_B = -\frac{w}{2}a^2 + aR_2$

Además: $M_A = M_C = 0$ ...(2)

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (A-B) y (B-C):

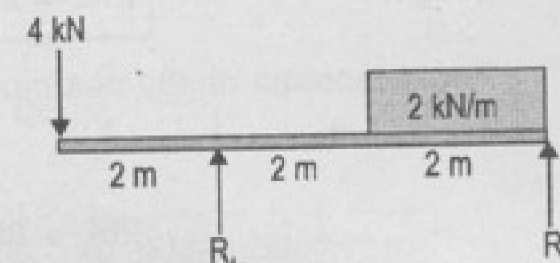
$$2LM_B + \frac{wa^3}{4} = 6EI\left(\frac{\delta}{L-a} + \frac{\delta}{a}\right) \quad ...(3)$$

En el apoyo A se toma momentos y por $\Sigma F_y = 0$, se tiene $R_2 = wa - \frac{wa^2}{2L}$ ...(4)

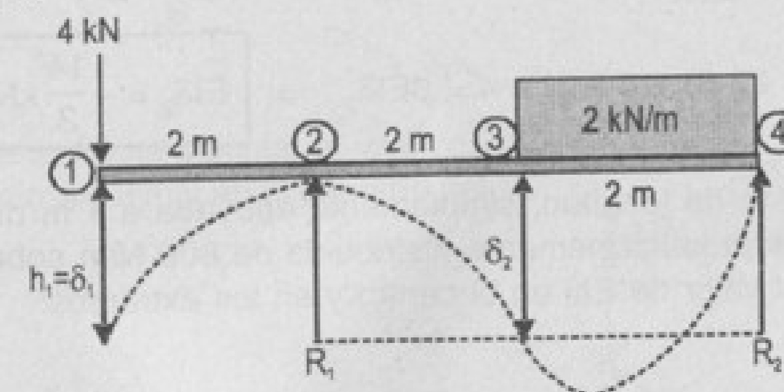
En (3): $$2L\left(-\frac{w}{2}a^2 + a\left(wa - \frac{wa^2}{2L}\right)\right) + \frac{wa^3}{4} = \frac{6EI\delta(L)}{(L-a)(a)}$$

Simplificando: $$\boxed{EI\delta = \frac{wa^3}{24L}(4L - 3a)(L - a)}$$

863. En la viga representada en la figura, determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro y en el extremo izquierdo.



Resolución:
Del diagrama:



Hallando las reacciones: $\Sigma M_4 = 0 = 4R_1 - 6(4) - 4(1) \Rightarrow R_1 = 7$ kN
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_2 = 1$ kN

Hallando los momentos:

$M_2 = -4(2) = -8$ kN.m
$M_3 = 1(2) - 2(2)(1) = -2$ kN.m
$M_4 = 0 = M_1$

Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos (1-2) y (2-4) donde: $h_1 = -\delta_1$ y $h_4 = 0$

Luego: $$8M_2 + \frac{6A\bar{b}}{L_2} = 6EI\left(-\frac{\delta_1}{2}\right) \quad ... (1)$$

En el claro (2-4): por **caso 5**

$$\frac{6A.\bar{b}}{L_2} = \frac{w}{4L}\left[d^2(2L^2 - d^2) - c^2(2L^2 - a^2)\right]$$

(en el problema: c = 0; d = 2; L = 4; w = 2)

$$\frac{6A.\bar{b}}{L_2} = \frac{2}{16}(4(32 - 4) = 3,5$$

En (1): $$8(-8) + 3,5 = \frac{6}{2}EI(-\delta_1)$$

Luego: $$\boxed{EI\delta_1 = 20,16 \text{ kN.m}^3}$$

Por el teorema de los tres momentos en los claros (2-3) y (3-4), donde: $h_2 = h_4 = \delta_2$

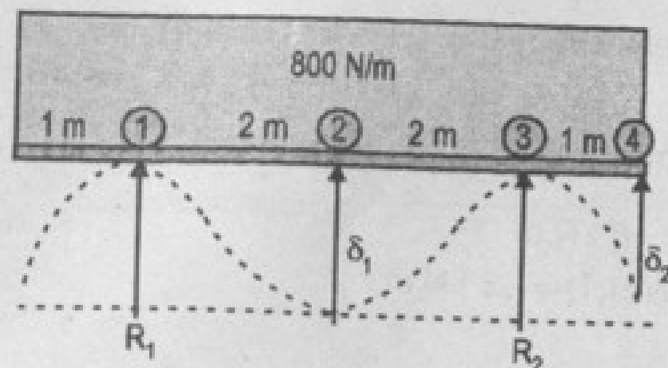
$$2M_2 + 8M_3 + \frac{2(2)^3}{4} = 6EI\left(\frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_2}{2}\right)$$

Luego: $$2(-8) + 8(-2) + 4 = 6EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta_2 = -\frac{14}{3} \text{ kN.m}^3}$$

864. Una viga de 6 m de longitud, simplemente apoyada a 1 m de cada extremo, soporta una carga uniformemente distribuida de 800 N/m sobre toda su longitud. Calcular el valor de EIδ en el centro y en los extremos.

Resolución:

Del diagrama:



Por la simetría del sistema: $R_1 = R_2 = +2400$ N ...(1)

Además:

$M_1 = M_3 = 800(0,5) = -400$ N.m

$$M_2 = (2400)(2) - 800(3)\left(\frac{3}{2}\right) = 1200 \text{ N.m}$$

$M_4 = 0$

Para el centro del claro, tomamos los tramos (1-2) y (2-3), aplicando el teorema de los tres momentos.

$$2M_1 + 8M_2 + 2M_3 + \frac{800}{4}(2)^3 + \frac{800}{4}(2)^3 = 6EI\left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2}\right) \quad ...(2)$$

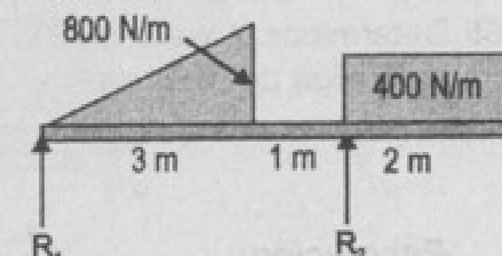
$$2(-400) + 8(1200) + 2(-400) + 800(8) = 6EI\delta_1 \Rightarrow \boxed{EI\delta_1 = 2400 \text{ N.m}^3}$$

Ahora aplicando el teorema de los tramos: (1-3) y (3-4):

$$4M_1 + 10M_2 + \frac{800}{4}(4)^3 + \frac{800}{4}(1)^3 = 6EI\left(\frac{0}{4} + \frac{\delta_2}{1}\right)$$

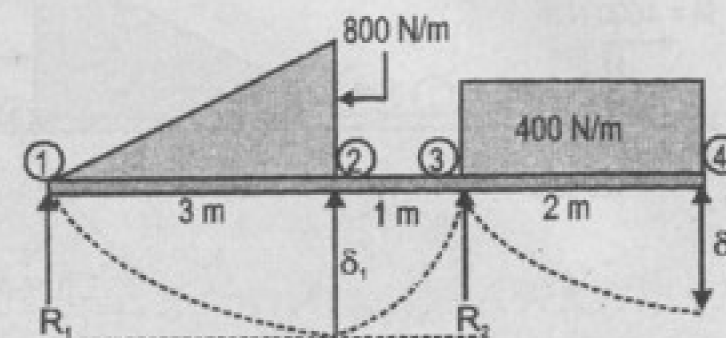
$$\frac{4(-400) + 10(1200) + 200(4^3 + 1)}{6} = EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta_2 = 3900 \text{ N.m}^3}$$

865. En la viga de la figura calcular el valor de EIδ en el punto x = 3 m y en el extremo del voladizo.



Resolución:

Del sistema:



Por momentos en el apoyo (1):

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow 4R_2 = 400(6) + 800(5)$$

$$R_2 = 1600 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 = 400 \text{ N}$$

Además:

$M_3 = -400(2)(1) = -800$ N.m

$M_2 = 3(400) - 400(3) = 0 = M_1 = M_4$

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-3) (donde: $h_1 = h_3 = \delta_1$):

$$3M_1 + 8M_2 + (1)M_3 + \frac{8}{60}(800)(3)^3 = 6EI\left(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{1}\right)$$

$$-800 + 2880 = 8EI\delta_1 \Rightarrow \boxed{EI\delta_1 = 260 \text{ N.m}^3}$$

Tramos (2-3) y (3-4): ($h_2 = -\delta_1$; $h_4 = -\delta_2$)

$$M_2 + 6M_3 + 2M_4 + \frac{(400)}{4}(2)^3 = 6EI\left(-\delta_1 - \frac{\delta_2}{2}\right)$$

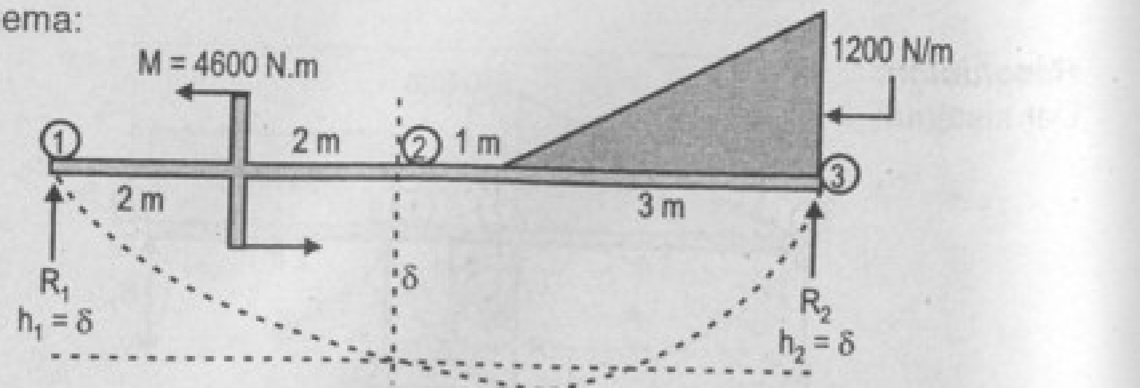
$$6(-800) + 800 = -6EI\delta_1 - 3EI\delta_2$$

$$-4800 + 800 = -6(260) - 3EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta_2 = 813{,}3 \text{ N.m}^3}$$

866. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro en la viga de la figura.

Resolución:

Del sistema:



Por el teorema de los tres momentos en los tramos ⟨1-2⟩ y ⟨2-3⟩: $h_1 = h_3 = \delta$

$$4M_1 + 16M_2 + 4M_3 + \frac{6A.\bar{a}}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}}{L_2} = 6EI\left(\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}\right) \quad \text{... (1)}$$

Pero: $M_1 = M_3 = 0$ ...(2)

Por estática: $\Sigma M_3 = 0 = 8R_1 - 4600 - 1800 \Rightarrow R_1 = 800$ N ... (3)

Así: $M_2 = 800(4) - 4600 = -1400$ N.m

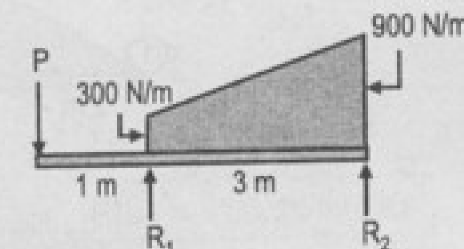
Tramo ⟨1-2⟩: $$\frac{6A.\bar{a}}{L_1} = -\frac{(-4600)}{4}(3(2)^2 - 4^2) = -4600 \text{ N.m}^2 \quad \text{... (4)}$$

Tramo ⟨2-3⟩: $$\frac{6A.\bar{b}}{L_2} = 900(4)\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4}(3)(3600)\left(\frac{3}{5}\right) = 3180 \text{ N.m}^2 \quad \text{... (5)}$$

Todo en (1): $16(-1400) - 4600 + 3180 = 3EI\delta \Rightarrow \boxed{EI\delta = -7940 \text{ N.m}^3}$

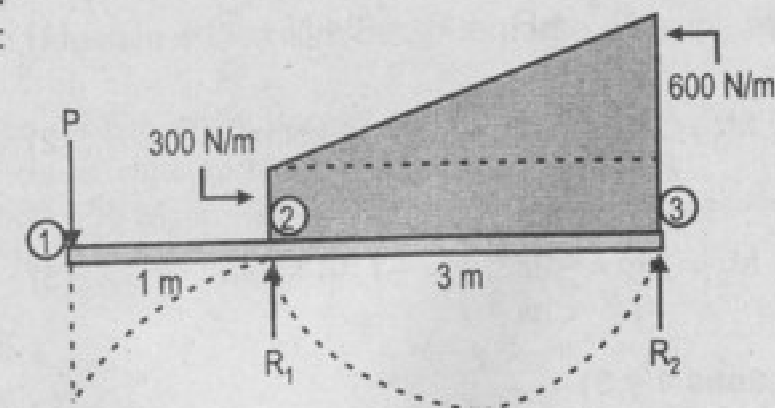
(el sentido es hacia arriba)

867. En la viga de la figura, calcular el valor de P que produzca una deflexión nula bajo esta fuerza.



Resolución:

Del sistema:



Tenemos: $M_2 = -P$ ...(1)

Además: $M_1 = M_3 = 0$ ...(2)

En el tramo (2-3):

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{300}{4}(3)^3 + \frac{7}{60}(600)(3)^3 = 3915 \text{ N.m}^2$$

Por condición: $h_1 = 0$ ...(3)

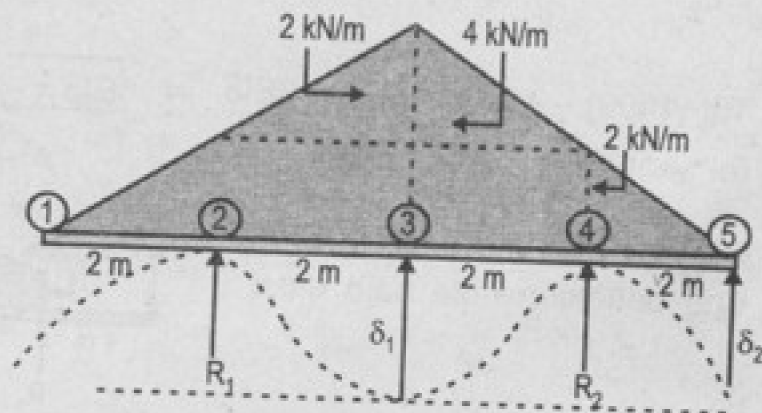
Aplicando el teorema de los tres momentos a los claros: (1-2) y (2-3): $h_3 = 0$.

$$1M_1 + 8M_2 + 3M_3 + \frac{6A.\bar{b}}{L} = 0$$

$$8(-P) + 3915 = 0 \Rightarrow \boxed{P = 489{,}375\ N}$$

868. Determinar el valor de EIδ en el centro y en los extremos de la viga cargada como indica la figura.

Resolución:
Del sistema:



Por la simetría: $R_1 = R_2 = 8$ kN ...(1)

Hallando: $M_3 = 2(8) - 8\left(\frac{4}{3}\right) = 5{,}33$ kN.m ...(2)

$M_2 = M_4 = -2\left(\frac{2}{3}\right) = -1{,}33$ kN.m ...(3)

Tramo (2-3): **(casos 1 y 3)**

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{2(2)^3}{4} + \frac{8}{60}(2)(2)^3 = 6{,}13\ kN.m^2$$

Tramo (3-4): **(casos 1 y 4)**

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{2(2)^3}{4} + \frac{8}{60}(2)(2)^3 = 6{,}13\ kN.m^2$$

Tramo (2-4): **(casos 1 y 6)**

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{2(4)^3}{4} + \frac{5}{32}(2)(4)^3 = 52\ kN.m^2$$

Tramo (4-5): **(caso 4)**

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{8}{60}(2)(2)^3 = 2{,}13\ kN.m^2$$

Aplicando el teorema de los tres momentos:

- Tramos (2-3) y (3-4): $h_2 = h_4 = \delta_1$

$$2M_2 + 8M_3 + 2M_4 + 6{,}13 + 6{,}13 = 6EI\left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2}\right)$$

$$2(-1{,}33) + 8(5{,}33) + 2(-1{,}33) + 2(6{,}13) = 6EI\delta_1 \Rightarrow \boxed{EI\delta_1 = 8{,}26\ kN.m^3}$$

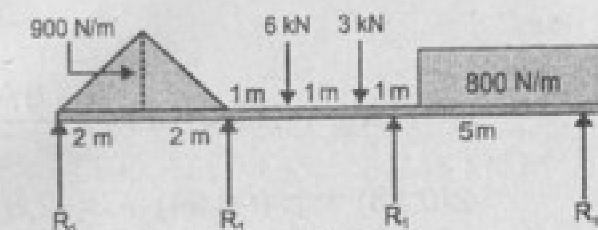
- Tramos (2-4) y (4-5): como $M_5 = 0$; $h_2 = 0$ y $h_5 = -\delta_2$

$$4M_2 + 12M_4 + 52 + 2{,}13 = 6EI\left(-\frac{\delta_2}{2}\right)$$

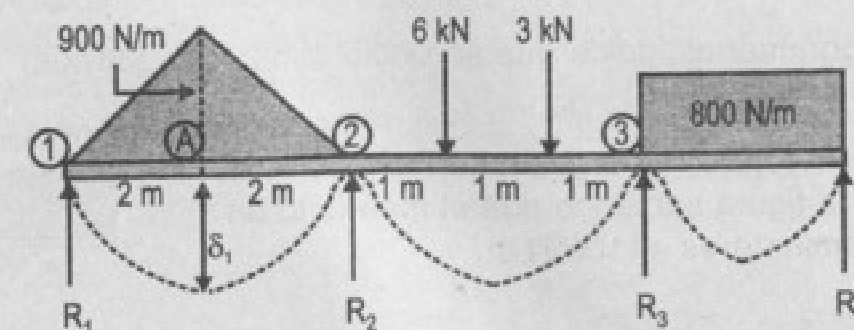
$$4(-1{,}33) + 12(-1{,}33) + 54{,}13 = -3EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta_2 = -10{,}95\ kN.m^3}$$

(El signo negativo indica que debió tomarse δ_2 hacia arriba)

869. Hallar el valor de EIδ en el centro del primer claro de la viga continua de la figura sabiendo que $M_2 = -2040$ N.m y $M_3 = -2810$ N.m.



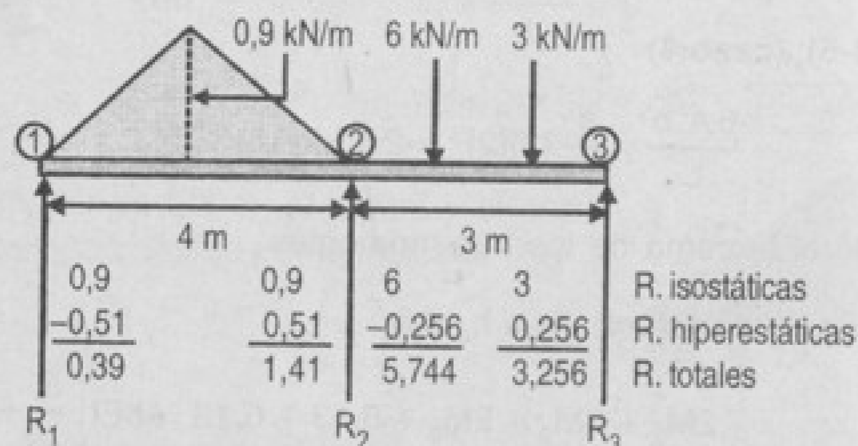
Resolución:
Del sistema:



Hallando R_1, R_2 y R_3, tenemos como datos:

$$M_2 = -2040 \text{ N.m} \quad \text{y} \quad M_3 = -2810 \text{ N.m}$$

En la tabla-diagrama:



Así: $R_1 = 0{,}39 \text{ kN} \quad \wedge \quad R_2 = 7{,}15 \text{ kN}$

Luego: $M_A = R_1(2) - (0{,}9)\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0{,}18 \text{ kN.m}$

Tramo (A-2): $\dfrac{6A.\bar{a}}{L} = \dfrac{7}{60}(0{,}9)(2)^3 = 0{,}84 \text{ kN.m}^3$

Tramo (2-3): $\dfrac{6A.\bar{b}}{L} = \dfrac{6}{3}(2)\left(3^2 - 2^2\right) + \dfrac{3}{3}(1)(3^2 - 1^2) = 28 \text{ kN.m}^3$

Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos (A-2) y (2-3), donde:

$$h_A = -\delta_1 \quad \text{y} \quad h_3 = 0$$

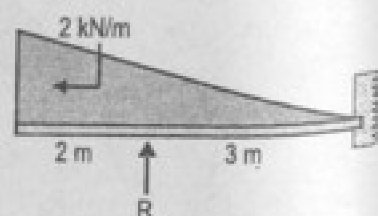
$$2M_A + 10M_2 + 3M_3 + \frac{6A.\bar{a}}{L} + \frac{6A.\bar{b}}{L} = 6EI\left(-\frac{\delta_1}{2}\right)$$

$$2(0{,}18) + 10(-2{,}04) + 3(-2{,}810) + 0{,}84 + 28 = -3EI\delta_1$$

$$\boxed{EI\delta_1 = -0{,}123 \text{ kN.m}^3}$$

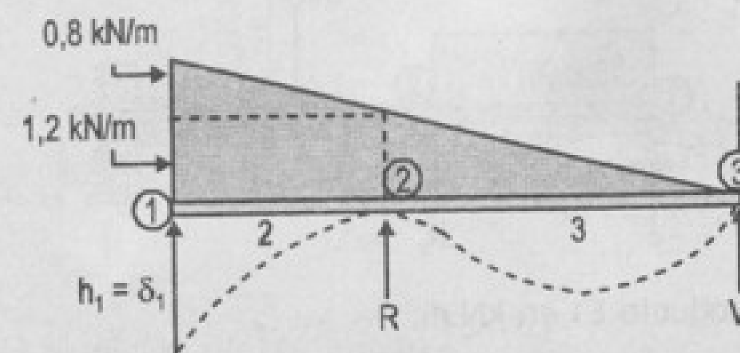
(El signo menos indica que se debió tomar hacia arriba)

870. Calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo volado de la viga de la figura sabiendo que el momento en el empotramiento es +1100 N.m.



Resolución:

Del sistema



Dato: $M_3 = +1100 \text{ N.m} = 1{,}1 \text{ kN.m}$

Donde: $M_2 = -0{,}8\left(\dfrac{2}{3}\right)(2) - (1{,}2)(2)(1) \Rightarrow M_2 = -3{,}46 \text{ kN.m}$

Además $M_1 = 0$

Tramo (1-2): $\dfrac{6A.\bar{a}}{L} = \dfrac{(1{,}2)(2)^3}{4} + \dfrac{7}{60}(0{,}8)(2)^3 = 0{,}746 \text{ kN.m}^2$

Tramo (2-3): $\dfrac{6A.\bar{b}}{L} = \dfrac{8}{60}(1{,}2)(3)^3 = 4{,}32 \text{ kN.m}^2$

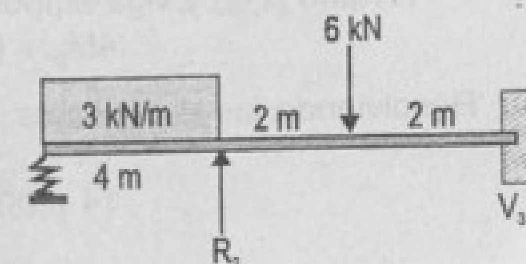
Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos (1-2) y (2-3), así:

$$h_1 = -\delta \quad \wedge \quad h_3 = 0$$

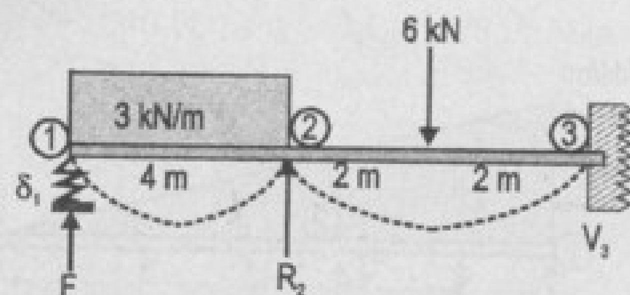
$$10M_2 + 3M_3 + \frac{6A.\bar{a}}{L} + \frac{6A.\bar{b}}{L} = 6EI\left(-\frac{\delta_1}{2}\right)$$

$$10(-3{,}46) + 3(1{,}1) + 0{,}746 + 4{,}32 = -3EI\delta_1 \Rightarrow \boxed{EI\delta_1 = 8{,}745 \text{ kN.m}^3}$$

871. La viga continua de la figura está apoyada en su extremo izquierdo en un resorte cuya constante es de 50 kN/m. En la viga, $E = 10 \times 10^9$ N/m² e $I = 40 \times 10^6$ mm⁴. Calcular la deflexión del resorte.



Resolución:



Obteniendo el producto EI en kN.m:

$$EI = (10 \, . \, 10^9)(40)\,(10^6)(10^{-12})\ N.m^2$$

$$EI = 400\ kN.m^2 \qquad ...(\alpha)$$

Tramo (1-2): $\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{3(4^3)}{4} = 48\ kN.m^2 \qquad ...(1)$

Tramo (2-3): $\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{6(2)}{4}(4^2 - 2^2) = 36\ kN.m^2$

Sea δ la elongación del resorte, tomando momentos en el apoyo ②.

$M_2 = k\delta(4) - 3(4)(2)$ (Dato: k = 50 kN/m)

$M_2 = (200\delta - 24) \qquad ...(3)$

Además: $M_1 = 0 \qquad ...(4)$

Por el teorema de los tres momentos:

- Tramos (1-2) y (2-3); (donde $h_1 = -\delta$ y $h_3 = 0$):

$$16M_2 + 4M_3 + (36 + 48) = 6(400)\left(-\frac{\delta}{4}\right) ...(5)$$

- Tramo (2-3) y viga empotrada:

$$4M_2 + 8M_3 + 36 = 0 \qquad ...(6)$$

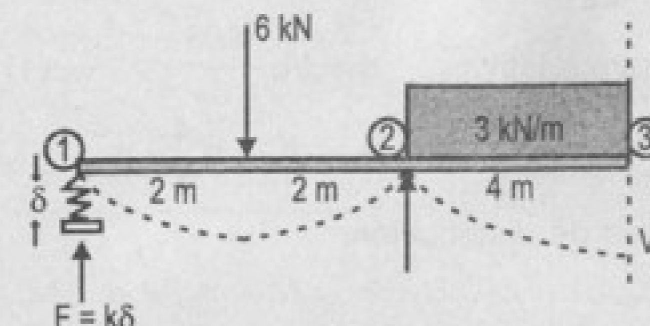
Resolviendo las ecuaciones:

$$14\,(200\delta - 24) + 66 = -600\,\delta$$

$$\delta = \frac{27}{340}\ m \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1350}{17}\ mm}$$

872. Repetir el problema anterior intercambiando las cargas en los claros.

Resolución:



Se modificó la ecuación de M_2; ahora:

$$M_2 = 4k\delta - 6(2) \Rightarrow M_2 = 200\delta - 12 \qquad ...(\alpha)'$$

La ecuación (6) se modifica solo por el factor $\frac{6A.\bar{a}}{L}$, porque ahora hay otro tipo de carga en el empotramiento.

$$4M_2 + 8M_3 + 48 = 0 \qquad ...(1)'$$

La ecuación (5) se mantiene.

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} M_2 + 2M_3 + 12 = 0 \\ M_2 = 200\delta - 12 \\ 4M_2 + M_3 + 21 = -150\delta \end{cases} \qquad \text{Al resolver: } \boxed{\delta = \frac{540}{27}\,mm}$$

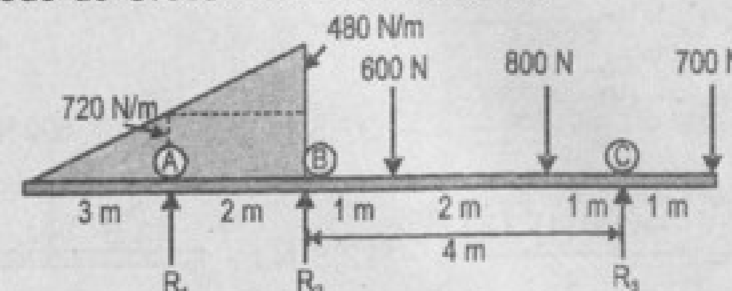
873, 874, 875, 876: problemas ilustrativos.

Mediante el método de la distribución de momentos, calcular los momentos en los soportes en las vigas continuas a que se refieren los siguientes problemas.

877. Véase problema 814.

Resolución:

Por el método de Cross resolver el sistema:



Cálculo del segundo momento de inercia I como el mcm de los tramos AB y BC: I = mcm (2; 4) = 4

Cálculo de las rigideces relativas: $K = I/L$ ...(1)

Así: $K_{AB} = \frac{4}{2} = 2$; $K_{BC} = \frac{4}{4} = 1$

Cálculo de los factores de distribución:

$$FD = \frac{K}{\Sigma K}$$

$FD_{AB} = 1$ (por estar en un extremo); $FD_{BA} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$

$FD_{BC} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ $FD_{CB} = 1$ (por estar en un extremo)

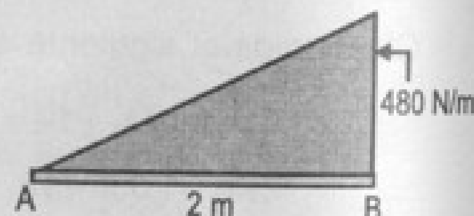
Cálculo del momento de empotramiento perfecto (MEP):

- Tramo AB (hay dos superposiciones)

Carga 1:

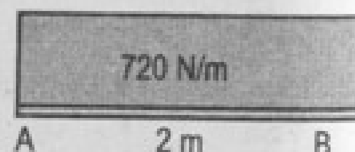
$$M_{1AB} = -\frac{wL^2}{30} = \frac{-480(2)^2}{30} = -64 \text{ N.m}$$

$$M_{1BA} = -\frac{wL^2}{20} = \frac{-480(2)^2}{20} = -96 \text{ N.m}$$



Carga 2:

$$M_{2AB} = M_{2BA} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-720(2)^2}{12} = -240 \text{ N.m}$$



Total (suma de momentos de ambas cargas):

$$M_{AB} = M_{1AB} + M_{2AB} = (-64 - 240) = -304 \text{ N.m}$$

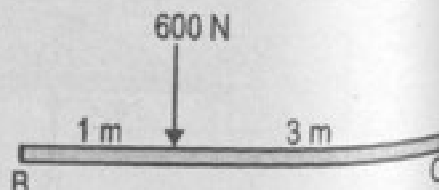
$$M_{BA} = M_{1BA} + M_{2AB} = (-96 - 240) = -336 \text{ N.m}$$

- Tramo BC (hay dos cargas superpuestas)

Carga 1:

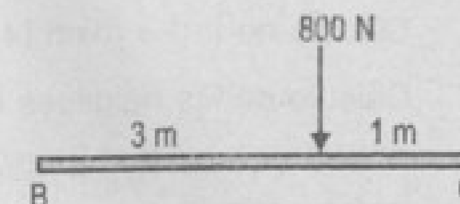
$$M_{1BC} = -\frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-600(1)(3)^2}{4^2} = -337{,}5 \text{ N.m}$$

$$M_{1CB} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{-600(1)^2(3)}{4^2} = -112{,}5 \text{ N.m}$$



Carga 2:

$$M_{2BC} = -\frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-800(3)(1)^2}{4^2} = -150 \text{ N.m}$$



$$M_{2CB} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{-800(3)^2(1)}{4^2} = -450 \text{ N.m}$$

Total: $M_{BC} = M_{1BC} + M_{2BC} = (-337{,}5 - 150) = -487{,}5$ N.m

$M_{CB} = M_{1CB} + M_{2CB} = (-112{,}5 - 450) = -562{,}5$ N.m

A la izquierda del apoyo A, el momento es: $-\frac{1}{2}(720)(3)\left(\frac{1}{3}.3\right) = -1080$ N.m

(se toma un FD en ese punto de 0).

A la derecha del apoyo C, el momento es: –700(1) = –700 N.m (se toma un F. D en ese punto de 0).

Proceso de distribución:

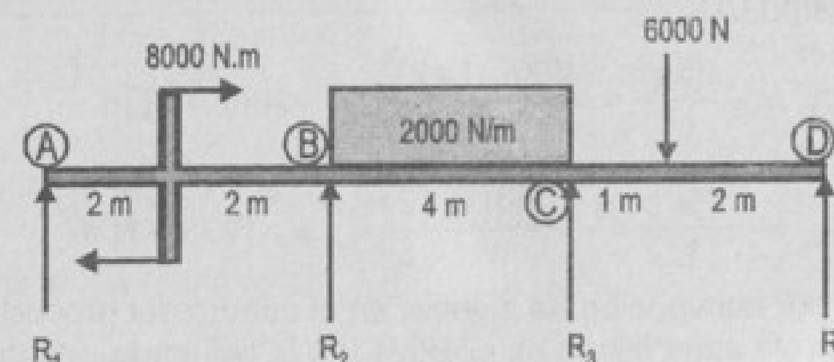
K	A	②		B ①		C
FD	0⁺	⁻1	2/3⁺	⁻1/3	1⁺	⁻0
MEP soltar A y C	–1080 0	304 776 →	–324 388	487,5 –68,75 ←	–562,5 –137,5	700 0
MEP reajustado 1.ª distrib.	–1080	1080	52 313,83	418,75 –156,92	–700	700
Momentos finales	–1080	1080	–261,83	261,83	–700	700

$M_A = -1080$ N.m $M_B = -261{,}83$ N.m $M_C = -700$ N.m

878. Véase problema 826.

Resolución:

Del sistema:



Cálculo de I: (I = mcm (4; 4; 3) = 12)

Cálculo de las rigideces relativas: (K = I/L)

$$K_{AB} = 12/4 = 3 \;;\; K_{BC} = 12/4 = 3 \;;\; K_{CD} = 12/3 = 4$$

Para el método abreviado usamos:

$$\overline{K}_{AB} = \frac{3}{4}K_{AB} = \frac{3}{4}(3) = \frac{9}{4} \;;\; \overline{K}_{CD} = \frac{3}{4}(K_{CD}) = \frac{3}{4}(4) = 3$$

Cálculo de las factores de distribución: $\left(FD = \frac{K}{\Sigma K}\right)$

$FD_{AB} = 1$ (por ser extremo) $\qquad FD_{BA} = \frac{9}{4} / \left(\frac{9}{4}+3\right) = \frac{3}{7}$

$FD_{BC} = 3/\left(\frac{9}{4}+3\right) = \frac{4}{7} \qquad FD_{CB} = 3/(3+3) = \frac{1}{2}$

$FD_{CD} = 3/(3+3) = \frac{1}{2} \qquad FD_{DC} = 1$ (por ser extremo)

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB:

$$M_{AB} = \frac{M}{L}b\left(\frac{3a}{L}-1\right) = \frac{8000}{4}(2)\left(\frac{3(2)}{4}-1\right) \quad \Rightarrow \quad M_{AB} = 2000 \text{ N.m}$$

$$M_{BA} = -\frac{Ma}{L}\left(\frac{3b}{L}-1\right) = -\frac{8000}{4}(2)\left(\frac{3(2)}{4}-1\right) \quad \Rightarrow \quad M_{BA} = -2000 \text{ N.m}$$

- Tramo BC:

$$M_{BC} = M_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2000}{12}(4)^2 = -2666{,}7 \text{ N.m}$$

- Tramo CD:

$$M_{CD} = -\frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-6000(1)(2)^2}{3^2} = -2666{,}7 \text{ N.m}$$

$$M_{DC} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{-6000(1)^2(2)}{3^2} = = -1333{,}3 \text{ N.m}$$

(Nota: por convención de signos, en el cuadro del proceso de distribución, a la derecha de cada tramo es positivo y a la izquierda negativo).

Proceso de distribución:

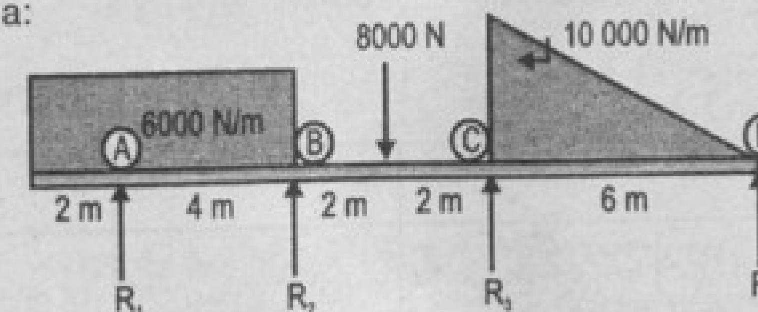
K	A	(9/4) B		(3) C		(3) D
FD	1	3/7	4/7	1/2	1/2	1
MEP soltar A y D	– –2000 2000 →	+ –2000 1000	– 2666,7	+ –2666,7	– 2666,7 666,7 ←	+ –1333,3 1333,3
MEP reajustado 1.ª distribución	0	–1000 –714,3	2666,7 –952,4	–2666,7 –333,4	3333,4 –333,4	0
Trasmisión 2.ª distribución		71,4	–166,7 95,3	–476,2 238,1	238,1	
Trasmisión 3.ª distribución		–51	119,1 –68,1	47,6 –23,9	–23,9	
Trasmisión 4.ª distribución		5,1	–12 6,9	–34,1 17,1	17,1	
Momentos totales	0	–1688,8	1688,8	–3231,3	3231,3	0

Así: $\boxed{M_A = M_D = 0}$ $\quad \boxed{M_B = -1688{,}8 \text{ N.m}}$ $\quad \boxed{M_C = -3231{,}3 \text{ N.m}}$

879. Véase problema 827.

Resolución:

Del sistema:



Cálculo de I: I = mcm (4; 4; 6) = 12

Cálculo de las rigideces relativas:

$$K_{AB} = 12/4 = 3 \;;\; K_{BC} = 12/4 = 3 \;;\; K_{CD} = 12/6 = 2$$

Para el método abreviado usamos:

$$\overline{K}_{AB} = \frac{3}{4}K_{AB} = \frac{3}{4}(3) = \frac{9}{4} \quad ; \quad \overline{K}_{CD} = \frac{3}{4}K_{CD} = \frac{3}{4}(2) = \frac{3}{2}$$

Cálculo de los factores de distribución: $\left(FD = \frac{K}{\Sigma K}\right)$

$$FD_{AB} = 1 \qquad FD_{BA} = \frac{9}{4} / \left(\frac{9}{4} + 3\right) = \frac{3}{7}$$

$$FD_{BC} = 3 / \left(\frac{9}{4} + 3\right) = \frac{4}{7} \qquad FD_{CB} = 3 / \left(3 + \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$FD_{CD} = \frac{3}{2} / \left(\frac{3}{2} + 3\right) = \frac{1}{3} \qquad FD_{DC} = 1$$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- $M_A = -(6000)(2)(19 = -12\,000$ N.m
- Tramo AB: $M_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(6000)(4)^2}{12} = -8000$ N.m $= M_{BA}$
- Tramo BC: $M_{BC} = M_{CB} = -\frac{PL}{8} = -\frac{(8000)(4)}{8} = -4000$ N.m
- Tramo CD: $M_{CD} = -\frac{wL^2}{20} = \frac{-10\,000}{20}(6)^2 = -18\,000$ N.m

$$M_{DC} = -\frac{wL^2}{30} = \frac{-10\,000}{30}(6)^2 == -12\,000 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución:

K	A		(9/4) B		(3) C		(3/2) D
FD	0	1	3/7	4/7	2/3	1/3	1
MEP soltar A y D	+ -12 000 0	– 8000 4000 →	+ -8000 2000	– 4000	+ -4000	– 18 000 6000	+ -12 000 ← 12 000
MEP reajustado 1.ª distribución	-12 000	12 000	-6000 857,1	4000 1142,9	-4000 13 333,3	24 000 -6666,7	0

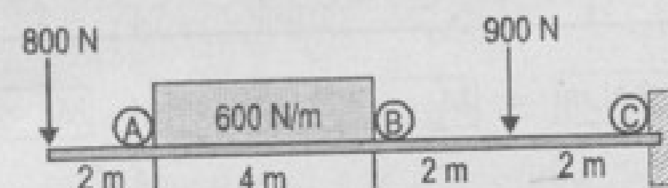
Trasmisión 2.ª distribución			2857,2	-6666,7 3809,5	571,5 -381	-190,5	
Trasmisión 3.ª distribución			81,6	-190,5 108,9	1904,8 -1269,9	-634,9	
Trasmisión 4.ª distribución			272,1	-635 362,9	54,5 -36,3	-18,2	
Momentos totales	-12 000	12 000	-1932	1932	-16 489,7	16 489,7	0

Así : $\boxed{M_A = -12\,000 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_B = -1\,932 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_C = -16\,489,7 \text{ N.m}}$

880. Véase problema 845.

Resolución:

Del sistema:



Cálculo de I: $I = \text{mcm}(4; 4) = 4$

Cálculo de rigideces relativas: $(K = I/L)$

$$K_{AB} = \frac{4}{4} = 1 \quad ; \quad K_{BC} = \frac{4}{4} = 1$$

Para el método abreviado: $\overline{K}_{AB} = \frac{3}{4}K_{AB} = \frac{3}{4}$

Cálculo de los factores de distribución $(FD = K / \Sigma K)$

$$FD_{AB} = 1 \qquad FD_{BA} = \frac{3}{4} / \left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{3}{7}$$

$$FD_{BC} = 1 / \left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{4}{7} \qquad FD_{CB} = 0 \text{ (por estar empotrado C)}$$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP):

- $M_A = -800\,(2) = -1600$ N.m

- En el tramo AB: $M_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(600)(4)^2}{12} = -800 \text{ N.m} = M_{BA}$

- En el tramo BC: $M_{BC} = M_{CB} = -\frac{PL}{8} = \frac{-(900)(4)}{8} = -450 \text{ N.m}$

Proceso de distribución:

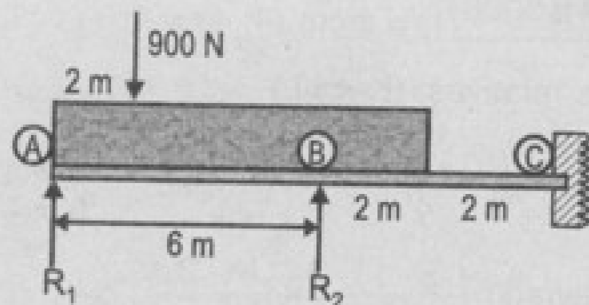
K	A		(3/4) B		(1) C
FD	0	1 / 3/7		4/7	0
MEP soltar A	+ -1600 0	− 800 800 →	−800 400	+ − 450	−450 +
MEP, reajustado Distribución	−1600	1600	−400 −21,43	450 −28,57 ↘	−450 −14,285
Momentos totales	−1600	1600	−421,43	421,43	−464,285

Así : $\boxed{M_A = -1600 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_B = -421{,}43 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_C = -464{,}285 \text{ N.m}}$

881. Véase problema 846.

Resolución:

Del sistema:



Cálculo de I: I = mcm (6; 4) = 12

Cálculo de las rigideces relativas (K = I/L):

$$K_{AB} = 12/6 = 2 \;;\; K_{BC} = 12/4 = 3$$

Para el método abreviado: $\overline{K}_{AB} = \frac{3}{4} K_{AB} = \frac{3}{4}(2) = \frac{3}{2}$

Cálculo de los factores de distribución (FD = K / ΣK)

$FD_{AB} = 1$ $\qquad FD_{BA} = \frac{3}{2} \Big/ \left(\frac{3}{2} + 3\right) = \frac{1}{3}$

$FD_{BC} = 3 \Big/ \left(\frac{3}{2} + 3\right) = \frac{2}{3}$ $\qquad FD_{CB} = 0$

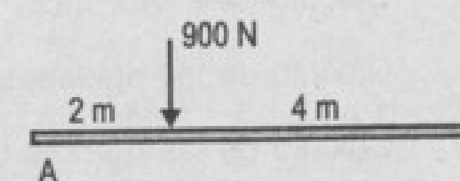
Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB (dos superposiciones):

Carga 1:

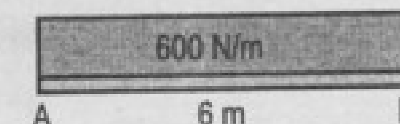
$$M_{1AB} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{900(2)(4)^2}{6^2} = -800 \text{ N.m}$$

$$M_{1BA} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = -\frac{900(2)^2(4)}{6^2} = -400 \text{ N.m}$$



Carga 2:

$$M_{2AB} = M_{2BA} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{600(6)^2}{12} = -1800 \text{ N.m}$$



Sumando: $M_{AB} = M_{1AB} + M_{2AB} = -800 - 1800 = -2600 \text{ N.m}$

$M_{BA} = M_{1BA} + M_{2AB} = -400 - 1800 = -2200 \text{ N.m}$

- Tramo BC: $M_{BC} = -\frac{11}{192} wL^2 = -\frac{11}{192}(600)(4)^2 = -550 \text{ N.m}$

$M_{CB} = -\frac{5}{192} wL^2 = -\frac{5}{192}(600)(4)^2 = -250 \text{ N.m}$

Proceso de distribución:

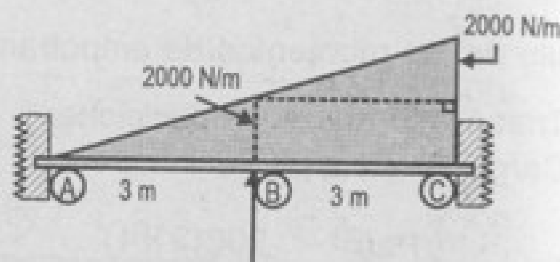
K	A	$\frac{3}{4}(2) = \left(\frac{3}{2}\right)$ B		(3) C
FD	1	1/3	2/3	0
MEP soltar A	− 2600 −2600	+ −2200 −1300	− 550	+ −250
MEP reajustado Distribución	0	−3500 983,3	550 1966,7 ↘	−250 983,3
Momentos totales	0	−2516,7	2516,7	733,3

Así: $\boxed{M_A = 0}$; $\boxed{M_B = -2516{,}7 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_C = +733{,}3 \text{ N.m}}$

882. Véase problema 849.

Resolución:

Del sistema:



Cálculo de I: I = mcm (3; 3) = 3

Cálculo de las rigideces (K = I/L)

Cálculo de las fuerzas de distribución: (FD = K / ΣK)

$FD_{AB} = 0$ (por empotramiento) $FD_{BA} = 3/(3+3) = 1/2 = FD_{BC}$

$FD_{CB} = 0$ (por empotramiento)

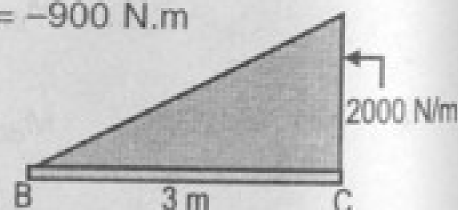
Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB: $$M_{AB} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{2000(3)^2}{30} = -600 \text{ N.m}$$

$$M_{BA} = -\frac{wL^2}{20} = -\frac{2000(3)^2}{20} = -900 \text{ N.m}$$

- Tramo BC (hay dos cargas superpuestas):

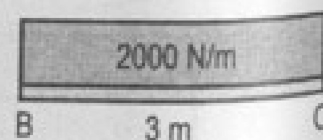
Carga 1:



$$M_{1BC} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{2000(3)^2}{30} = -600 \text{ N.m}$$

$$M_{1CB} = -\frac{wL^2}{20} = -\frac{2000(3)^2}{20} = -900 \text{ N.m}$$

Carga 2:



$$M_{2BC} = M_{2CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2000(3)^2}{12} = -1500 \text{ N.m}$$

Sumando: $M_{BC} = M_{1BC} + M_{2BC} = -600 - 1500 = -2100$ N.m

$$M_{CB} = M_{1CB} + M_{2CB} = -900 - 1500 = -2400 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución:

K	A	(1)	B	(1) C
FD	0	1/2	1/2	0
MEP	– 600	+ -900	– 2100	+ -2400
Distribución	-300	-600	-600	-300
Momentos totales	300	-1500	1500	-2700

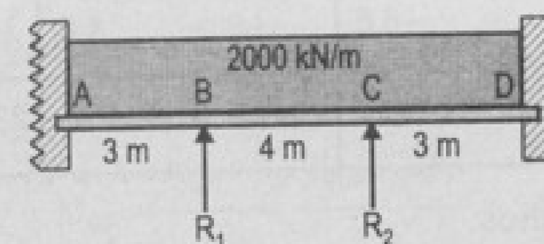
(Ojo con la convención de signos)

$\boxed{M_A = -300 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_B = -1500 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_C = -2700 \text{ N.m}}$

883. Véase problema 853.

Resolución:

Del sistema:



Hallando I = mcm (3; 4; 3) = 12

Hallando las rigideces relativas (K = I/L):

$K_{AB} = 12/3 = 4$; $K_{BC} = 12/4 = 3$; $K_{CD} = 12/3 = 4$

Hallando las fuerzas distributivas (FD = K / ΣK):

$FD_{AB} = 0$ $FD_{BA} = 4/7$ $FD_{BC} = 3/7$

$FD_{CB} = 3/7$ $FD_{CD} = 4/7$ $FD_{DC} = 0$

Hallando los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB:

$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2000(3)^2}{12} = -1500 \text{ N.m}$$

- Tramo BC:

$$M_{BC} = M_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2000(4)^2}{12} = -2666{,}7 \text{ N.m}$$

- Tramo CD:

$$M_{CD} = M_{DC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2000(3)^2}{12} = -1500 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución:

K: A (4) B (3) C (4) D

FD	0	4/7	3/7	3/7	4/7	0
MEP 1.ª distribución	– 1500	+ −1500 −666,7	– 2666,7 −500	+ −2666,7 500	– 1500 +666,7	+ −1500
Trasmisión 2.ª distribución	−333,4	−143,9	250 −107,1	−250 107,1	143,9	333,4
Trasmisión 3.ª distribución	−71,95	−30,6	+53,6 −23	−53,6 23	30,6	71,95
Trasmisión 4.ª distribución	−15,3	−6,6	11,5 −4,9	−11,5 4,9	6,6	15,3
Momentos totales	1079,35	−2346,8	2346,8	−2346,8	2346,8	−1079,35

Por convención de signos:

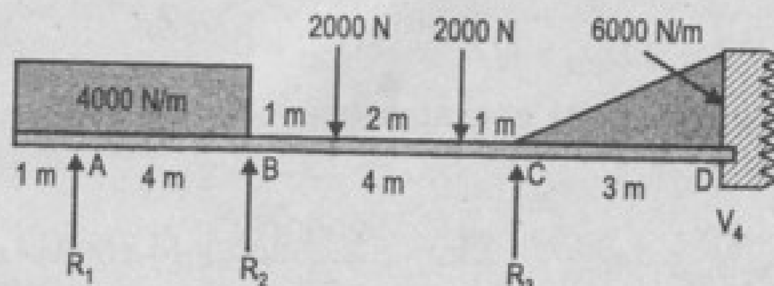
$\boxed{M_A = -1079{,}35 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_B = -2346{,}8 \text{ N.m}}$

$\boxed{M_C = -2346{,}8 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_D = -1079{,}35 \text{ N.m}}$

884. Véase problema 856.

Resolución:

Del sistema:



Cálculo de I: I = mcm(4; 4; 3) = 12

Cálculo de las rigideces relativas: (K = I/L)

$$K_{AB} = \frac{12}{4} = 3 \text{ (para el método abreviado)}$$

$$\bar{K}_{AB} = \frac{3}{4}(K_{AB}) = \frac{3}{4}(3) = \frac{3}{4} \; ; \quad K_{BC} = \frac{12}{4} = 3 \; ; \quad K_{CD} = \frac{12}{3} = 4$$

Cálculo de los factores de distribución: (FD = K / ΣK)

$$FD_{AB} = 1 \qquad FD_{BA} = \frac{9}{4}/\left(\frac{9}{4}+3\right) = \frac{3}{7}$$

$$FD_{BC} = 3/\left(\frac{9}{4}+3\right) = \frac{4}{7} \qquad FD_{CB} = 3/(3+4) = \frac{3}{7}$$

$$FD_{CD} = 4/(3+4) = \frac{4}{7} \qquad FD_{DC} = 0$$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- $M_A = -4000(1)\left(\frac{1}{2}\right) = -2000 \text{ N.m}$

- Tramo AB: $M_{AB} = M_{BA} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{4000(4)^2}{12} = -5333{,}3 \text{ N.m}$

- Tramo BC (dos cargas superpuestas):

$$M_{AB} = -\frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-2000(1)(3)^2}{4^2} - \frac{2000(3)(1)^2}{4^2} \Rightarrow M_{AB} = -1500 \text{ N.m}$$

$$M_{BA} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{-2000(1)^2(3)}{4^2} - \frac{2000(3)^2(1)}{4^2} \Rightarrow M_{BA} = -1500 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución:

k	A	(9/4)		B	(3)	C	(4) D
FD	0	1	3/7	4/7	3/7	4/7	0
	+	−	+	−	+	−	+
MEP soltar A	−2000 0	5333,3 −3333,3 →	−5333,3 −1666,7	1500	−1500	1800	−2700
MEP reajustado 1.ª distribución	−2000	2000	−7000 2357,1	1500 3142,9	−1500 −128,6	1800 −171,4	−2700
Trasmisión 2.ª distribución			27,6	−64,3 36,7	1571,5 −673,5	−898	−85,7
Trasmisión 3.ª distribución			144,3	−336,8 192,5	18,4 −7,9	−10,5	−449
Trasmisión 4.ª distribución			1,7	−4 2,3	96,3 −41,3	−55	−5,3
Trasmisión 5.ª distribución			8,9	−20,7 11,8	1,2 −0,5	−0,7	−27,5
Momentos totales	−2000	2000	−4460,4	4460,4	−664,4	+664,4	−3267,5

Así: $M_A = -2000$ N.m ; $M_B = -4460,4$ N.m

$M_C = -664,4$ N.m ; $M_D = -3267,5$ N.m

885. Resolver el problema 856 si el momento de inercia varía de uno a otro tramo, de manera que la rigidez relativa del tramo 1 sea 2; del 2, 1,5 y del 3, 1.

Resolución:

Con respecto al problema anterior, solo cambian los valores de las rigideces relativas, lo cual modifica los valores de los factores de distribución y modifican el proceso de distribución.

Así, de los nuevos datos:

$K_{AB} = 2$; (para el método abreviado, $\bar{K}_{AB} = (3/4)(2) = 1,5$)

$K_{BC} = 1,5$ $\qquad$ $K_{CD} = 1$

Así los factores de distribución son:

$FD_{AB} = 1$ $\qquad$ $FD_{BA} = (1,5) / (1,5 + 1,5) = 0,5$

$FD_{BC} = (1,5) / (1,5 + 1,5) = 0,5$ $\qquad$ $FD_{CB} = (1,5)/(1 + 1,5) = 0,6$

$FD_{CD} = 1/(1 + 1,5) = 0,4$ $\qquad$ $FD_{DC} = 0$

Y para los mismos MEP, tenemos el siguiente proceso de distribución:

K	A	(2)		B	(1,5)	C	(1) D
FD	0	1	0,5	0,5	0,6	0,4	0
	+	−	+	−	+	−	+
MEP soltar A	−2000 0	5333,3 −3333,3 →	−5333,3 −1666,7	1500	−1500	1800	−2700
MEP reajustado 1.ª distribución	−2000	2000	−7000 2750	1500 2750	−1500 −180	1800 −120	−2700
Trasmisión 2.ª distribución			45	−90 45	1375 −825	−550	−60
Trasmisión 3.ª distribución			206,25	−412,5 206,25	22,5 −13,5	−9	−275
Trasmisión 4.ª distribución			+3,375	−6,75 +3,375	103,13 −61,88	−41,25	−4,5
Momentos totales	−2000	2000	−3995,375	3995,375	−1079,75	1079,75	−3039,5

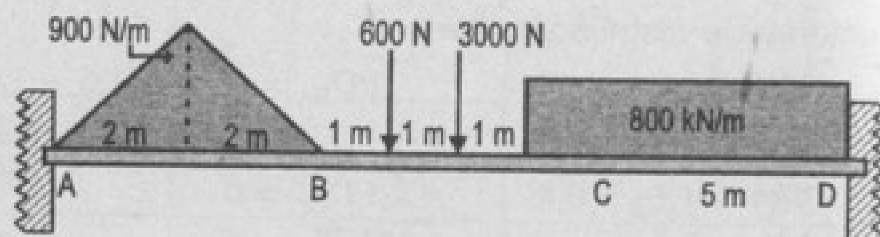
Luego: $M_A = -2000$ N.m ; $M_B = -3995,375$ N.m

$M_C = -1079,75$ N.m ; $M_D = -3039,5$ N.m

886. Calcular los momentos en los apoyos en el problema 825, si los extremos de la viga están empotrados en lugar simplemente de apoyados.

Resolución:

Del sistema:



Cálculo de I = mcm (4; 3; 5) = 60

Cálculo de rigideces relativas (K = I/L):

$K_{AB} = 60/4 = 15$; $K_{BC} = 60/3 = 20$; $K_{CD} = 60/5 = 12$

Cálculo de las fuerzas de distribución: $(FD = K/\Sigma K)$

$FD_{AB} = 0$ $\qquad$ $FD_{BA} = 15/(15 + 20) = 3/7$

$FD_{BC} = 20/(15 + 20) = 4/7$ $\qquad$ $FD_{CB} = 20/(20 + 12) = 5/8$

$FD_{CD} = 12/(20 + 12) = 3/8$ $\qquad$ $FD_{DC} = 0$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB:

$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{5wL^2}{96} = \frac{-5(900)(4)^2}{96} = -750 \text{ N.m}$$

- Tramo BC (dos superposiciones):

$$M_{BC} = -\frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-6000(1)(2)^2}{3^2} - \frac{3000(2)(1)^2}{3^2} \Rightarrow M_{BC} = -3333{,}3 \text{ N.m}$$

$$M_{CB} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{-6000(1)^2(2)}{3^2} - \frac{3000(2)^2(1)}{3^2} \Rightarrow M_{CB} = -2666{,}7 \text{ N.m}$$

- Tramo CD:

$$M_{CD} = M_{DC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-800(5)^2}{12} = -1666{,}7 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución:

K	A	(15)	B	(20)	C	(12) D
FD	0	3/7	4/7	5/8	3/8	0
	–	+	–	+	–	+
MEP 1.ª distribución	750	–750 –1107,1	3333,3 –1476,2	–2666,7 625	1666,7 375	–1666,7
Trasmisión 2.ª distribución	–553,55	–133,9	312,5 –178,6	7381 461,3	276,8	187,5
Trasmisión 3.ª distribución	–66,95	–98,85	230,65 –131,8	–89,3 5582	33,48	138,4
Trasmisión 4.ª distribución	–49,43	–11,96	27,91 –15,95	–659 41,19	24,71	16,74
Trasmisión 5.ª distribución	–5,98	–8,83	20,60 –11,77	–7,98 4,99	2,99	12,35
Momentos totales	74,09	–2110,64	2110,64	–2379,68	2379,68	–1311,71

Por el método de Cross obtenemos:

$\boxed{M_A = -74{,}09 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_B = -2110{,}64 \text{ N.m}}$

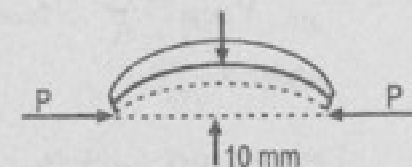
$\boxed{M_C = -2379{,}68 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_D = -1311{,}71 \text{ N.m}}$

CAPÍTULO 9

ESFUERZOS COMBINADOS

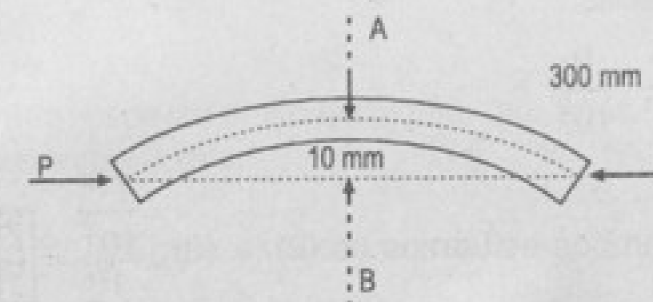
901. Problema ilustrativo.

902. Comparar el esfuerzo máximo en una barra de sección cuadrada, de 10 mm de lado, ligeramente curvada; las fuerzas P actúan a 10 mm del centro de la sección central, como indica la figura, con el esfuerzo máximo producido si la barra fuera perfectamente recta y las fuerzas P se aplicaran axialmente. Este problema es un claro ejemplo del enorme peligro de la flexión lateral en las columnas.

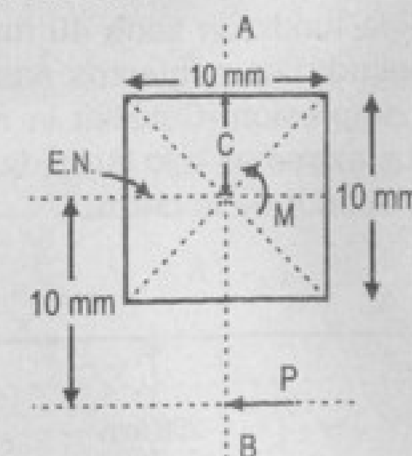


Resolución:

Del sistema:



En la sección central tenemos:



El momento flector respecto al E.N. es:

$M = 10P \qquad ...(1)$

Área de sección recta: A = $(10)^2$ mm²

Momento de inercia: $I = \frac{(10)(10)^3}{12} = \frac{10^4}{12}$ mm²

Distancia de extremo de sección a la línea del E.N.: $c = \frac{10}{2} = 5$ mm

El esfuerzo máximo normal es la suma del esfuerzo axial (de compresión) y del esfuerzo de flexión, producido por M:

$$\sigma_{axial} = \frac{P}{A};\ \sigma_{flexión} = \frac{Mc}{I}$$

Así:

$$\sigma = \sigma_{axial} + \sigma_{flexión} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$\sigma = \frac{P}{10^2} + \frac{(10P)(5)}{(10^4/12)} = \frac{7P}{10^2} \quad ...(2)$$

Si no existe flexión, es decir, si la barra estuviera perfectamente recta, solo habría esfuerzo axial:

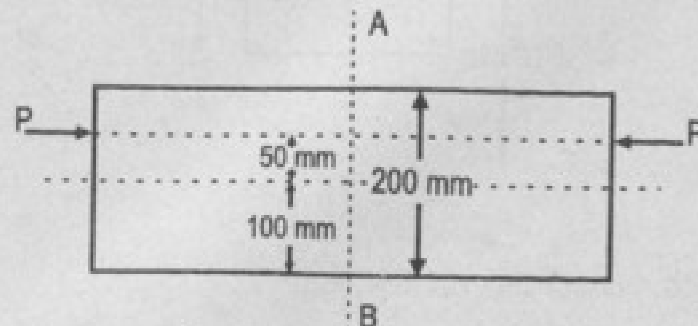
$$\sigma = \sigma_{axial} = \frac{P}{A} = \frac{P}{10^2} \quad ...(3)$$

∴ la relación de ambos esfuerzos es (2) ÷ (3): $\dfrac{\frac{7P}{10^2}}{\frac{P}{10^2}} = \boxed{\frac{7}{1}}$

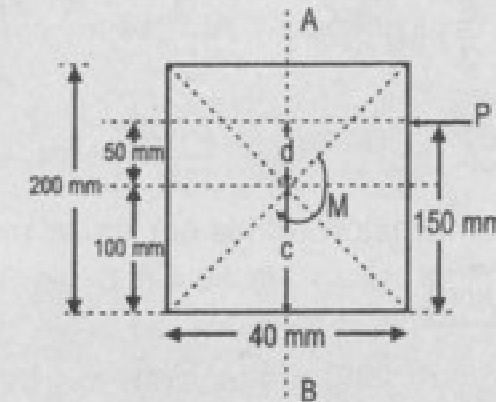
903. Una varilla de conexión de fundición tiene 40 mm de ancho por 200 mm de altura y 500 mm de longitud. Los esfuerzos admisibles son de 40 MN/m² a tensión y 80 MN/m² a compresión. Calcular la mayor fuerza de compresión que puede aplicarse a sus extremos a lo largo de un eje longitudinal situado a 150 mm arriba del borde inferior de la pieza.

Resolución:

Del diagrama:



Tiene la sección rectangular:



Área de sección rectangular: [A = bh²]

$\Rightarrow$ A = (0,04)(0,2) m² = 8×10^{-3} m² ...(1)

Momento de inercia: $\Rightarrow \left[\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}\right]$ $I = \frac{(0{,}04)(0{,}2)^3 m^4}{12} = \frac{8}{3} \times 10^{-5}$ m⁴ ...(2)

Como c = 100 mm = 0,1 m, es la distancia tanto para el esfuerzo de tensión y compresión ...(3)

Tomando momentos respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección rectangular:

M = – Pd = – P(0,05); (d: está en metros) ...(4)

Calculando el esfuerzo normal tanto de tensión y compresión:

$\left[\sigma_c = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I}\right]$: esfuerzo a compresión

$$\Rightarrow \sigma_c = -\frac{P}{8\times10^{-3}} - \frac{(0{,}05)P(0{,}1)}{\frac{8}{3}\times10^{-5}}$$

(en valor absoluto)

$$\sigma_c = \frac{2{,}5}{8}\times10^3 P \le 80\times10^6 \text{ N}$$

Resolviendo: $P \le 256$ kN ...(α)

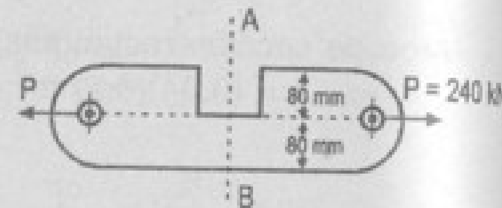
$\left[\sigma_t = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}\right]$: esfuerzo a tensión ...(β)

$$\sigma_t = -\frac{P}{8\times10^{-3}} + \frac{(0,05)P(0,1)}{\frac{8}{3}\times10^{-5}} = \frac{0,5\ P}{10^{-3}\times8} \leq 40\times10^6\ N$$

Resolviendo: $P \leq 640$ kN

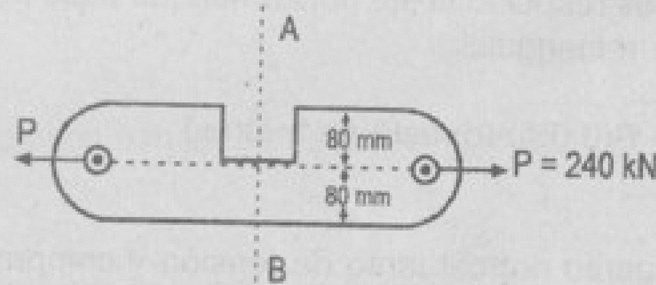
La mayor fuerza de compresión admisible es la menor de las dos fuerzas halladas: $\boxed{P_{máx.} = 256\ kN}$

904. Un elemento de máquina tiene la forma indicada en la figura, con un rebaje que reduce la sección a la mitad, en A-B, con el objeto de evitar interferencia con otros elementos. Calcular el esfuerzo de tensión máximo en A-B, si (a) la sección es cuadrada, con 160 mm por lado, y (b) si la sección es circular de 160 mm de diámetro.

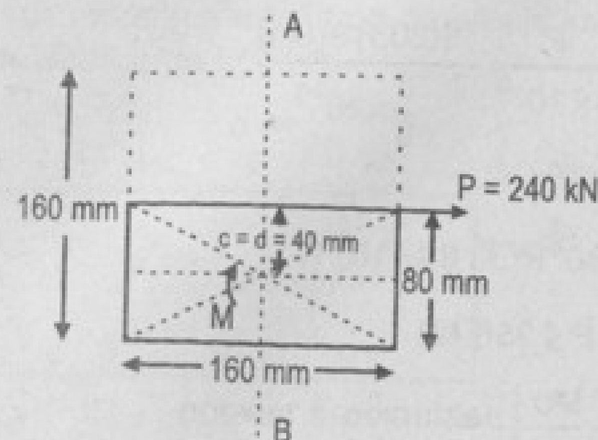


Resolución:

Del sistema del elemento de máquina:



a) Para la sección cuadrada en A-B:



(todas las dimensiones a metros)

$A = (0,16)(0,08)\ m^2 = 128\times10^{-4}\ m^2$ ...(α)

$I = \frac{(0,16)(0,08)^3}{12}\ m^4 = \frac{2048}{3}\times10^{-8}\ m^4$ ...(β)

El brazo flector de P es: $d = 0,04$ m ...(γ)

Distancia de esfuerzo por tensión: $c = 0,04$ m ...(θ)

El momento flector respecto a la horizontal que pasa por el centro de gravedad:

$M = Pd = 0,04P$ ...(φ)

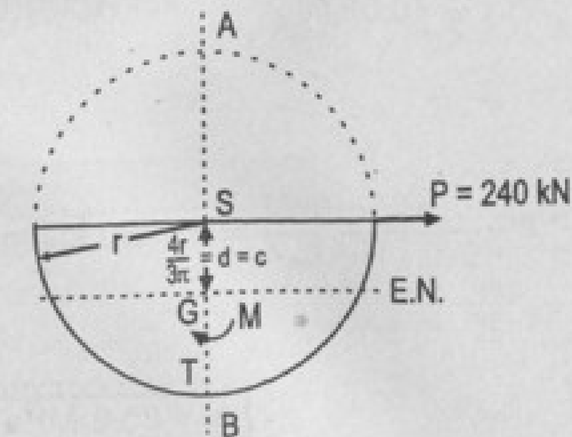
El esfuerzo de tensión máximo es:

$$\left[\sigma_t = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}\right] \Rightarrow \sigma_t = \frac{P}{128\times10^{-4}} + \frac{(0,04P)(0,04)}{\left(\frac{2048}{3}\right)\times10^{-8}}$$

$$\sigma_t = 78,125P + 234,375P = 312,5P;\ \sigma_t = (312,5)(240)\frac{kN}{m^2} = 75\ 000\ kN/m^2$$

$\therefore\ \boxed{\sigma_t = 75,0\ MPa}$

b) Para la sección circular en A-B



Área de semicircunferencia de radio igual a:

$r = 80\text{ mm} = 0{,}08\text{ m}$

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}(0{,}08)^2\text{ m}^2 \qquad \ldots(\alpha)$$

El momento de inercia de la semicircunferencia es:

$$I = [0{,}11r^4] = (0{,}11)(0{,}08)^4\text{ m}^4 \qquad \ldots(\beta)$$

La fuerza P de tensión produce una flexión hacia abajo. Así la distancia del punto de tensión máxima (S) al centroide de la sección (G) es:

$$c = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(0{,}08)}{3\pi}\text{m} \qquad \ldots(\gamma)$$

La fuerza P (su línea de acción) está a una distancia $d = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(0{,}08)}{3\pi}$ m de la horizontal que pasa por el centroide de la semicircunferencia. A su vez genera el momento flector:

$$M = Pd = \frac{4(0{,}08)}{3\pi}(240)\text{ kN·m} \qquad \ldots(\theta)$$

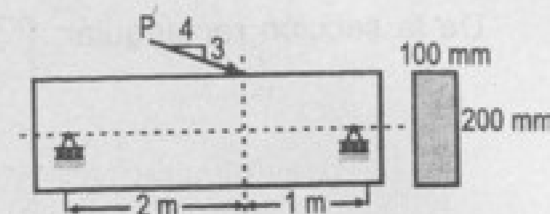
El esfuerzo de tensión máximo es:

$$\sigma_t = \left[\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}\right] = \frac{(240)(\text{kN/m}^2)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)(0{,}08)^2} + \frac{\frac{(4)(0{,}08)(240)}{(3\pi)}\frac{(4)(0{,}08)}{(3\pi)}}{(0{,}11)(0{,}08)^4}\text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_t = \frac{240}{\pi(0{,}08)^2}\left(2 + \frac{16}{9(0{,}11)\pi}\right)\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 85{,}280\text{ kN/m}^2$$

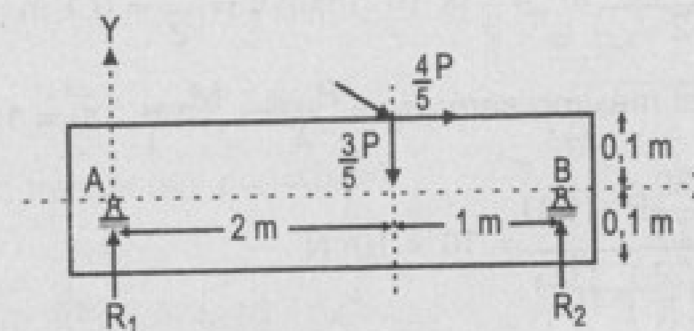
$$\therefore \boxed{\sigma_t = 85{,}3\text{ MPa}}$$

905. Una viga de madera de sección rectangular de 100 mm × 200 mm está apoyada como indica la figura y soporta una carga P. Calcular el máximo valor de P si el esfuerzo normal no debe exceder de 10 MPa.



Resolución:

Hallando las reacciones R_1 y R_2 que dependen de P en la viga:



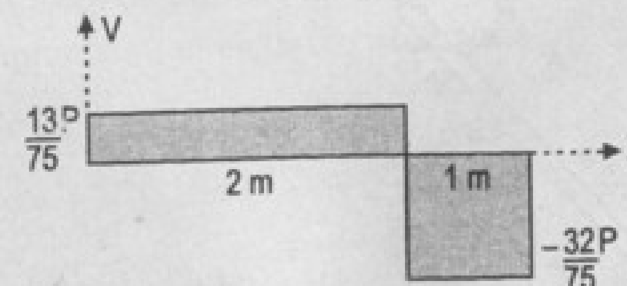
Del diagrama de cuerpo libre del sistema, y descomponiendo P en el sistema XY:

$$\Sigma M_B = 0 = 3R_1 + \frac{4}{5}P(0{,}1) - \frac{3}{5}P(1) \qquad \ldots(1)$$

$$\Sigma F_Y = 0 = R_1 + R_2 - \frac{3}{5}P \qquad \ldots(2)$$

Resolviendo (1) y (2): $R_1 = \frac{13}{75}P \;\wedge\; R_2 = \frac{32}{75}P$

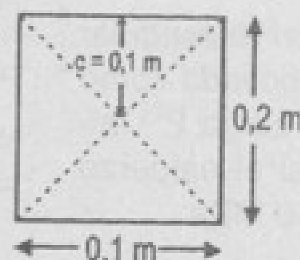
Graficando las fuerzas cortantes:



Donde el momento máximo es:

$$M_{máx.} = \frac{32}{75}P \qquad \ldots(\alpha)$$

De la sección rectangular:



donde: $A = (0,1)(0,2)\ m^2 = 2 \times 10^{-2}\ m^2$

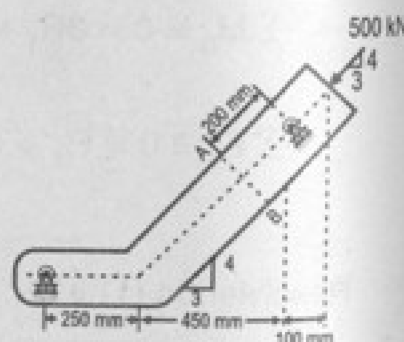
además: $I = \dfrac{(0,1)(0,2)^3}{12}\ m^4 = \dfrac{2}{3} \times 10^{-4} m^4 \wedge c = \dfrac{h}{2} = 0,1\ m$

El esfuerzo normal máximo será: $\sigma_N = \dfrac{P_{axial}}{A} + \dfrac{M_{max.} \times c}{I} = 10\ MPa$

Así: $$\frac{\frac{4}{5}P}{(2\times10^{-2})} + \frac{\frac{32}{75}P\times(0,1)}{\left(\frac{2}{3}\right)\times10^{-4}} = 10 \times 10^6\ N$$

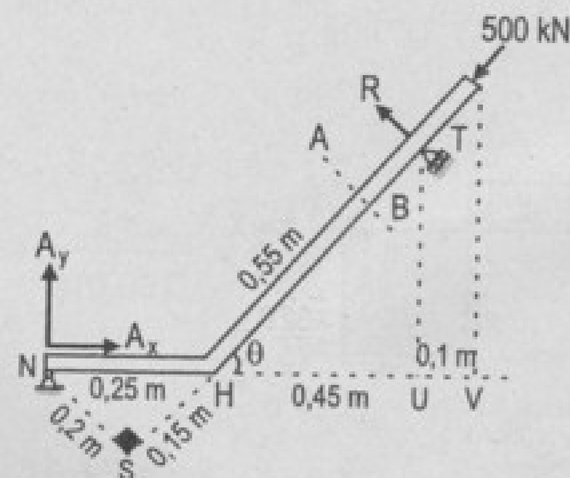
$$680P = 10^7\ N \Rightarrow \boxed{P = 14,7\ kN}$$

906. La barra de acero de la figura es de sección cuadrada, de 200 mm de lado. Calcular el esfuerzo normal en A y en B.



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre del sistema:



Tomando momentos en el punto N:

$$\Sigma M_N = 0 = R\times(ST) - 500 \times (NS) \qquad ...(\alpha)$$

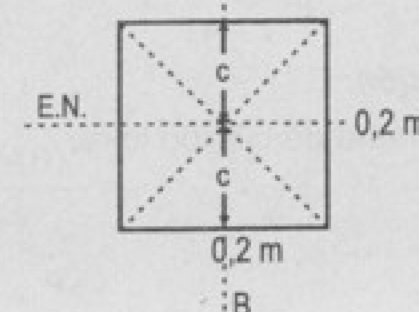
Como $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$, aplicando relaciones geométricas elementales:

$$HT = 0,75\ m;\ SH = 0,15\ m;\ NS = 0,2\ m$$

En (α): $R(SH + HT) = 500(NS)$

o $\qquad 0,9R = 500(0,2)\ kN;\quad$ así: $R = \dfrac{1000}{9}\ kN$

De la sección transversal de la barra:

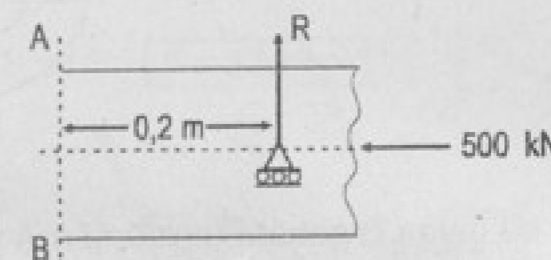


donde: $A = (0,2)^2\ m^2 = 4\times10^{-2}\ m^2$

$$I = \frac{(0,2)^4}{12}\ m^4 = \frac{4}{3}\times10^{-4}\ m^4$$

$$c = \frac{0,2}{2}\ m = 0,1\ m$$

Las fuerzas que actúan sobre A-B son:



Tomando momentos respecto al eje A-B:

$$M = (0,2)R = (0,2)\left(\frac{1000}{9}\right) kN{\cdot}m \quad \Rightarrow \quad M = \frac{200}{9}\ kN{\cdot}m$$

Como la fuerza axial de 500 kN es de compresión, así:

En A se da compresión; el esfuerzo normal es:

$$\sigma_A = \left[-\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I}\right] = \left(-\frac{500}{4\times10^{-2}} - \frac{200}{9}\cdot\frac{0,1}{\frac{4}{3}\times10^{-4}}\right)\frac{kN}{m^2}$$

$$\sigma_A = (-12\ 500 - 16\ 666,67)\ kN/m^2$$

$$\sigma_A = -\ 29\ 166,67\ kN/m^2$$

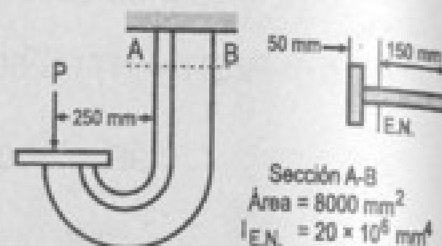
$$\therefore \quad \boxed{\sigma_A = -\ 29,2\ MPa}$$

En B se da tensión; el esfuerzo normal es:

$$\sigma_B = \left[-\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}\right] = (-12\,500 + 16\,666{,}67)\ \text{kN/m}^2$$

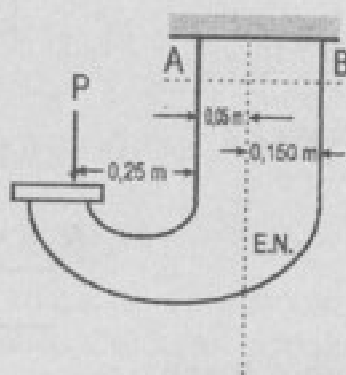
$\therefore$ $\boxed{\sigma_B = 4{,}2\ \text{MPa}}$

907. Calcular la carga máxima P que se puede aplicar a la plataforma del soporte de fundición de la figura, si $\sigma_t \leq 30\ \text{MN/m}^2$ y $\sigma_c \leq 70\ \text{MN/m}^2$.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:



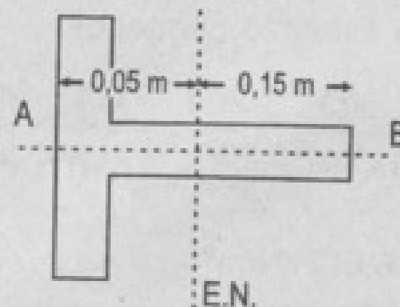
La carga P genera tensión en A y compresión en B.

Tomando momentos respecto al eje neutro (E.N.):

$M = (0{,}25 + 0{,}05)P$ ...(1)

$M = (0{,}3)P$ ...(1)'

De la sección A-B tenemos:



donde: $A = 8 \times 10^3\ \text{mm}^2 = 8 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$

$I_{E.N.} = 20 \times 10^6\ \text{mm}^4 = 2 \times 10^{-5}\ \text{m}^4$

$c_1 = 0{,}05$ m (distancia por tensión)

$c_2 = 0{,}15$ m (distancia por compresión)

Esfuerzo normal por tensión:

$$\sigma_t = \left[\frac{P}{A} + \frac{Mc_1}{I_{E.N.}}\right] = \frac{P}{8\times10^{-3}} + \frac{(0{,}3)P(0{,}05)}{2\times10^{-5}} = 125P + 750P = 875P$$

Por condición del problema: $\sigma_t = 875P \leq 30\times10^3$ kN

o $P \leq 34{,}285$ kN

Esfuerzo normal por compresión:

$$\sigma_c = \left[\frac{P}{A} - \frac{Mc_2}{I_{E.N.}}\right] = \frac{P}{8\times10^{-3}} - \frac{(0{,}3)P(0{,}15)}{2\times10^{-5}}$$

$\sigma_c = 125P - 2250P = -2125P$

Tomando el valor absoluto: $\sigma_c = 2125P \leq 70\times10^3$ kN o $P \leq 32{,}941$ kN

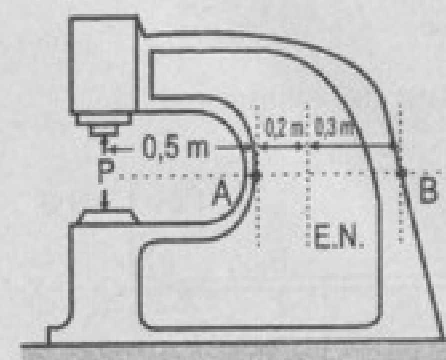
Es decir, el máximo valor admisible para P será: $\boxed{P = 32{,}9\ \text{kN}}$

908. Una prensa tiene la estructura de acero fundido que muestra la figura. Calcular la fuerza máxima de prensado que se puede ejercer sin sobrepasar el esfuerzo máximo de 120 MPa en la sección A-B, cuyo esquema y datos se indican también en la figura. (1-1 es el eje que pasa por el centro de gravedad de la sección)



Resolución:

Del diagrama:

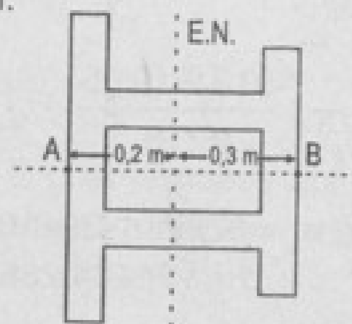


Tomando momentos respecto al E.N.:

$M = (0,5 + 0,2)P = (0,7)P$ ...(1)

En B se da tensión y en A, compresión.

De la sección transversal:



donde: $I = 1600 \times 10^6\ mm^4 = 16 \times 10^{-4}\ m^4$

$A = 80 \times 10^3 mm^2 = 8 \times 10^{-2}\ m^2$

$c_1 = 0,3$ m (distancia por tensión)

$c_2 = 0,2$ m (distancia por compresión)

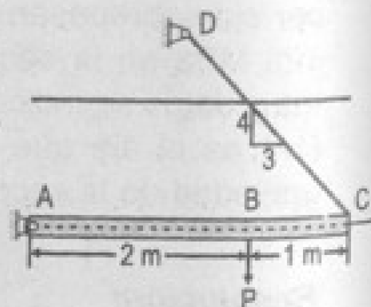
El esfuerzo máximo se da por tensión:

$$\sigma_t = \sigma_B = \left[\frac{P}{A} + \frac{Mc_1}{I}\right] \Rightarrow \sigma_B = \frac{P}{8\times10^{-2}} + \frac{(0,7)P(0,3)}{16\times10^{-4}} = 143,75P$$

Por condición del problema: $\sigma_B = 143,75P \leq 120\times10^3$ kN $\Rightarrow P \leq 834,78$ kN

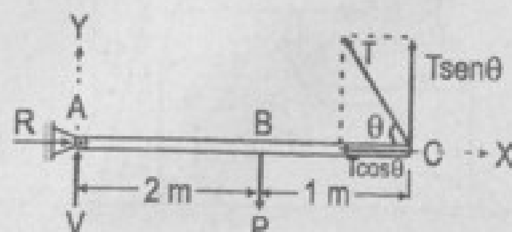
Así: $\boxed{P_{máx.} = 834,78 \text{ kN}}$

909. Una viga de sección rectangular, de 100 mm de ancho por 400 mm de altura, está articulada en A, sujeta mediante un cable CD y sometida a una carga P, como se muestra en la figura. Calcular el máximo valor de P que producirá un esfuerzo normal no mayor de 120 MPa. Descarte la posibilidad de pandeo.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema:



Como $\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{4}{5};\ \cos\theta = \frac{3}{5}$

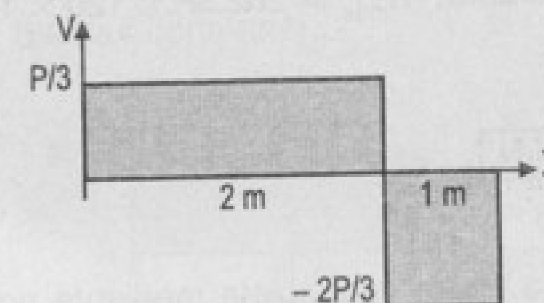
Por las leyes de la estática:

$$\Sigma F_y = 0 = V + T\left(\frac{4}{5}\right) - P \quad ...(1)$$

$$\Sigma M_C = 0 = 3V - P \quad ...(2)$$

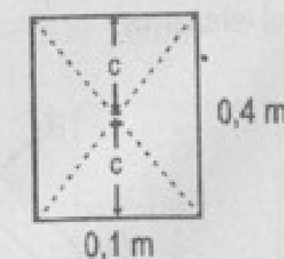
Resolviendo: $V = \frac{P}{3} \wedge T = \frac{5}{6}P$ ...(α)

Graficando las fuerzas cortantes:



El momento máximo está para x = 2 m, así: $M_{máx.} = \frac{P}{3}(2) = \frac{2}{3}P$ ...(β)

De la sección rectangular:



donde: $A = (0,1)(0,4)\ m^2 = 4 \times 10^{-2}\ m^2$

$$I = \frac{(0,1)(0,4)^3}{12}\ m^4 = \frac{16}{3}\times10^{-4}\ m^4$$

$$c = \frac{(0,4)}{2}\ m = 0,2\ m$$

La fuerza Tcosθ es axial por compresión, además:

$$T\cos\theta = \frac{P}{2} \qquad ...(\theta)$$

El esfuerzo normal máximo será por compresión:

$$\sigma_{máx.} = \frac{-T\cos\theta}{A} - \frac{Mc}{I}$$

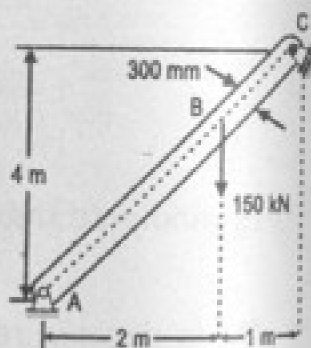
$$\sigma_{máx.} = \frac{-(P/2)}{4\times10^{-2}} - \frac{(2/3)P(0,2)}{(16/3)\times10^{-4}}$$

Sólo tomando su valor absoluto: $\sigma_{máx.} = 12,5P + 250P = 262,5P$

Por condición del problema: $\sigma_{máx.} = 262,5P \leq 120 \times 10^3$ kN, así: $P \leq 457,14$ kN

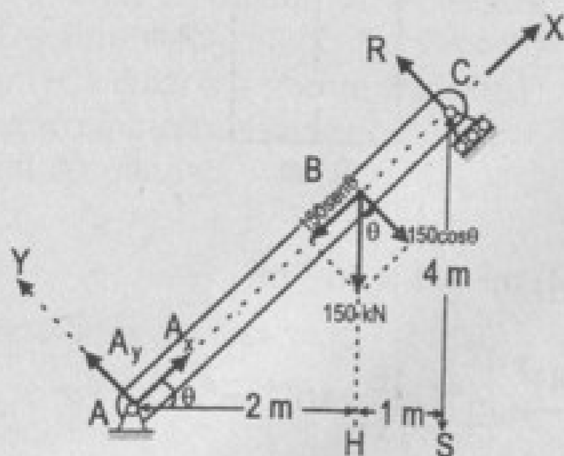
Luego: $\boxed{P_{máx.} = 457 \text{ kN}}$

910. La viga inclinada de la figura está sujeta mediante un perno en A y sobre rodillos en C. Si su sección es rectangular, de 100 mm x 300 mm, calcular el esfuerzo de compresión máximo desarrollado en la viga.



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre del sistema:



Como $\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5} \wedge \cos\theta = \frac{3}{5}$ ...(1)

además: $AB = \frac{AH}{\cos\theta} = \frac{10}{3}$ m $\wedge$ $BC = \frac{AB}{2} = \frac{5}{3}$ m

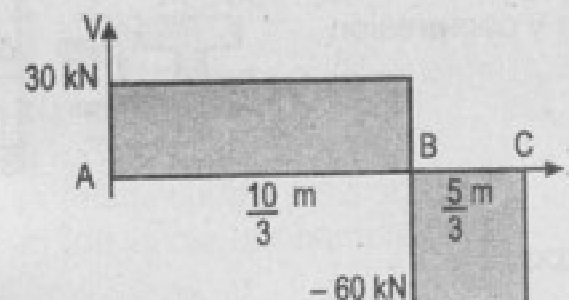
Por leyes de la Estática:

$$\Sigma F_y = 0 = A_y + R - 150\left(\frac{3}{5}\right) \qquad ...(2)$$

$$\Sigma M_A = 0 = (AC)R - (AB)(150)\left(\frac{3}{5}\right) \qquad ...(3)$$

De (2) y (3): $R = 60$ kN
$A_y = 30$ kN

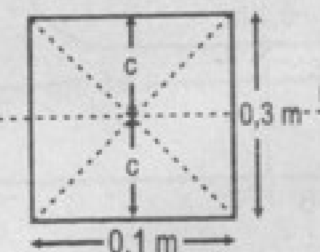
Hallando el momento máximo:
(del diagrama de fuerzas cortantes)



El momento máximo se da en $x = \frac{10}{3}$ m

$$M_{máx.} = 30\left(\frac{10}{3}\right) \text{kN·m} = 100 \text{ kN·m} \qquad ...(\alpha)$$

De la sección rectangular:



donde: $A = (0,1)(0,3)\ m^2 = 3 \times 10^{-2}\ m^2$

$$I = \frac{(0,1)(0,3)^3}{12}\ m^4 = 225 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$c = \frac{0,3}{2}\ m = 0,15\ m$$

La fuerza axial de compresión es: $P = 150\text{sen}\theta = 120$ kN

El esfuerzo normal por compresión es: $\sigma_c = \left[-\frac{P}{A}-\frac{Mc}{I}\right]$

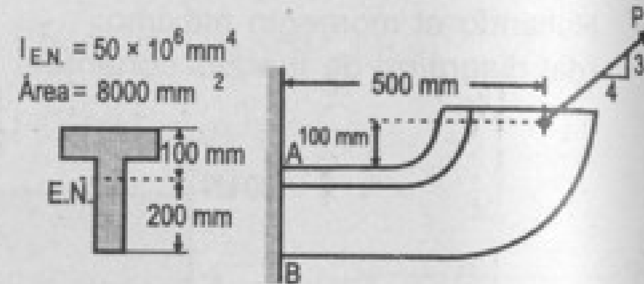
Solo tomando el valor absoluto:

$$\sigma_c = \left(\frac{120}{3\times10^{-2}}+\frac{100(0{,}15)}{225\times10^{-6}}\right)\text{kN/m}^2$$

$$\sigma_c = (4000 + 66\,666{,}7)\ \text{kN/m}^2$$

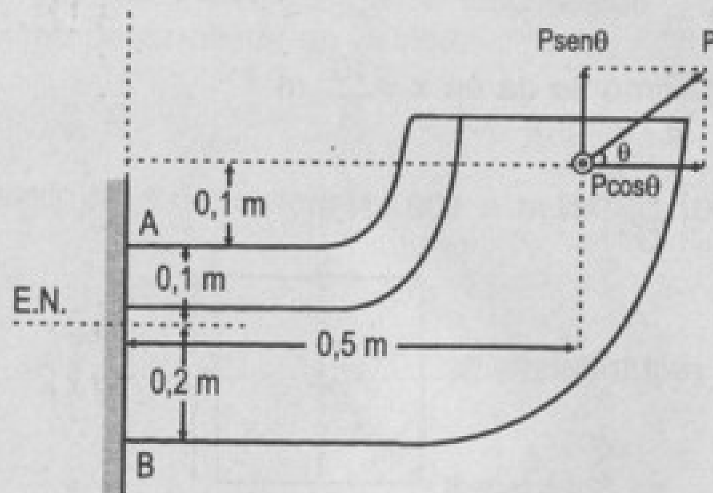
$$\sigma_c = 70\,666{,}7\ \text{kN/m}^2 \quad \text{o} \quad \boxed{\sigma_c = 70{,}7\ \text{MPa}}$$

911. Si P = 100 kN en la ménsula de la figura, calcular los máximos valores del esfuerzo a tensión y compresión en la sección A-B.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:



Tomando momento flexionante de P respecto al eje A-B y al E.N.:

$$M = (0{,}5)P\text{sen}\theta - (0{,}1 + 0{,}1)P\cos\theta$$

como $\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{3}{5} \wedge \cos\theta = \frac{4}{5}$

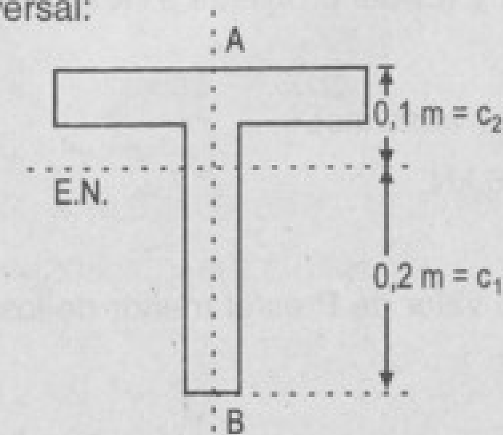
tenemos que: $M = (0{,}5)\left(\frac{3}{5}\right)P - (0{,}2)\left(\frac{4}{5}\right)P = 0{,}14P$ ...(α)

La fuerza axial es de tensión producida por:

$$P_{axial} = P\cos\theta = \frac{4}{5}P \qquad ...(\beta)$$

Por la dirección de la fuerza flectora P, se produce tensión en B y compresión en A.

De la sección transversal:



Donde: $A = 8 \times 10^3\ \text{mm}^2 = 8 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$

$I_{E.N.} = 50 \times 10^6\ \text{mm}^4 = 5 \times 10^{-5}\ \text{m}^4$

$c_1 = 0{,}2$ m (distancia por tensión)

$c_1 = 0{,}1$ m (distancia por compresión)

Hallando los esfuerzos normales máximos:

$$\sigma_t = \left[\frac{P_{axial}}{A}+\frac{M_{máx.}c_1}{I_{E.N.}}\right] \qquad ...\text{(de tensión)}$$

$$\sigma_t = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)P}{8\times10^{-3}}+\frac{(0{,}14P)(0{,}2)}{5\times10^{-5}} = 660P \qquad ...(1)$$

$$\sigma_c = \left[\frac{P_{axial}}{A}-\frac{M_{máx.}c_2}{I_{E.N.}}\right] \qquad ...\text{(de compresión)}$$

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)P}{8\times10^{-3}}-\frac{(0{,}14P)(0{,}1)}{5\times10^{-5}} = -180P \qquad ...(2)$$

Para el problema: P = 100 kN, así:

$$\boxed{\sigma_t = 660(100)\ \text{kN/m}^2 = 66\ \text{MPa}} \wedge \boxed{\sigma_c = -180(100)\ \text{kN/m}^2 = -18\ \text{MPa}}$$

912. Determinar la máxima fuerza P que se puede aplicar en el problema anterior, si los esfuerzos admisibles en A-B son de 8 MPa y 12 MPa a tensión y compresión, respectivamente.

Resolución:

Por las ecuaciones (1) y (2) del problema 911: $\sigma_t = 660P \leq 8000$ kN

donde: $P \leq 12{,}12$ kN ...(α)

y (solo tomando el valor absoluto).

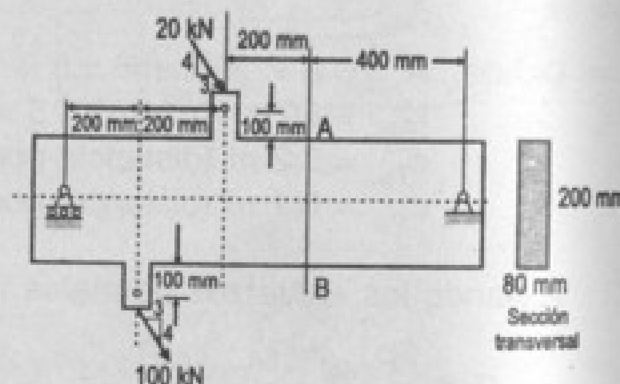
$\sigma_c = 180P \leq 12\ 000$ kN

$P \leq 66{,}67$ kN ...(β)

de (α) y (β), el máximo valor de P es el menor de los valores hallados, así:

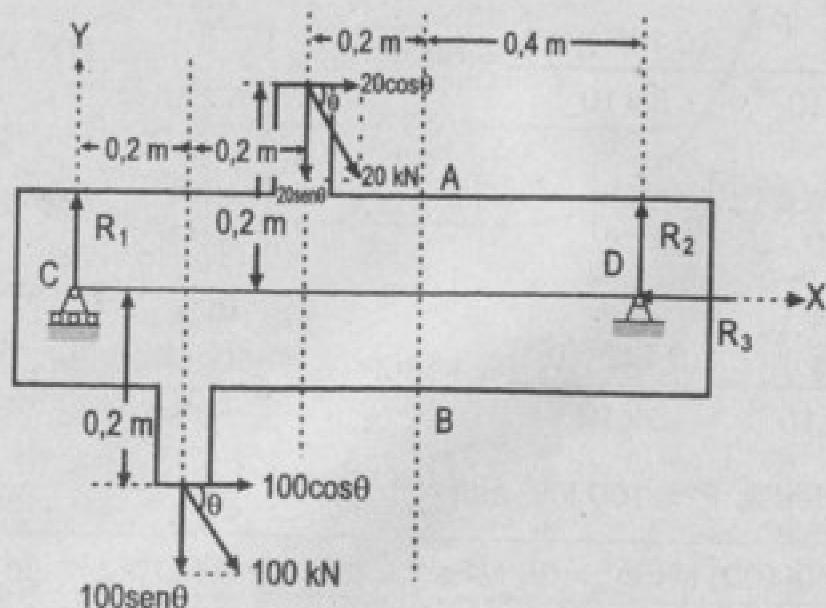
$\boxed{P_{máx.} = 12{,}1 \text{ kN}}$

913. Calcular los esfuerzos en A y en B en la pieza cargada como indica la figura.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema:



Del dato, $\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5} \wedge \cos\theta = \frac{3}{5}$.

Luego, por las ecuaciones de la Estática:

$\Sigma F_x = 0 = 20\cos\theta + 100\cos\theta - R_3$,

así: $R_3 = 72$ kN ...(α)

$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 20\operatorname{sen}\theta - 100\operatorname{sen}\theta$

así: $R_1 + R_2 = 96$ kN ...(1)

$\Sigma M_c = 0 = (0{,}1)R_2 + (0{,}2)(100\cos\theta) - (0{,}2)(100\operatorname{sen}\theta)$
$- (0{,}4)(20\operatorname{sen}\theta) - (0{,}2)(20\cos\theta)$

Luego: $R_2 = 12{,}8$ kN ...(2)

De (1) y (2): $R_1 = 83{,}2$ kN

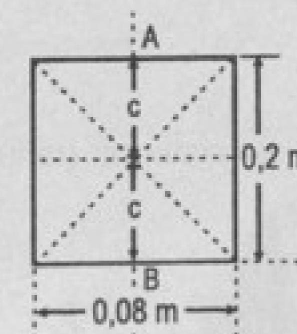
Tomando momentos respecto al eje A-B, (por el lado derecho):

$M = (0{,}4)R_2 = (0{,}4)(12{,}8)$ kN·m o

$M = 5{,}12$ kN·m ...(β)

La fuerza axial que actúa sobre A-B es R_3 por compresión:

De la sección transversal:



tenemos:

$A = (0{,}08)(0{,}2)\ m^2 = 16 \times 10^{-3}\ m^2$

$I = \frac{(0{,}08)(0{,}2)^3}{12} m^4 = \frac{16}{3} \times 10^{-5}\ m^2$

$c = \frac{0{,}2}{1} = 0{,}1$ m

Los esfuerzos normales en A-B son:

$$\sigma_t = \left[-\frac{R_3}{A}+\frac{Mc}{I}\right] \text{(por tensión)}$$

$$\sigma_t = \left(-\frac{72}{16\times10^{-3}}+\frac{(5{,}12)(0{,}1)}{\frac{16}{3}.10^{-5}}\right)\text{kN/m}^2$$

$$\sigma_t = (-4500 + 9600)\ \text{kN/m}^2$$

$$\sigma_t = 5{,}1\ \text{MPa}$$

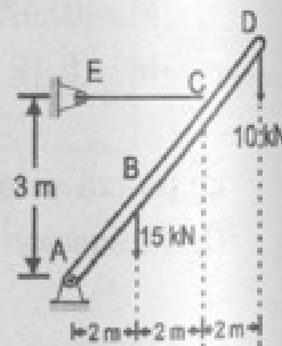
Como el punto B es afectado por tensión, así: $\boxed{\sigma_t = \sigma_B = 5{,}1\ \text{MPa}}$

Además: $\sigma_c = \left[-\frac{R_3}{A}-\frac{Mc}{I}\right]$ (por compresión)

$$\sigma_c = (-4500 - 9600)\ \text{kN/m}^2$$

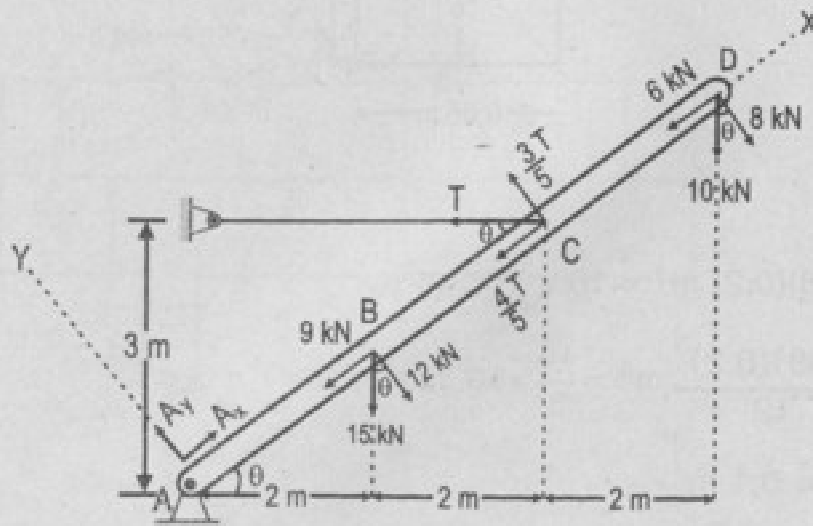
$$\boxed{\sigma_t = -14{,}1\ \text{MPa} = \sigma_A}$$

914. Una viga de madera, AD, de 100 mm de espesor y 300 mm de peralte, cargada como se indica en la figura, está articulada en su extremo inferior y sujeta por un cable horizontal CE. Determinar el máximo esfuerzo de compresión en la viga.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema: ($\tan\theta = 3/4$)



$$\Sigma M_A = 0 = 2(15) + 6(10) - T(3) \Rightarrow T = 30\ \text{kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 = -15\text{sen}\theta - T\cos\theta - 10\text{sen}\theta + A_x$$

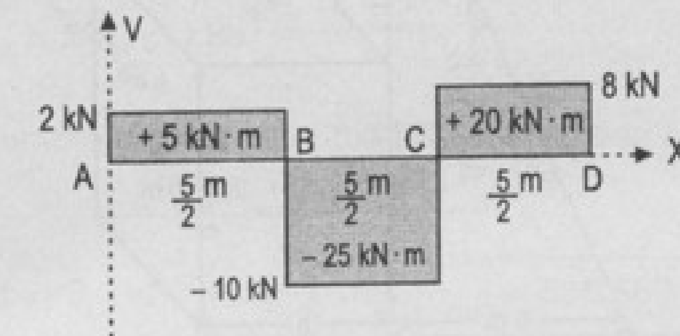
$$\Rightarrow A_x = 15\left(\frac{3}{5}\right)+(30)\left(\frac{4}{5}\right)+10\left(\frac{3}{5}\right)\Rightarrow A_x = 39\ \text{kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 = A_y - 15\cos\theta + T\text{sen}\theta - \cos\theta$$

$$\Rightarrow A_y = 15\left(\frac{4}{5}\right)-30\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\Rightarrow A_y = 2\ \text{kN};$$

(también $AB = BC = CD = \frac{5}{2}$ m)

Graficando las fuerzas cortantes:



Donde el momento flector máximo se da en C, para x = 5 m:

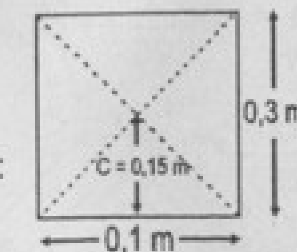
$M_{máx.} = 20$ kN·m

En el punto C, la fuerza axial es: $P_{axial} = \frac{4}{5}T + 6\ \text{kN} = \frac{4}{5}(30) + 6 = 30\ \text{kN}$

Ojo: P_{axial} es de compresión

El esfuerzo normal es: $\sigma_N = \frac{P_{axial}}{A}+\frac{M_{máx.}c}{I}$

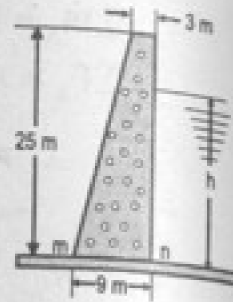
De la sección transversal:



$$\sigma_N = \frac{30\ \text{kN}}{(0{,}1)(0{,}3)\ \text{m}^2}+\frac{(20\ \text{kN·m})(0{,}15\ \text{m})}{\left(\frac{0{,}1}{12}\right)\text{m}\cdot(0{,}3)^3\text{m}^3}$$

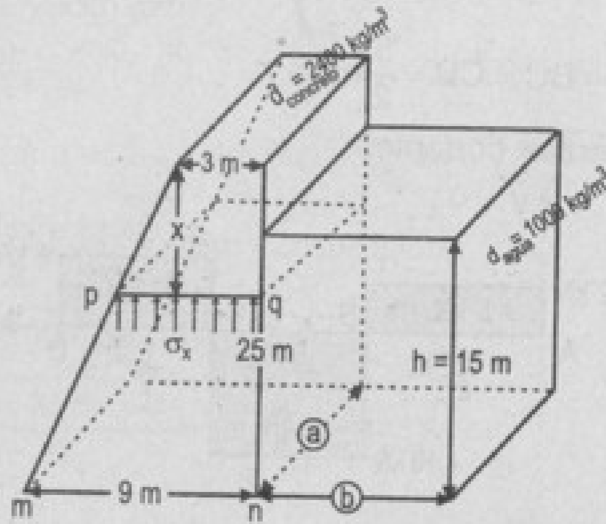
$\sigma_N = 14333{,}3$ kN/m² o $\boxed{\sigma_N = 14{,}3\ \text{MPa}}$

915. Una presa de concreto tiene el perfil indicado en la figura. Si la densidad del concreto es 2400 kg/m³ y la del agua, 1000 kg/m³, determinar el máximo esfuerzo de compresión en la sección m-n cuando la altura del agua embalsada, h, es de 15 m.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema:



El peso del concreto equilibra con la fuerza de reacción del bloque:
(volumen) × (densidad) = (g) = σ_x · (área) ...(1)

Por relaciones geométricas: $pq = \dfrac{6x}{25} + 3$

El volumen del concreto a una altura "x" es:

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{6x}{25}\right)x \cdot a + (3)(x)\,a = (3)\left(\frac{x}{25}+1\right)a$$

Además: $(\text{área}) = pq \cdot a = 3\left(\dfrac{2x}{25}+1\right)\cdot a$

$$\text{En (1): } (3x)\left(\frac{x}{25}+1\right)a \cdot \left(2400\ \frac{kg}{m^3}\right)\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right) = \sigma_x\left(3\left(\frac{2x}{25}+1\right)\right)a$$

Simplificando: $\sigma_x = \left(\dfrac{x+25}{2x+25}\right) \times (2400)(9{,}81)\ \dfrac{N}{m^2}$ donde $x \in \langle 0;\ 25\rangle$

Así el esfuerzo generado por el peso del concreto en la base m-n se da para x = 25 m.

$$\sigma_1 = \frac{(25+25)(25)}{(2(25)+25)}(2400)(9{,}81)\ \frac{N}{m^2} \Rightarrow \sigma_1 = 392{,}4\ kPa \qquad ...(2)$$

El peso del agua genera un esfuerzo en fondo igual a:

$$(\sigma_{agua})(\text{área}) = (V_{agua})(d_{agua})$$

$$(\sigma_{agua})(a \times b) = (a \times b \times h)\left(1000\ \frac{kg}{m^3}\right)\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)$$

$$\sigma_{agua} = (15)(1000)(9{,}81)\ N/m^2$$

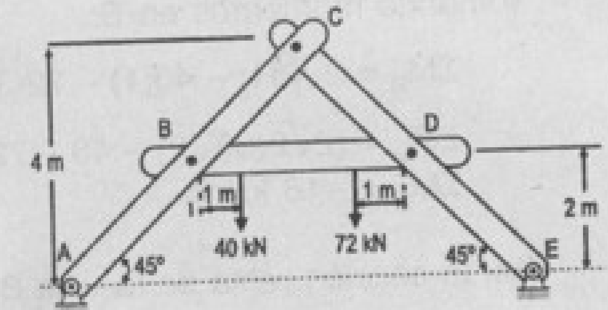
$$\sigma_{agua} = 147{,}15\ kPa \qquad ...(3)$$

El esfuerzo conjunto que soporta el fondo de la represa es la suma de ambos esfuerzos:

$$\sigma_{m\text{-}n} = \sigma_1 + \sigma_{agua}$$

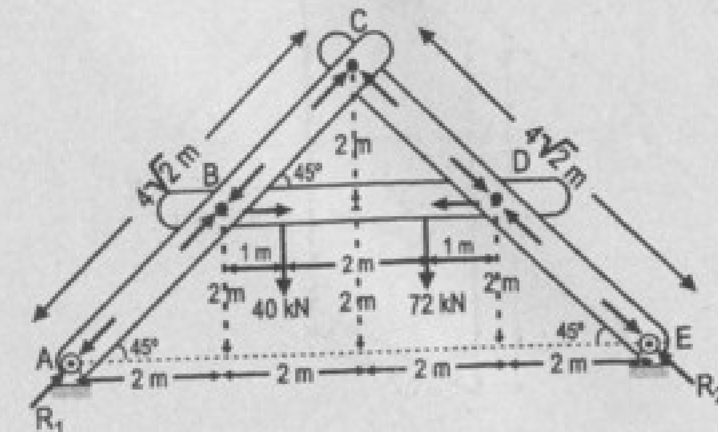
$$\sigma_{m\text{-}n} = 392{,}4\ kPa + 147{,}15\ kPa \Rightarrow \boxed{\sigma_{m\text{-}n} = 539{,}55\ kPa}$$

916. Dado el marco articulado de la figura, calcular el esfuerzo normal máximo en el miembro BD si su sección es de 100 mm de ancho por 400 mm de altura. Despreciar los pesos de todos los miembros.



Resolución:

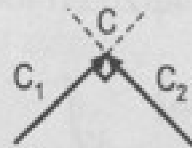
Del diagrama de cuerpo libre:



Como: $\Sigma M_E = 0 = 4\sqrt{2}\,R_1 - 40(5) - 72(3) \Rightarrow R_1 = 52\sqrt{2}$kN

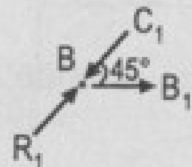
Del mismo modo: $\Sigma M_A = 0 = 4\sqrt{2}R_2 - 40(3) - 72(5) \Rightarrow R_2 = 60\sqrt{2}$kN

En el nudo C:



Para el equilibrio solo si: $c_1 = c_2 = 0$

En el nudo B:



donde $B_1 = R_1\cos 45° = 52$ kN ...(1)

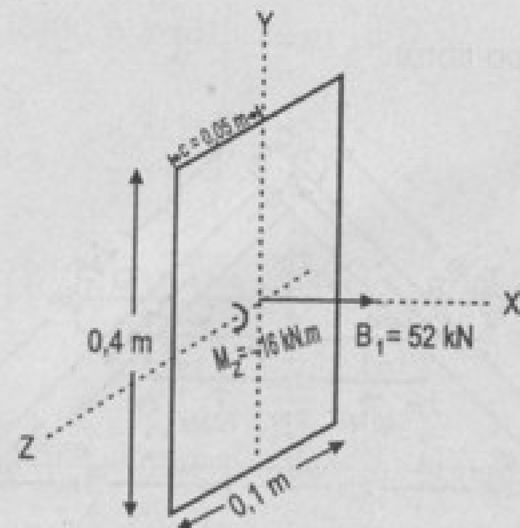
Tomando momentos en B:

$\Sigma M_B = 2\sqrt{2}R_2 - 40(1) - 72(3)$

$\Sigma M_B = (2\sqrt{2}(60\sqrt{2}) - 40 - 72(3))$ kN·m

$\Sigma M_B = -16$ kN·m ...(2)

Así la sección recta de la viga BD soporta:



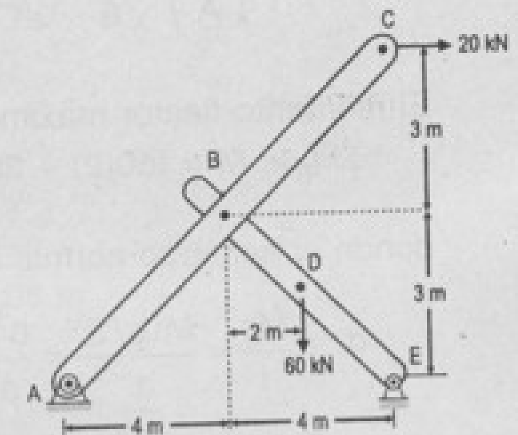
El momento torsionante que soporta la barra AB es $M_z = -16$ kN·m a lo largo del eje Z; es la que produce el esfuerzo flector:

Así, el esfuerzo normal es:

$$\sigma_x = \frac{B_1}{A} + \frac{|M_z|.c}{I_y} \Rightarrow \sigma = \frac{52 \text{ kN}}{(0,1)(0,4)\text{m}^2} + \frac{(16)(0,05)\text{ kN . m}^2}{\frac{(0,4)(0,1)^3}{12}\text{m}^4}$$

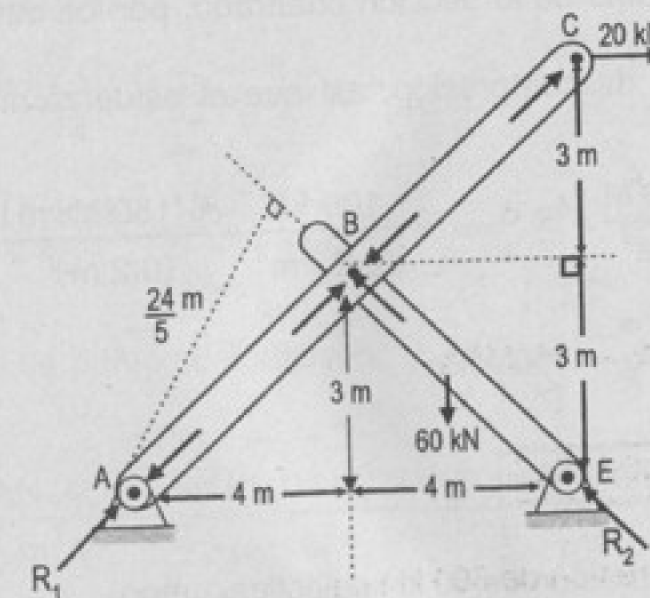
$$\sigma = 1,3 \text{ MPa} + 24 \text{ MPa} \Rightarrow \boxed{\sigma = 25,3 \text{ MPa}}$$

917. La estructura mostrada en la figura, está articulada a apoyos fijos en A y en E. Calcular el máximo esfuerzo de compresión desarrollado en la barra BDE, si su sección es cuadrada, de 200 mm de lado. Despreciar los pesos de todos los miembros.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema:



Por las leyes de la estática:

$$\Sigma M_A = 0 = \left(\frac{24}{5}\right)R_2 - (6)(60) - 6(20)$$

$$\Rightarrow R_2 = 100 \text{ kN} \qquad ...(1)$$

Siendo R_2 la fuerza o carga axial sobre la barra BE, es la causante del esfuerzo normal axial:

$$\sigma_{axial} = \left(\frac{P}{A}\right) = \frac{R_2}{A} = \frac{R_2}{a^2} \qquad ...(\alpha)$$

El momento flector máximo será la que experimente en el punto B:

$$\Sigma M_B = M = (60(2) + 20(3)) \text{ kN.m} \Rightarrow M = 180 \text{ kN·m}$$

donde el esfuerzo normal es:

$$\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{M(a/2)}{\frac{a^4}{12}} = \frac{6M}{a^3} \qquad ...(\beta)$$

donde "a" es el doble de la sección cuadrado, por los datos: a = 0,2 m.

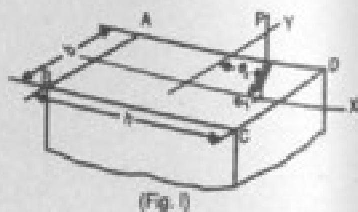
La carga axial es de compresión, así que el esfuerzo máximo a compresión es:

$$\sigma_{máx} = \frac{R_2}{a^2} + \frac{6M}{a^3} \Rightarrow \sigma_{máx} = \frac{100 \text{ kN}}{(0,2)^2 \text{ m}^2} + \frac{6(180 \text{ kN·m})}{(0,2 \text{ m})^3}$$

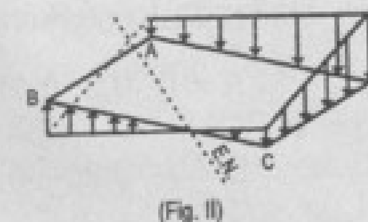
$$\sigma_{máx} = 2,5 \text{ MPa} + 135 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{máx} = 137,5 \text{ MPa}}$$

918. Una fuerza de compresión de 80 kN se aplica, como representa la figura I, en un punto situado 40 mm a la derecha y 60 mm por encima del centro de gravedad de una sección rectangular de b = 200 mm y h = 400 mm. Calcular los esfuerzos en las cuatro

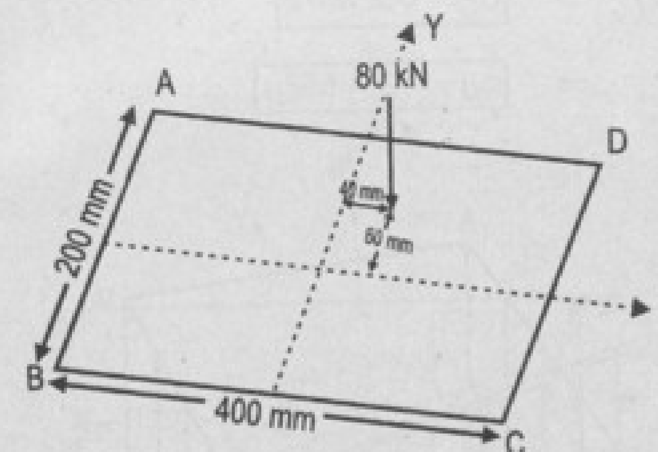

(Fig. I)

esquinas y la posición de la línea neutra. Hágase, de acuerdo con las soluciones obtenidas, un esquema como el de la figura II.


(Fig. II)

Resolución:

Graficando:



$b = 200 \text{ mm} = 0,2 \text{ m}$; $h = 400 \text{ mm} = 0,4 \text{ m}$

$e_x = 40 \text{ mm} = 0,04 \text{ m}$; $e_y = 60 \text{ mm} = 0,06 \text{ m}$

$P = 80 \text{ kN}$

Además tenemos:

$$A = b.h = (0,2)(0,4) \text{ m}^2 = 8\times10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{b^3h}{12} = \frac{(0,2)^3(0,4)}{12} \text{ m}^4 = \frac{8}{3}\times10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0,2)(0,4)^3}{12} \text{ m}^4 = \frac{32}{3}\times10^{-4} \text{ m}^4$$

El esfuerzo σ en un punto cualquiera (x; y) es: $\sigma = -\frac{P}{A} - \left(\frac{Pe_x}{I_y}\right)x - \left(\frac{Pe_y}{I_x}\right)y$

$$\sigma = \frac{-80 \text{ kN}}{8\times10^{-2} \text{ m}^2} - \frac{(80 \text{ kN})(0,04 \text{ m})x}{\frac{32}{3}\times10^{-4} \text{ m}^4} - \frac{(80 \text{ kN})(0,06 \text{ m})y}{\frac{8}{3}\times10^{-4}\text{m}^4}$$

$$\sigma = -(1000 + 3000x + 18\,000y)\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \Rightarrow \sigma = -(1 + 3x + 18y) \text{ MPa}$$

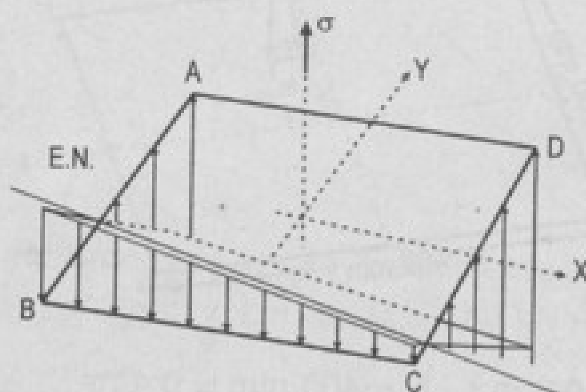
Hallando los esfuerzos en las esquinas:

$A = (-0,2;\ 0,1) \Rightarrow \boxed{\sigma_A = -2,2\ \text{MPa}}$

$B = (-0,2;\ -0,1) \Rightarrow \boxed{\sigma_B = 1,4\ \text{MPa}}$

$C = (0,2;\ -0,1) \Rightarrow \boxed{\sigma_C = 0,2\ \text{MPa}}$

$D = (0,2;\ 0,1) \Rightarrow \boxed{\sigma_D = -3,4\ \text{MPa}}$



919. Con los datos del problema 918, ¿qué carga adicional habría que aplicar en el centro de gravedad de la sección para que no aparezcan esfuerzos de tensión en punto alguno de la misma?

Resolución:

Al colocar una carga P_1 en el centro de gravedad de la sección, tenemos:

$$\frac{P_1+P}{A} = \frac{(P\cdot e_x)}{I_y}x + \frac{(P\cdot e_y)}{I_x}y\ ;$$

es decir, para que no haya tensión, el esfuerzo axial (producido por P_1 y P) es igual al esfuerzo por flexión (producido solo por P).

Colocando los datos y operando:

$$\frac{P_1+80}{8\times10^{-2}} = \frac{(80)(0{,}04)}{\frac{32}{3}\times10^{-4}}x + \frac{(80)(0{,}06)}{\frac{8}{3}\times10^{-4}}y \Rightarrow P_1 = 8(30x+180y)-80$$

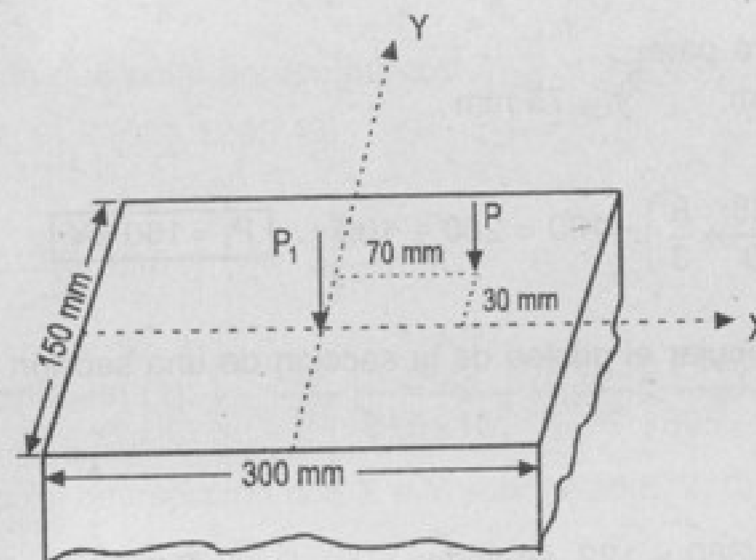
Hallando P_1 máximo; será para: $x = 0{,}2$ m $\wedge$ $y = 0{,}1$ m;

así: $P_1 = 8[30(0{,}2)+180(0{,}1)] - 80\ \therefore\ \boxed{P_1 = 112\ \text{kN}}$

920. Una fuerza de compresión de 100 kN se aplica, como indica la figura I del problema 918, en un punto 70 mm a la derecha y 30 mm por encima del centro de gravedad de una sección rectangular de b = 150 mm y h = 300 mm. ¿Qué carga adicional, actuando normalmente a la sección en su centro de gravedad, elimina los esfuerzos de tensión?

Resolución:

Graficando:



$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{(150)(300)^3}{12}\ \text{mm}^4 = 3375\times10^5\ \text{mm}^4$$

$$I_x = \frac{b^3h}{12} = \frac{(150)^3(300)}{12}\ \text{mm}^4 = 84\ 375\times10^3\ \text{mm}^4$$

El esfuerzo axial es: $\sigma_A = \dfrac{P_1+P}{A} = \dfrac{P_1+100}{45\times10^3}$ ...(1)

El esfuerzo por flexión es: $\sigma_f = \dfrac{(Pe_x)x}{I_y} + \dfrac{(Pe_y)y}{I_x}$

$$\sigma_f = \frac{(100)(70)}{3375\times10^5}x + \frac{(100)(30)}{84\ 375\times10^3}y \quad ...(2)$$

Para que no haya tensión, el esfuerzo axial es igual al esfuerzo de tensión:
(1) = (2)

$$\frac{P_1+100}{45\times10^3}=\frac{(100)(70)}{3375\times10^5}x+\frac{(100)(30)}{84\ 375\times10^3}y$$

Simplificando: $P_1 = 45\left(\frac{56}{27\times10^2}x+\frac{8}{225}y\right)-100$

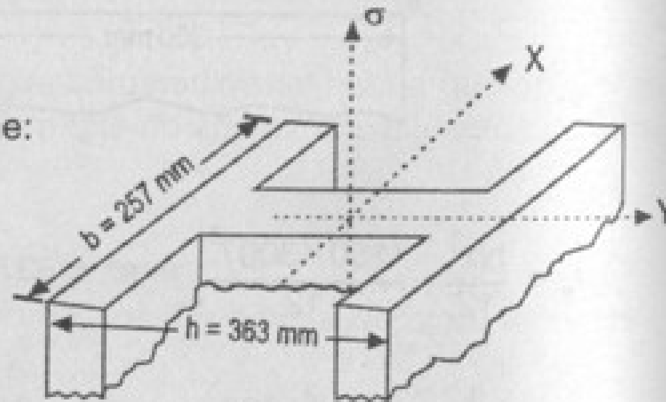
P_1 máximo será para:
x = 150 mm ; y = 75 mm

Así: $P_1 = 45\left(\frac{28}{9}+\frac{8}{3}\right)-100 = 260-100 \therefore \boxed{P_1 = 160\text{ kN}}$

921. Determinar y dibujar el núcleo de la sección de una sección W360 × 122.

Resolución:

Graficando:
Para el perfil W360 × 122, se tiene:
A = 15 500 mm²
$I_x = 365\times10^6$ mm⁴
$I_y = 61{,}5\times10^6$ mm⁴
h = 363 mm
b = 257 mm



El esfuerzo combinado producido por una carga P en el punto (e_x; e_y) en cualquier punto genérico (x; y): $\sigma=-\frac{P}{A}-\frac{(P\cdot e_x)}{I_y}x-\frac{(P\cdot e_y)}{I_x}y$

el esfuerzo nulo se da en: $0=-\frac{P}{A}-\frac{(P\cdot e_x)}{I_y}x-\frac{(P\cdot e_y)}{I_x}y$

$$\left(\frac{x}{I_y}\right)e_x+\left(\frac{y}{I_x}\right)e_y=\frac{-1}{A} \qquad ...(1)$$

que es la ecuación de una recta, cuyos valores para los puntos extremos de la sección, son:

1. Para $x=\frac{257}{2}$ mm ∧ $y=\frac{363}{2}$ mm

Reemplazando en (1): $\left(\frac{257}{2}\right)\frac{e_x}{61{,}5\times10^6}+\left(\frac{363}{2}\right)\frac{e_y}{365\times10^6}=\frac{-1}{15\ 500}$

Hallando los puntos de intersección con X e Y:
$e_x = -30{,}877$ mm (si $e_y = 0$) ; $e_y = -129{,}743$ mm (si $e_x = 0$)

Es una recta que pasa por los puntos:
(– 30,877; 0) ∧ (0; – 129,743)

2. Para $x=-\frac{257}{2}$ mm ∧ $y=\frac{363}{2}$ mm

Reemplazando en (1): $\left(-\frac{257}{2}\right)\frac{e_x}{61{,}5\times10^6}+\left(\frac{363}{2}\right)\frac{e_y}{365\times10^6}=\frac{-1}{15\ 500}$

Los puntos de intersección con X e Y son: (+ 30,877; 0) ∧ (0; –129,743)

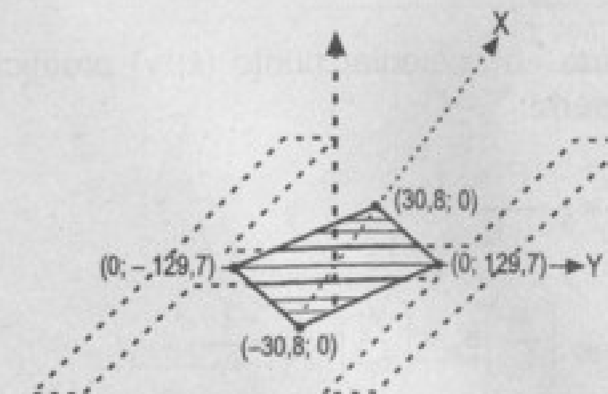
3. Del mismo modo para $x=-\frac{257}{2}$ mm ∧ $y=-\frac{363}{2}$

Se tiene los puntos de intersección: (30,877; 0) ∧ (0; 129,743)

4. Por último, para $x=\frac{257}{2}$ mm ∧ $y=\frac{-363}{2}$

los puntos de intersección son: (– 30,877; 0) ∧ (0; 129,743)

La gráfica de las cuatro rectas nos da el núcleo de la sección, que es un diamante con los puntos dados:



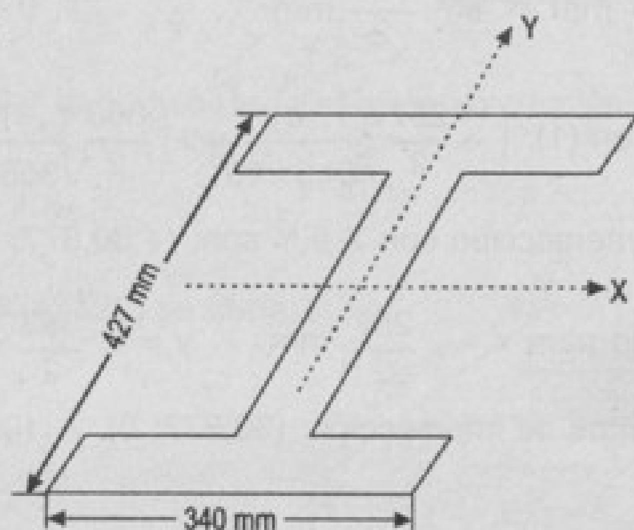
Es decir, una figura en forma de diamante con coordenadas:
(30,877; 0) ; (0; 129,743)
(– 30,877; 0) ; (0; – 129,743)

922. Resolver el problema anterior para una sección W310 × 500.

Resolución:

Graficando:
El perfil W310 × 500 tiene las siguientes dimensiones:

$A = 63\,700\ mm^2$
$I_x = 1690 \times 10^6\ mm^4$
$I_y = 494 \times 10^6\ mm^4$
$h = 427\ mm$
$b = 340\ mm$



Los puntos extremos de la sección son:

$$\left(\frac{340}{2};\ \frac{427}{2}\right),\left(-\frac{340}{2};\ \frac{427}{2}\right),\left(-\frac{340}{2};\ -\frac{427}{2}\right),\left(\frac{340}{2};\ -\frac{427}{2}\right)$$

El esfuerzo combinado en cualquier punto (x; y) producido por una carga P aplicada en (e_x; e_y) será:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{(P \cdot e_x)}{I_y}x - \frac{(P \cdot e_y)}{I_x}y$$

El esfuerzo es nulo si: $\left(\frac{x}{I_y}\right)e_x + \left(\frac{y}{I_x}\right)e_y = \frac{-1}{A}$, ...(1)

que es una recta; hallando los puntos de intersección con XY en los puntos extremos de la sección: (en (1)).

1. $$\frac{\left(\frac{340}{2}\right)e_x}{494 \times 10^6} + \frac{\left(\frac{427}{2}\right)e_y}{1690 \times 10^6} = \frac{-1}{63\,700}$$

Los puntos de intersección son: (– 45,6 mm; 0) ∧ (0; – 124,3 mm)

2. $$\frac{\left(\frac{-340}{2}\right)e_x}{494 \times 10^6} + \frac{\left(\frac{427}{2}\right)e_y}{1690 \times 10^6} = \frac{-1}{63\,700}$$

Los puntos de intersección son: (45,6 mm; 0) ∧ (0; – 124,3 mm)

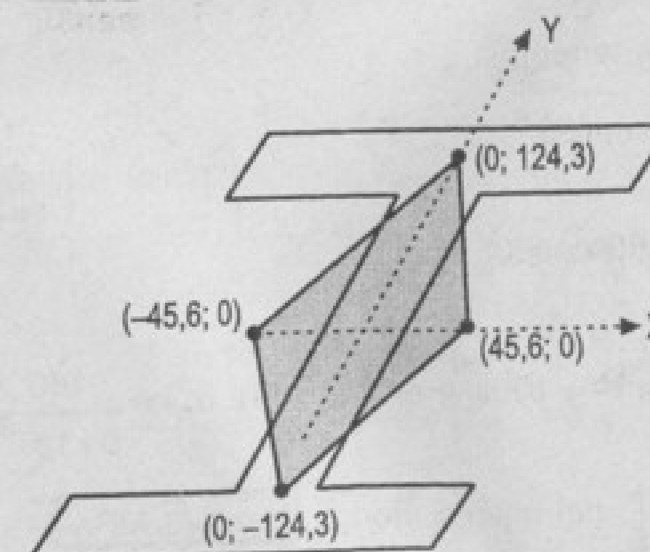
3. $$\frac{\left(\frac{-340}{2}\right)e_x}{494 \times 10^6} + \frac{\left(\frac{-427}{2}\right)e_y}{1690 \times 10^6} = \frac{-1}{63\,700}$$

Los puntos de intersección son: (45,6 mm; 0) ∧ (0; 124,3 mm)

4. $$\frac{\left(\frac{340}{2}\right)e_x}{494 \times 10^6} + \frac{\left(\frac{-427}{2}\right)e_y}{1690 \times 10^6} = \frac{-1}{63\,700}$$

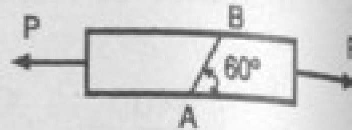
Los puntos de intersección son: (– 45,6 mm; 0) ∧ (0; 124,3 mm)

Los puntos hallados son los vértices del núcleo de la sección:



923; 924: problemas ilustrativos.

925. Dos piezas de madera de 50 mm × 100 mm de sección están ensambladas a lo largo de la junta AB como se indica en la figura. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre la superficie de ensamble, si P = 100 kN.

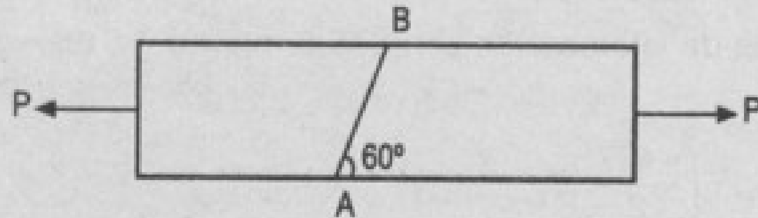


Resolución:

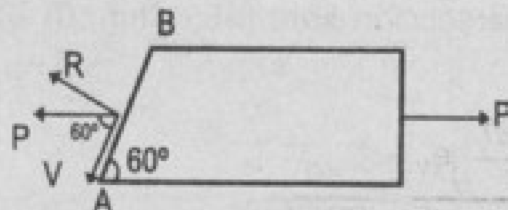
El área de la sección recta es:

$A = (0{,}05)(0{,}1)\ m^2 = 5 \times 10^{-3} m^2$

Del diagrama:



En el corte AB:



Donde:

R = Psen60°; V = Pcos60°

además, AB: área de la sección oblicua, luego: $\dfrac{A}{\text{sen}60°} = AB$

Para los esfuerzos tenemos:

$$\sigma_N = \frac{R}{AB} = \frac{P}{A}\ \text{sen}^2 60° \qquad \ldots(\alpha)$$

$$y\ \ \tau = \frac{V}{AB} = \frac{P}{A}\ \text{sen}60°\cos 60° \qquad \ldots(\beta)$$

Como de los datos: P = 100kN, en (α) y (β): $\sigma_N = \dfrac{100}{5\times10^{-3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \dfrac{kN}{m^2}$

$\boxed{\sigma_N = 15\text{ MPa}}$; del mismo modo: $\boxed{\tau = 5\sqrt{3}\text{ MPa}}$

926. Una barra de pequeña longitud de sección circular de 50 mm de diámetro está hecha de un material cuyos esfuerzos admisibles son de 80 MN/m^2 a compresión y 30 MN/m^2 a cortante. Determinar la fuerza axial de compresión máxima que puede aplicarse.

Resolución:

Donde:

$$\sigma_{máx.} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_{máx.} = -\frac{-80+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{-80}{2} - 0\right)^2 + (30)^2}$$

$$\frac{P_{máx.}}{A} = (-40 - 50)\ MN/m^2$$

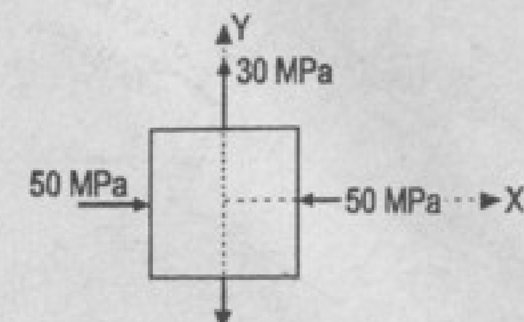
$$P_{máx.} = -(90)(1{,}96 \times 10^{-3})\ MN = -176{,}7\ kN$$

$\boxed{P_{máx.} = 176{,}7\text{ kN}}$ a compresión

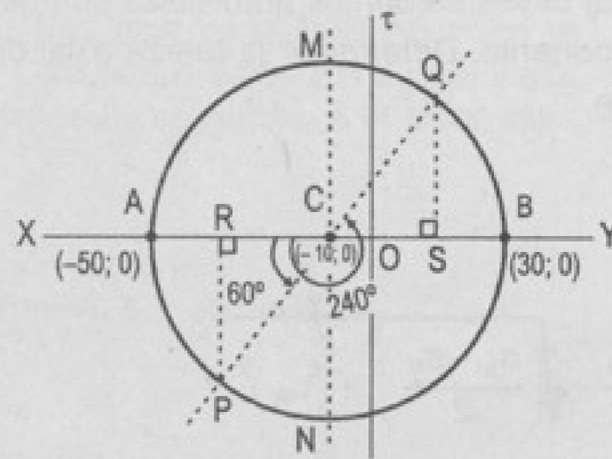
927. En un elemento de un sólido elástico, los esfuerzos principales son $\sigma_x = -50$ MPa y $\sigma_y = 30$ MPa. Calcular las componentes del esfuerzo en planos inclinados + 30° y + 120° respecto del eje X. Ilustre gráficamente sus respuestas.

Resolución:

El diagrama diferencial inicial es:



Ubicando los esfuerzos en el círculo de Mohr:



Por las relaciones geométricas:

$$C = \frac{A+B}{2} = (-10;\ 0);\ \ AC = CB = PC = CQ = 40$$

Para la inclinación de 30°, se toma 60° en el círculo de Mohr, donde:

$$RP = PC\ \text{sen}60° = 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20\sqrt{3}\ ;\ RC = PC\ \cos 60° = 40\left(\frac{1}{2}\right) = 20$$

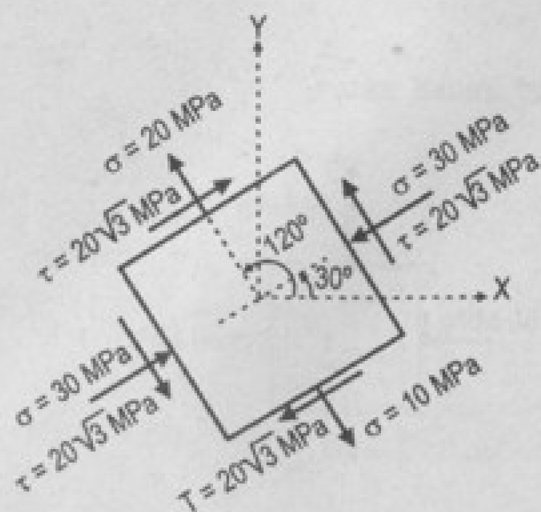
Así: $\sigma = (-10 - 20)\ \text{MPa} = -30\ \text{MPa};\ \ \tau = -20\sqrt{3}\ \text{MPa}$

Para la inclinación de 120°, se toma 240° en el círculo de Mohr:

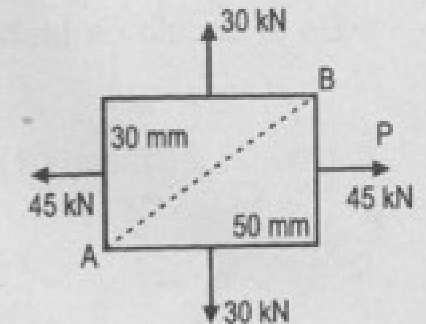
$$QS = CQ\ \text{sen}60° = 40(\sqrt{3}/2) = 20\sqrt{3}$$
$$CS = CQ\ \cos 60° = 40(1/2) = 20$$

Así: $\sigma = (-10 + 20)\ \text{MPa} = 10\ \text{MPa}\ \ ;\ \ \tau = 20\sqrt{3}\ \text{MPa}$

Graficando:

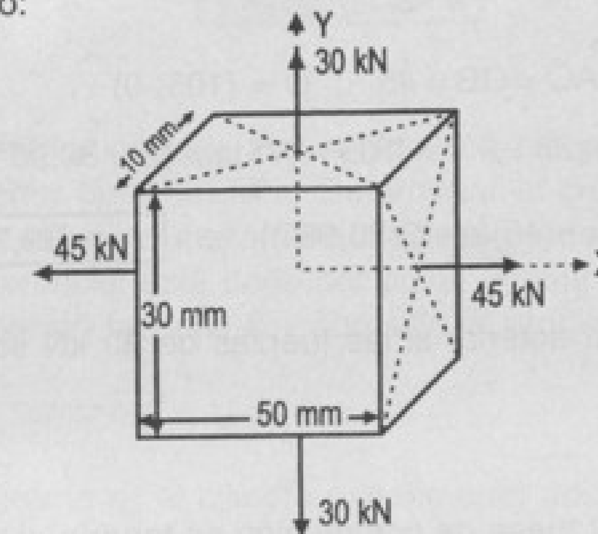


928. Un pequeño bloque en forma de paralelepípedo, de dimensiones 50 mm × 30 mm y 10 mm de espesor está sometido a unas fuerzas de tensión uniformemente distribuidas sobre sus caras, cuyas resultantes se indican en la figura. Calcular las componentes del esfuerzo en la diagonal AB.



Resolución:

Dibujando el cubo:

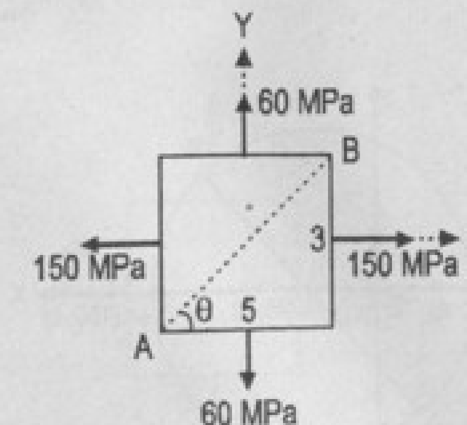


Las fuerzas producidas en cada cara son:

$$\sigma_x = \frac{45\ \text{kN}}{(30\ \text{mm})(10\ \text{mm})} = \frac{45\ \text{kN}}{(0{,}03)(0{,}01)\ \text{m}^2} = 150\ \text{MPa}$$

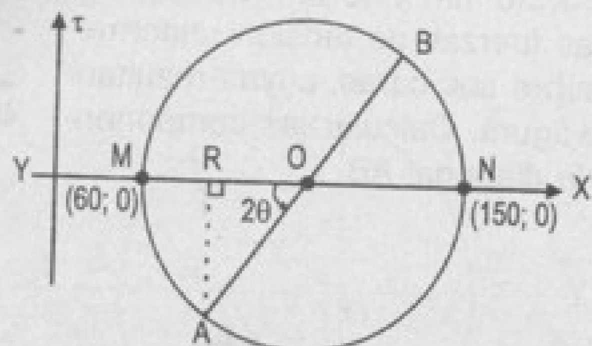
$$\sigma_y = \frac{30\ \text{kN}}{(50\ \text{mm})(10\ \text{mm})} = \frac{30\ \text{kN}}{(0{,}05)(0{,}01)\ \text{m}^2} = 60\ \text{MPa}$$

Tenemos:



como: $\tan\theta = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \theta = 30{,}96°$

En el círculo de Mohr:



donde: MO = ON = AO = OB = 45 ; O = (105; 0)

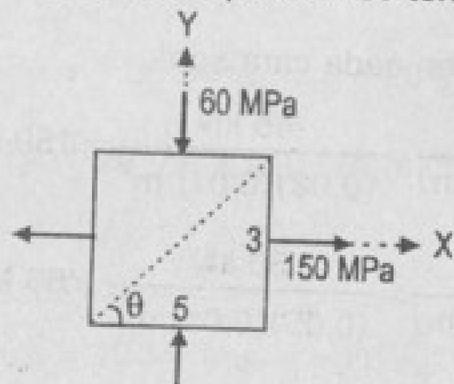
Así: $\sigma = 105 - AO\cos 2\theta \Rightarrow \sigma = 105 - (45)\cos(2 \times 30{,}96°) \Rightarrow$ $\boxed{\sigma = 83{,}9\ \text{MPa}}$

y $\tau = -AO\,\text{sen}2\theta = -(45)(\text{sen}2(30{,}96°)) \Rightarrow$ $\boxed{\tau = -39{,}7\ \text{MPa}}$

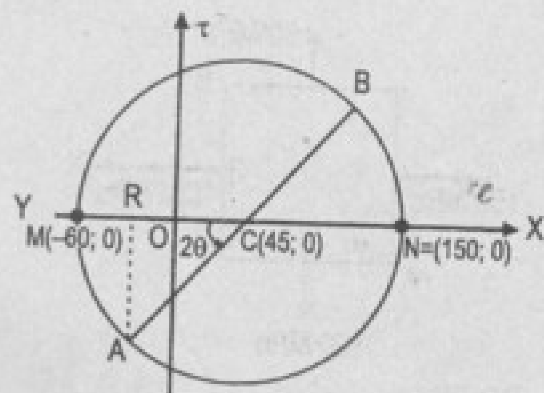
929. Resolver el problema anterior si las fuerzas de 30 kN son de compresión en lugar de tensión.

Resolución:

Si la fuerza de 30 kN fuese de compresión se tendría el siguiente diferencial:



En el círculo de Mohr:



Donde: MC = CN = AC = CB = 105

Luego: $\sigma = 45 - AC\cos(2\theta) \Rightarrow \sigma = 45 - (105)\cos(2 \times 30{,}96°)$

$\boxed{\sigma = -4{,}42\ \text{MPa}}$

Además: $\tau = -AC\,\text{sen}(2\theta) \Rightarrow \tau = -(105)\text{sen}(2 \times 30{,}96°)$

$\boxed{\tau = -92{,}64\ \text{MPa}}$

930. Un depósito cilíndrico cerrado, construido con placa de 10 mm, se somete a una presión interior de 1400 kPa. Determinar el diámetro máximo que se le puede dar si el esfuerzo cortante admisible es de 30 MPa. ***Indicación***: El esfuerzo circunferencial está dado por pD/2t, mientras que el longitudinal, por pD/4t. Vea la sección teórica1-6 y consulte el problema 941.

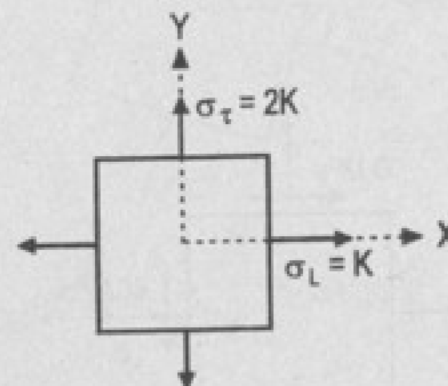
Resolución:

Por la presión interna p_i, el cilindro experimenta dos esfuerzos:

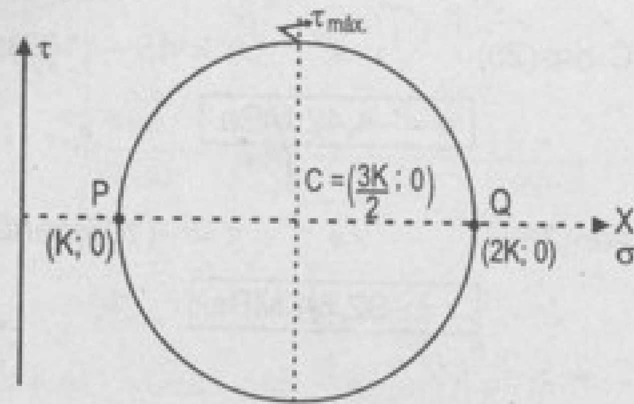
- Esfuerzo circunferencial = $\sigma_\tau = \dfrac{p_i D}{2t}$
- Esfuerzo longitudinal = $\sigma_L = \dfrac{p_i D}{4t}$

donde, espesor: $t = 0{,}01$ m ; $p_i = 1400$ kPa

Sea: $K = \dfrac{p_i D}{4t}$, luego, en el diferencial:



En el círculo de Mohr:



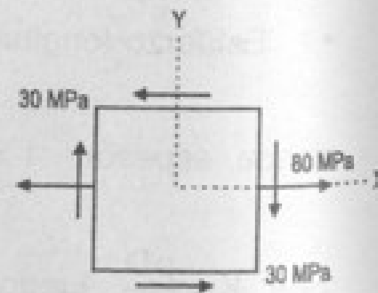
Donde: $\tau_{máx.} = CQ = \left(2K - \frac{3}{2}K\right) = \frac{K}{2}$, pero: $\tau_{máx.} = 30$ MPa

Así: $30 \text{ MPa} = \frac{K}{2} \Rightarrow K = 60$ MPa o $K = 60\ 000$ kPa

Reemplazando el valor: $\frac{pD}{4t} = 60\ 000 \text{ kPa} \Rightarrow \frac{(1400)\text{ kPa}\cdot D}{4(0{,}01)\text{ m}} = 60\ 000$ kPa

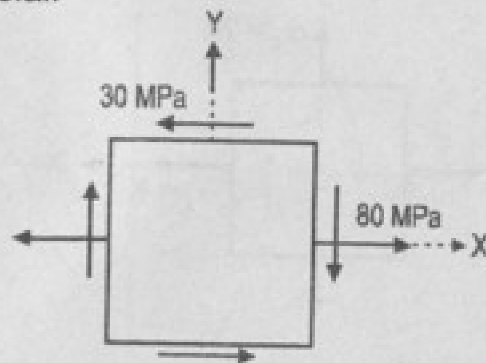
Así: $\boxed{D = 1{,}714 \text{ m}}$

931. Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura, determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Mostrar todos sus resultados gráficamente sobre elementos diferenciales.

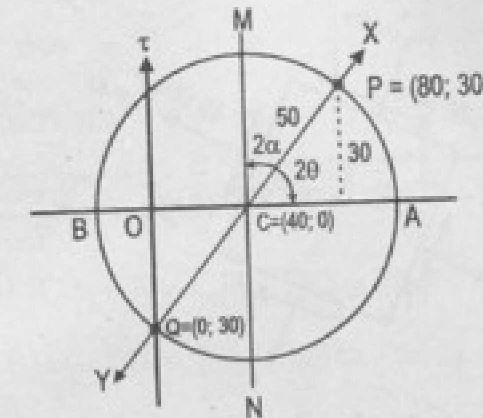


Resolución:

Del elemento diferencial:



En el círculo de Mohr:



Por Geometría: $PC = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$

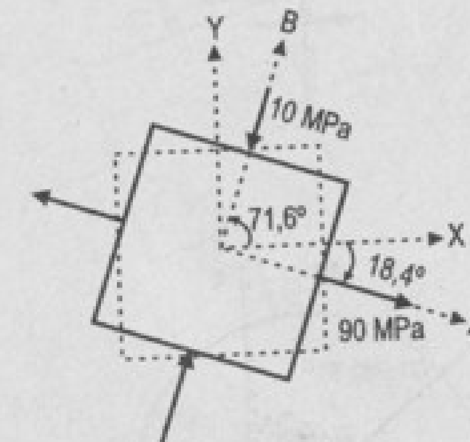
Además: $BC = CA = MC = CN = QC = PC = 50$

$$\boxed{\sigma_{máx.} = OC + CA = (40 + 50) \text{ MPa} = 90 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{mín.} = OC - BC = (40 - 50) \text{ MPa} = -10 \text{ MPa}$$

Además: $\text{sen}2\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow 2\theta = 36{,}87°$ o $\boxed{\theta = -18{,}4°}$, negativo porque es medido en sentido horario.

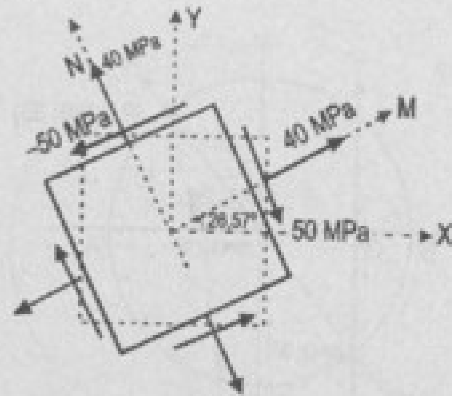
Graficando:



Además: $\tau_{máx.} = MC = 50$ MPa ; $\tau_{mín.} = -CN = -50$ MPa

En ambos casos σ = 40 MPa, con un ángulo de giro igual a:
$2\alpha = 90° - 2\theta = 90° - 36{,}87°$, así: $\alpha = 26{,}57°$.

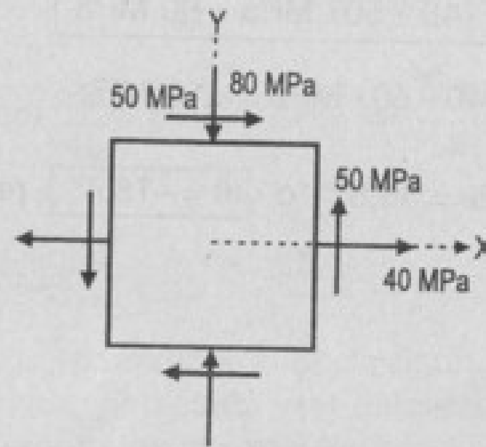
Graficando el diferencial:



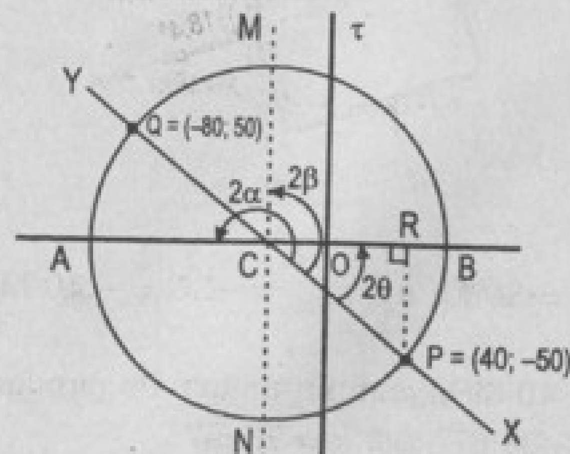
932. El estado de esfuerzo en un punto de un cuerpo se muestra en la figura. Calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, mostrando todos sus resultados gráficamente sobre elementos diferenciales.

Resolución:

Del diferencial:



En el círculo de Mohr:



Del gráfico tenemos:

$A = \sigma_{máx.}$; $B = \sigma_{mín.}$

$M = \tau_{máx.}$; $N = \tau_{mín.}$

Por relaciones geométricas:

$C = (-20; 0) = \dfrac{Q+P}{2}$ y $QC = \sqrt{(-80+20)^2+50^2} = 78{,}1$

También: $AC = CB = MC = CN = CP = QC = 78{,}1$

$\sigma_{máx.} = (-20 + CB) = (-20 + 78{,}1)$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx.} = 58{,}1 \text{ MPa}}$

$\sigma_{mín.} = (-20 - AC) = (-20 - 78{,}1)$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{mín.} = -98{,}1 \text{ MPa}}$

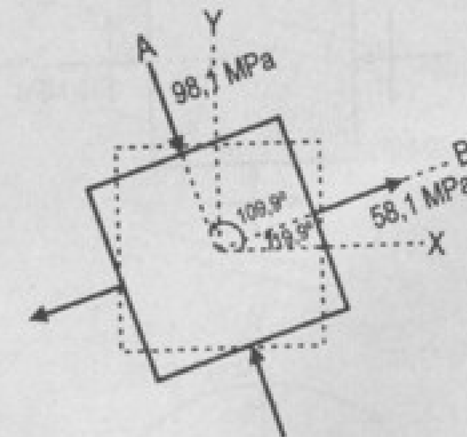
Además: $\tan(2\theta) = \dfrac{50}{20+40} = \dfrac{5}{6}$; así: $2\theta = 39{,}8°$

entonces ; $\boxed{\theta = 19{,}9°}$ ángulo del eje X al eje de $\sigma_{máx.}$

Luego: $2\alpha = 180° + 2\theta = 219{,}8°$

$\boxed{\alpha = 109{,}9°}$; ángulo del eje X al eje de $\sigma_{mín.}$

Gráfica del diferencial:



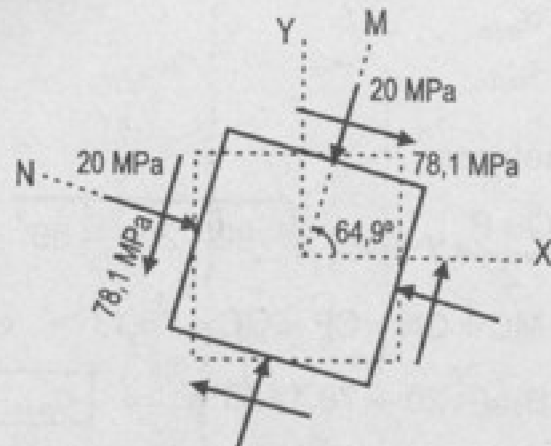
$\tau_{máx.} = MN = 78{,}1$ MPa $\wedge$ $\tau_{mín.} = -CN = -78{,}1$ MPa

Además: $2\beta = 90° + 2\theta = 129{,}8°$

así: $\beta = 64{,}9°$; ángulo del eje X al eje de $\tau_{máx.}$

En ambos casos: $\sigma = -20$ MPa

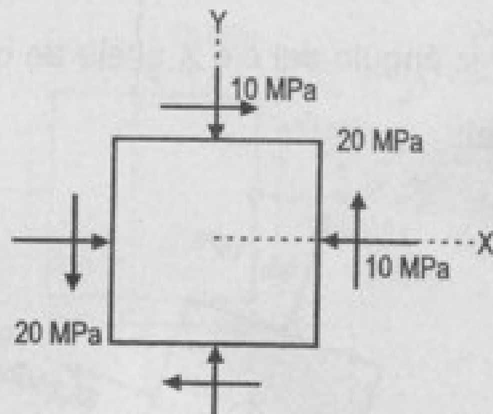
Graficando el diferencial:



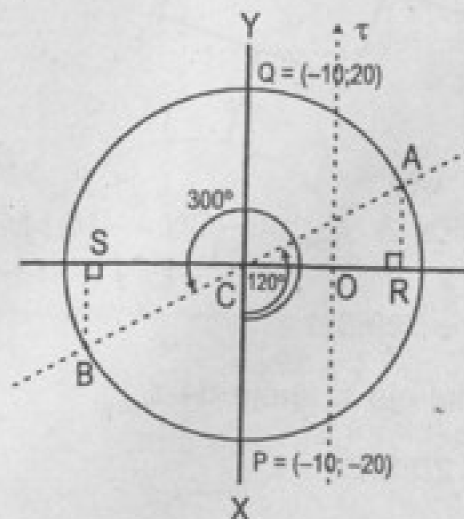
933. Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura, calcular los esfuerzos normal y cortante en los planos cuyas normales están inclinadas a +60° y +150° con respecto al eje X, mostrando sus resultados gráficamente.

Resolución:

Del diferencial:



En el círculo de Mohr:



Para el plano a 60° del eje X, en el círculo de Mohr es el eje AB que se encuentra a 120° del mismo. (Que coincide con el giro de 150°, es decir, 300° en el círculo de Mohr).

Por relaciones geométricas: $C = \dfrac{Q+P}{2} = (-10;\ 0)$

Además: $QC = CP = AC = BC = 20$

Para el plano de 60°; los esfuerzos son:

$\sigma = -10 + AC \times \cos 30° = -10 + 20 \times \cos 30° \Rightarrow \boxed{\sigma = 7{,}32 \text{ MPa}}$

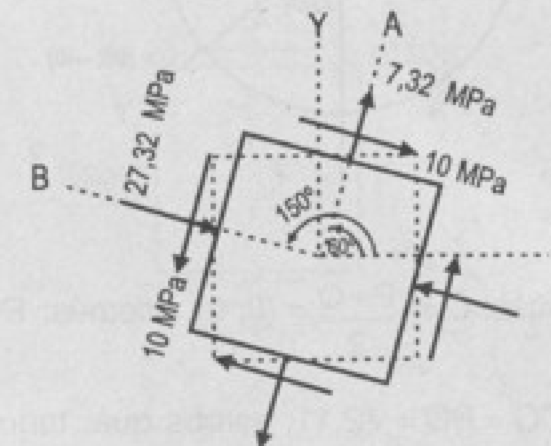
$\tau = AC \times \operatorname{sen} 30° = (20)\operatorname{sen} 30° = 10 \text{ MPa} \Rightarrow \boxed{\tau = 10 \text{ MPa}}$

Para el plano de 150°, los esfuerzos son:

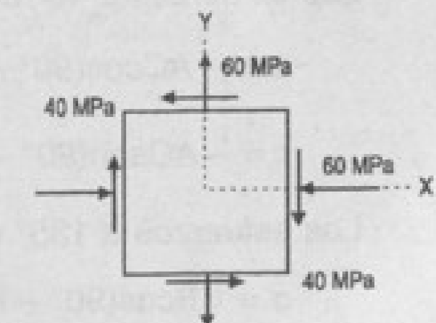
$\sigma = -10 - BC \times \cos 30° = -10 - 20 \times \cos 30° \Rightarrow \boxed{\sigma = -27{,}32 \text{ MPa}}$

$\tau = -BC \times \operatorname{sen} 30° = -(20)\operatorname{sen} 30° \Rightarrow \boxed{T = -10 \text{ MPa}}$

El gráfico del diferencial es:

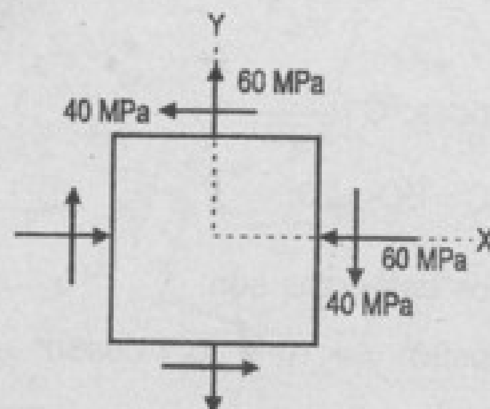


934. Si un elemento está sujeto al estado de esfuerzo mostrado en la figura, calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Calcular también las componentes del esfuerzo en planos cuyas normales están dirigidas a 45° y a 135° con respecto al eje X. Muestre gráficamente todos sus resultados

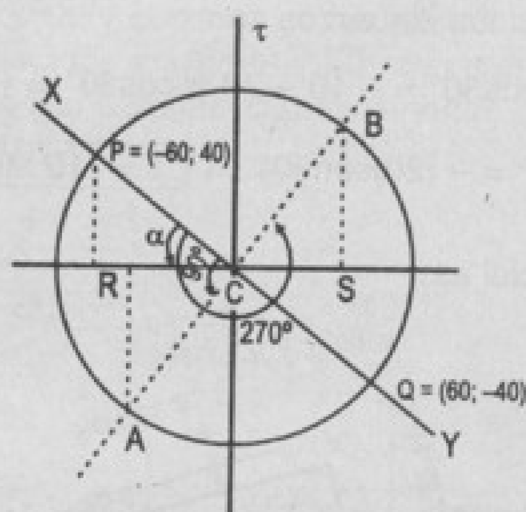


Resolución:

Del diferencial:



En el círculo de Mohr:



Por relaciones geométricas: $C = \frac{P+Q}{2} = (0;\ 0)$, además: $PC = \sqrt{60^2 + 40^2} = 72{,}11$

También: $AC = CB = CQ = PC = 72{,}11$; vemos que: $\tan\alpha = \frac{40}{60} \Rightarrow \alpha = 33{,}69°$

Los esfuerzos a 45° del eje X son:

$\sigma = -AC\cos(90° - \alpha) = -(72{,}11)\cos(56{,}31°) \Rightarrow \boxed{\sigma = -40\ \text{MPa}}$

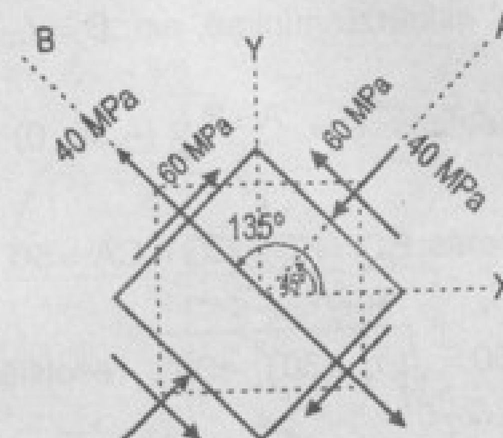
$\tau = -AC\text{sen}(90° - \alpha) = -72{,}11\text{sen}(56{,}31°) \Rightarrow \boxed{\tau = -60\ \text{MPa}}$

Los esfuerzos a 135° del eje X son:

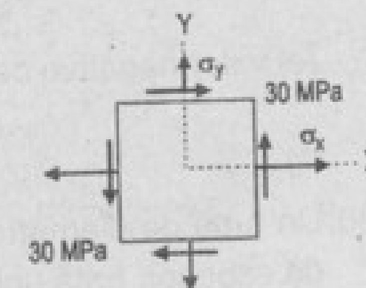
$\sigma = CB\cos(90° - \alpha) = 72{,}11 \times \cos(56{,}31°) \Rightarrow \boxed{\sigma = 40\ \text{MPa}}$

$\tau = CB\text{sen}(90° - \alpha) = 72{,}11 \times \text{sen}(56,\ 31°) \Rightarrow \boxed{\tau = 60\ \text{MPa}}$

El diagrama del diferencial es:

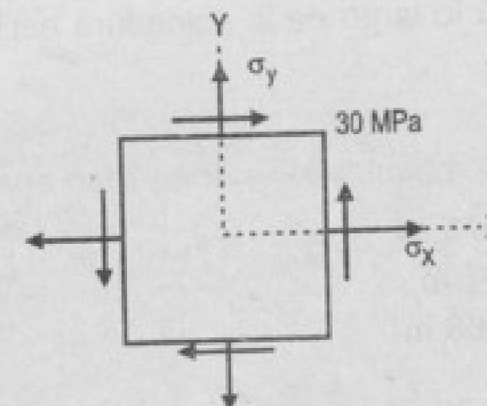


935. Dado el elemento de la figura, calcular los valores de σ_x y σ_y, sabiendo que los esfuerzos principales son 20 MPa y –80 MPa.

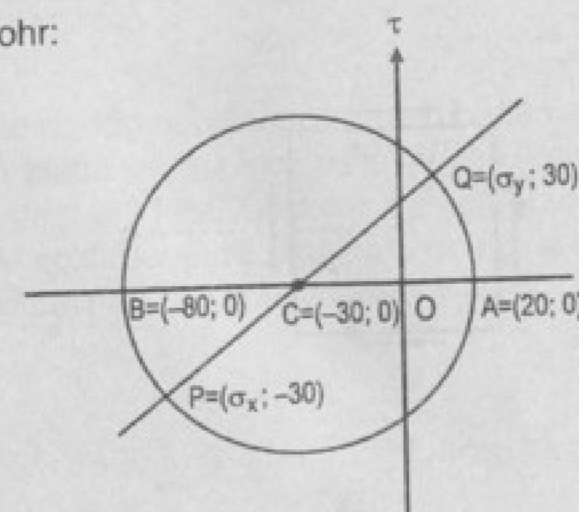


Resolución:

Del diferencial:



En el círculo de Mohr:



Siendo A punto del esfuerzo máximo, así: A = (20; 0)

Además, B punto del esfuerzo mínimo, así: B = (– 80; 0)

Por relaciones geométricas: $C = \dfrac{A+B}{2} = (-30;\ 0)$

Luego: CA = 50, además: $BC = PC = CQ = CA = 50$

Por Pitágoras: $CQ = 50 = \sqrt{(\sigma_y + 30)^2 + 30^2}$, resolviendo: $\boxed{\sigma_y = 10\ \text{MPa}}$

(el valor negativo corresponde a σ_x) $\boxed{\sigma_x = -70\ \text{MPa}}$

936. Un tubo de diámetro externo de 150 mm está construido con placa de 10 mm de espesor. Está unido mediante una espiral de soldadura que forma un ángulo de +30° con el eje longitudinal. Determinar el máximo par que pueda aplicársele si el esfuerzo cortante a lo largo de la soldadura está limitado a 30 MN/m^2.

Resolución:

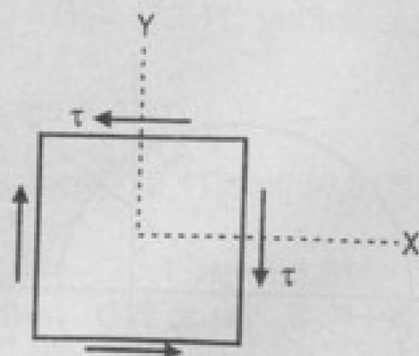
El tubo delgado tiene:

radio exterior $= r_e = 0{,}075$ m

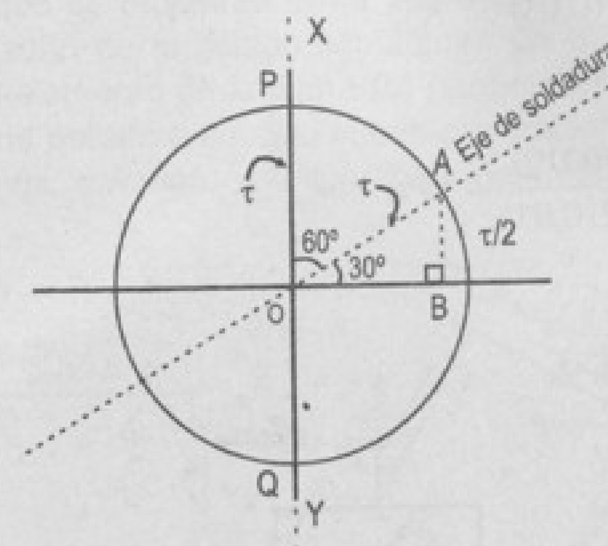
espesor $= e = 0{,}01$ m

radio interior $= r_i = 0{,}065$ m

El par torsor aplicado genera un esfuerzo cortante τ, así el diferencial:



En el círculo de Mohr:



El esfuerzo cortante a 30° (60° en el círculo de Mohr) es de:

$$\tau_{(a\ 30°)} = AB = \tau \operatorname{sen} 30° = \frac{\tau}{2}$$

Del dato del problema: $\tau_{(a\ 30°)} = 30\ \text{MPa} = \dfrac{\tau}{2}$

Así: $\tau = 60$ MPa

El par torsor T necesario para generar el esfuerzo τ es de:

$$\tau = \frac{T.r_e}{\frac{\pi}{2}\left(r_e^4 - r_i^4\right)} \Rightarrow T = \frac{\pi\left(r_e^4 - r_i^4\right)}{2r_e}.\tau$$

$$T = \frac{\pi(0{,}075^4 - 0{,}065^4)\times 60\times 10^6}{2(0{,}075)}\text{N·m} \quad \therefore \quad \boxed{T = 17{,}3\ \text{kN . m}}$$

937. Un recipiente cerrado de forma cilíndrica tiene un diámetro exterior de 600 mm, está construido con placa de 10 mm de espesor y se encuentra sometido a una presión interna de 1400 kPa. Calcular los esfuerzos normal y cortante a lo largo de la espiral de soldadura utilizada para unirlo, si esta forma un ángulo de +30° con el eje longitudinal.

Resolución:

La presión interna $P_i = 1400$ kPa crea un esfuerzo tangencial σ_T y un esfuerzo longitudinal σ_L.

Así: $\sigma_T = \dfrac{P_i \times r_e}{e} = \dfrac{(1400)(0,3)}{(0,01)}$ kPa

$\sigma_T = 42$ MPa ...(1)

y $\sigma_L = \dfrac{P_i \times r_e}{2e} = \dfrac{(1400)(0,3)}{2(0,01)}$ kPa

$\sigma_L = 21$ MPa ...(2)

Nos da el diferencial:

En el círculo de Mohr:

Así:

$\sigma_N = (31,5 + CE) = (31,5 + CD\cos 60°)$

$\sigma_N = (31,5 + (42 - 31,5)\cos 60°) = 36,75$ MPa

$\tau = DE = CD \operatorname{sen} 60° = (42 - 31,5)(\sqrt{3}/2)$

$\tau = 9,09$ MPa

Así a 30° con el eje longitudinal (60° en el círculo de Mohr) se tiene:

$\boxed{\sigma_N = 36,75 \text{ MPa}}$; $\boxed{\tau = 9,09 \text{ MPa}}$

938. En un punto de un cuerpo, el estado de esfuerzo es el resultado de dos estados separados que se muestran en la figura (a) y (b). Calcular el estado de esfuerzo que resulta de la acción simultánea de esos dos estados. ***Indicación:*** Orientar el elemento de la figura (b) paralelamente al de la figura, calculando el estado de esfuerzo en esta nueva orientación, para poder superponer ambos. En seguida, calcular los esfuerzos y determinar los planos principales de esfuerzo.

Resolución:

Vamos a superponer los esfuerzos, para ello reorientamos el diferencial inclinado:

En el círculo de Mohr:

Como: ON = OM = OP = OQ = 30

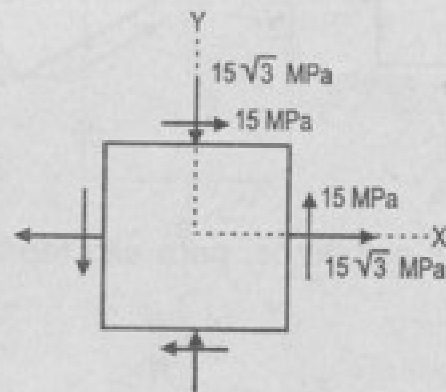
Luego: $OR = OP\cos 30° = 30\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 15\sqrt{3} \wedge PR = -OP\text{sen}30° = -30\left(\dfrac{1}{2}\right) = -15$

Así los esfuerzos en el eje X son: $\sigma_x = 15\sqrt{3}$ MPa; $\tau_{xy} = -15$ MPa

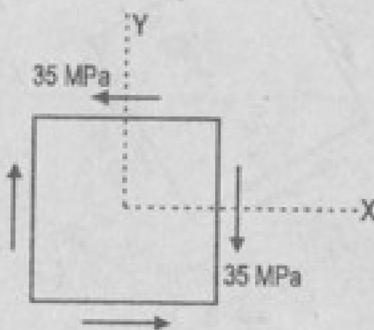
También: $SO = -OQ\cos 30° = -30\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -15\sqrt{3} \wedge QS = OQ\text{sen}30° = 30\left(\dfrac{1}{2}\right) = 15$

Los esfuerzos en el eje Y son: $\sigma_y = -15\sqrt{3}$ MPa; $\tau_{yx} = 15$ MPa

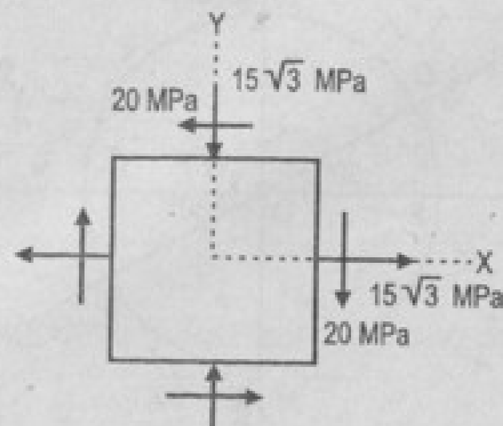
El diferencial es:



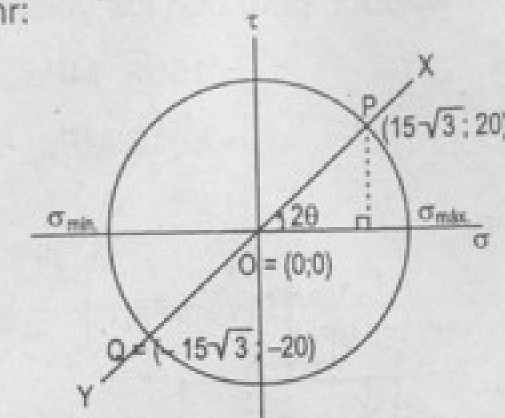
Sumando al diferencial:



Obtenemos:



En el círculo de Mohr:



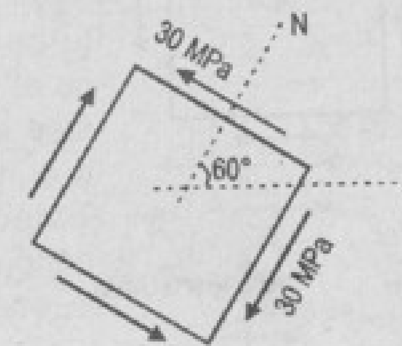
Así del gráfico: $\boxed{\sigma_{máx.} = \sqrt{(15\sqrt{3})^2 + 20^2} = 32{,}8 \text{ MPa}}$ que está a:

$\tan 2\theta = \dfrac{20}{15\sqrt{3}} \Rightarrow 2\theta = 37{,}589°$ ó $\boxed{\theta = 18{,}8°}$ medido hacia abajo.

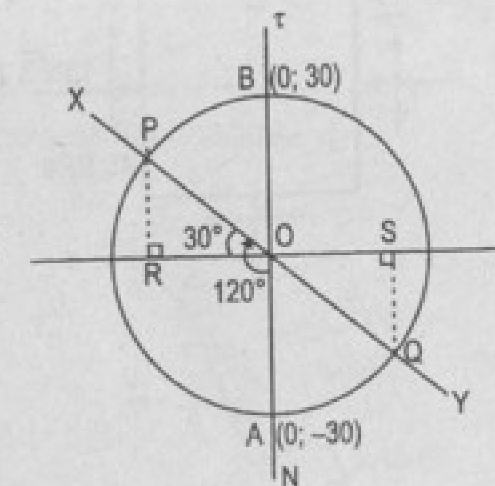
939. Resolver el problema 938 suponiendo que los sentidos de los esfuerzos cortantes de 30 MPa se invierten.

Resolución:

Al invertirse la orientación del esfuerzo cortante, tenemos:



En el círculo de Mohr:

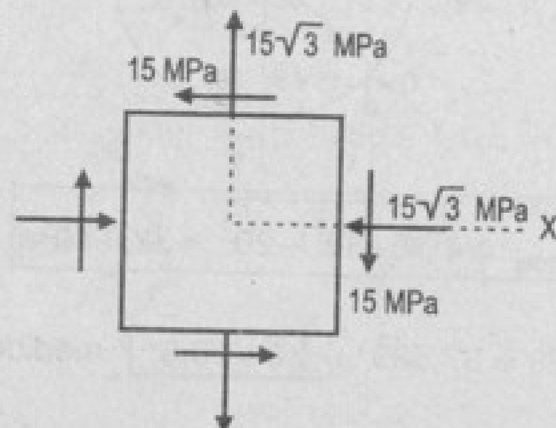


Que es el mismo círculo anterior, pero con los valores invertidos, así:

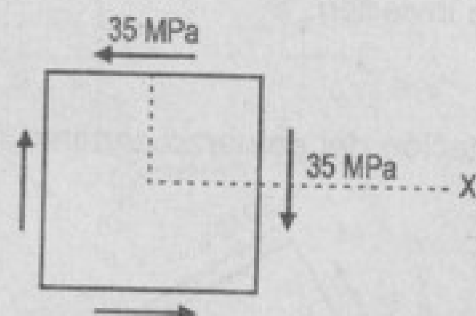
$\sigma_x = -15\sqrt{3}$ MPa $\wedge$ $\sigma_y = 15\sqrt{3}$ MPa

$\tau_{xy} = 15$ MPa $\wedge$ $\tau_{yx} = -15$ MPa

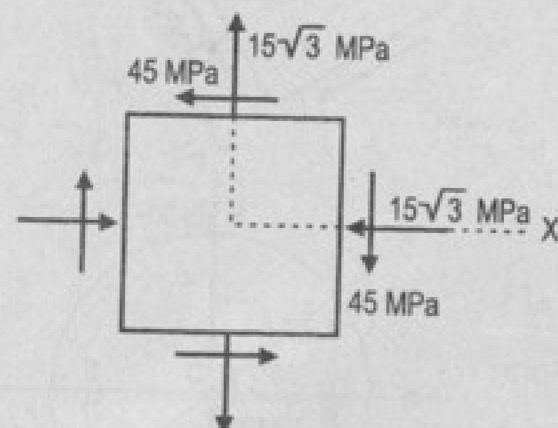
Nos da el diferencial:



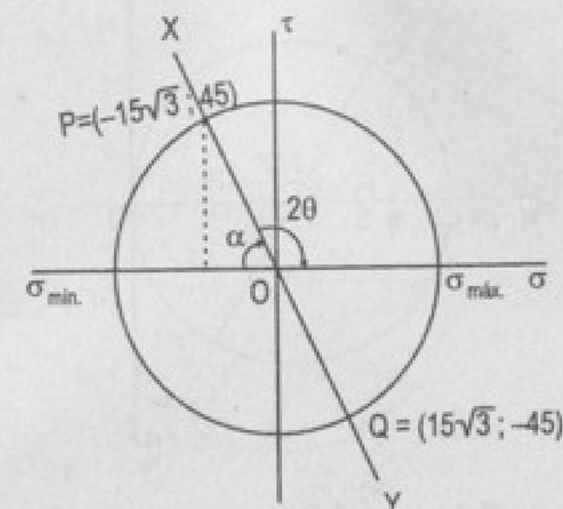
Sumando a:



Obtenemos:



En el círculo de Mohr:



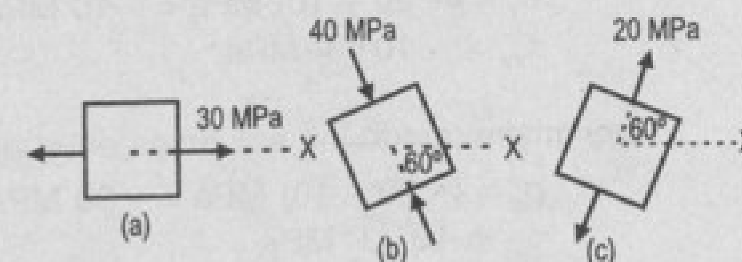
Donde:

$$\sigma_{máx.} = \sqrt{(15\sqrt{3})^2 + (45)^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{máx.} = 30\sqrt{3}\text{ MPa}}$$

Como $\tan\alpha = \dfrac{45}{15\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 60°$

Así: $2\theta = 180° - 60° \Rightarrow \theta = 60°$ o $\boxed{\theta = 60°}$ midiendo hacia abajo

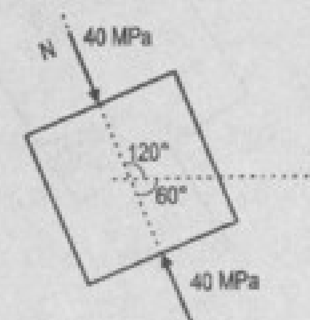
940. El estado de esfuerzo en un punto es el resultado de la acción conjunta de los tres estados que se muestran en la figura. Calcular los esfuerzos principales, así como su orientación, a partir del estado de esfuerzo resultante.



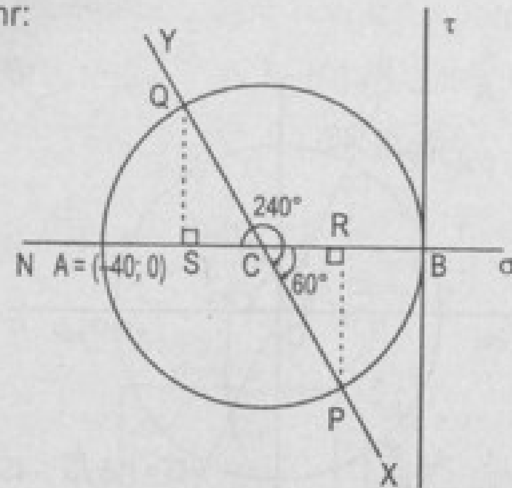
Resolución:

Reorientando las diferenciales inclinadas:

1.



En el círculo de Mohr:



Donde: C = (– 20; 0); así: AC = CB = CP = CQ = 20

Luego: $CR = CP\cos 60° = 20\left(\frac{1}{2}\right) = 10$

$PR = CP\text{sen}60° = 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3}$

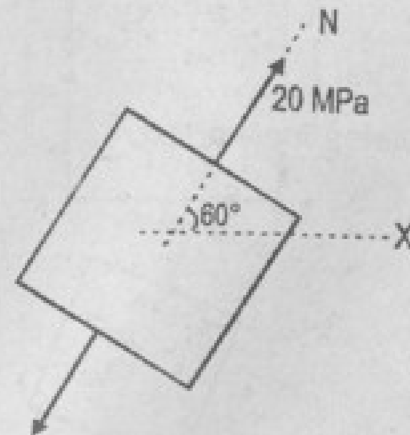
Los esfuerzos en el eje X son:

$\sigma_x = (-20 + 10)\text{ MPa} = -10\text{ MPa}$
$\tau_{xy} = -10\sqrt{3}\text{ MPa}$

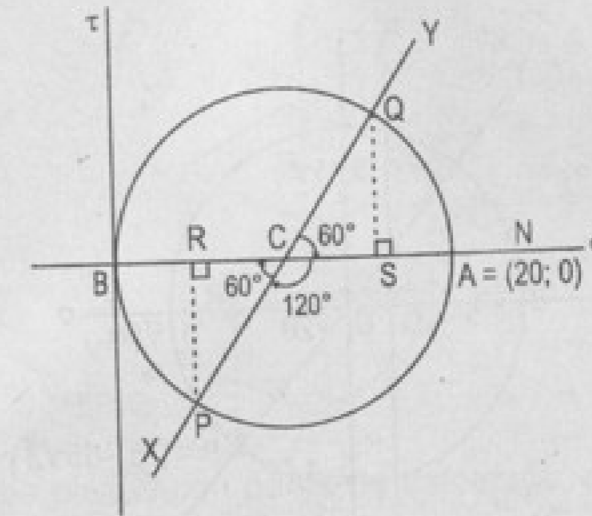
Del mismo modo los esfuerzos en el eje Y son:

$\sigma_y = (-20 - 10)\text{ MPa} = -30\text{ MPa}$
$\tau_{yx} = 10\sqrt{3}\text{ MPa}$

2. Del segundo diferencial:



En el círculo de Mohr:



Donde: C = (10; 0)

Los esfuerzos en el eje X son:

$\sigma_x = 10 - RC = 10 - PC\cos 60° = 10 - 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5\text{ MPa}$

$\tau_{xy} = -PC\text{sen}60° = -10\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ MPa} = -5\sqrt{3}\text{ MPa}$

Los esfuerzos en el eje Y son:

$\sigma_y = 10 + CS = 10 + CQ\cos 60° = 10 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 15\text{ MPa}$

$\tau_{yx} = CQ\text{sen}60° = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ MPa}$

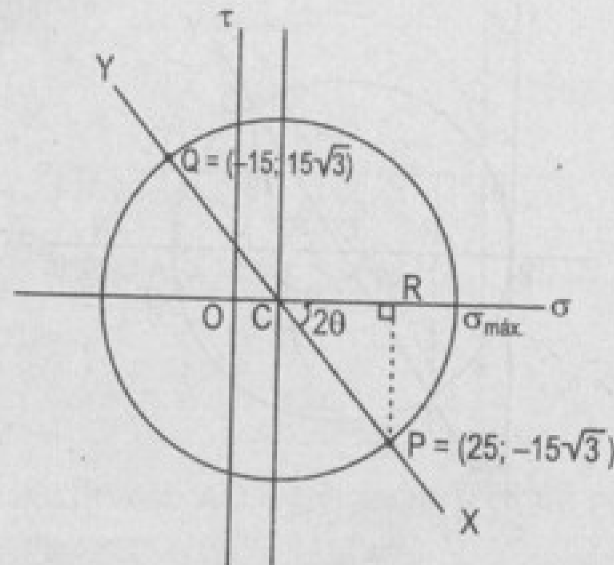
3. Del tercer diferencial:

$\sigma_x = 30\text{ MPa};\ \tau_{xy} = 0;\ \sigma_y = 0;\ \tau_{yx} = 0$

Por la superposición de esfuerzos, sumamos miembro a miembro para la resultante de esfuerzos:

$\sigma_x = -10\text{ MPa} + 5\text{ MPa} + 30\text{ MPa} = 25\text{ MPa}$
$\tau_{xy} = -10\sqrt{3}\text{ MPa} - 5\sqrt{3}\text{ MPa} + 0 = -15\sqrt{3}\text{ MPa}$
$\sigma_y = -30\text{ MPa} + 15\text{ MPa} + 0 = -15\text{ MPa}$
$\tau_{yx} = 10\sqrt{3}\text{ MPa} + 5\sqrt{3}\text{ MPa} + 0 = 15\sqrt{3}\text{ MPa}$

En el círculo de Mohr tenemos:



Donde C = (5; 0)

Y: $\sigma_{máx.} = 5 + CP = 5 + \sqrt{(25-5)^2 + (15\sqrt{3})^2} = (5 + 32{,}78)$ MPa

$\sigma_{máx.} = 37{,}78$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx.} = 37{,}8 \text{ MPa}}$

También: $\tan 2\theta = \dfrac{15\sqrt{3}}{25-5}$

Donde: $2\theta = 52{,}42° \Rightarrow \theta = 26{,}21° \Rightarrow \boxed{\theta = 26{,}2°}$

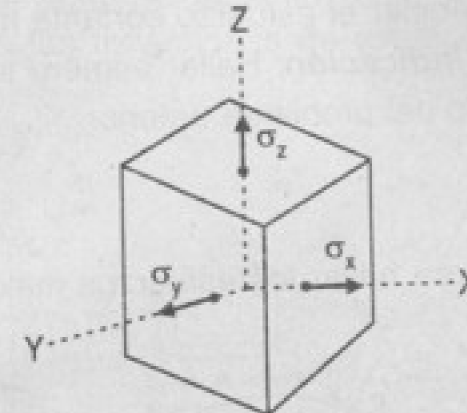
941. Los esfuerzos principales en un elemento en el espacio tridimensional son σ_x, σ_y y σ_z. Suponiendo que $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$, demostrar que el esfuerzo cortante máximo, en un cierto plano cualquiera que corte al elemento, es igual a $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)$. Considere todas las orientaciones posibles del elemento para poder trazar círculos de Mohr independientes, cada una de las cuales represente los esfuerzos en planos que pasan por uno de los ejes principales.

Resolución:

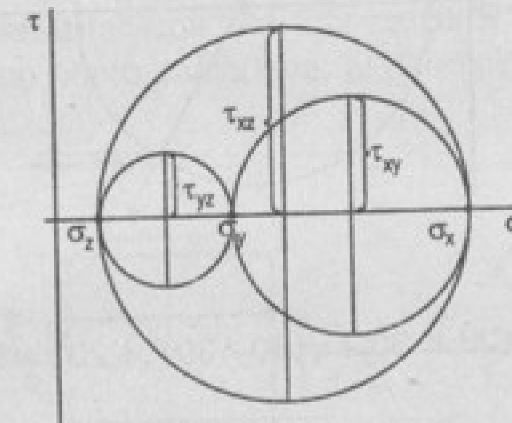
Tenemos presente que la relación de esfuerzos es:

$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ ...(1)

La diferencial tridimensional es:



Tomando secciones planas con pares de esfuerzos; en el círculo de Mohr:



Donde en cada círculo se cumple:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \ \wedge \ \tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \ \wedge \ \tau_{yz} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)$$

De (1): $\sigma_x > \sigma_y \Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) > \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)$

Esto es: $\tau_{xz} > \tau_{yz}$ ...(α)

También de (1): $\sigma_y > \sigma_z$ o $-\sigma_z > -\sigma_y$

Y: $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) > \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$

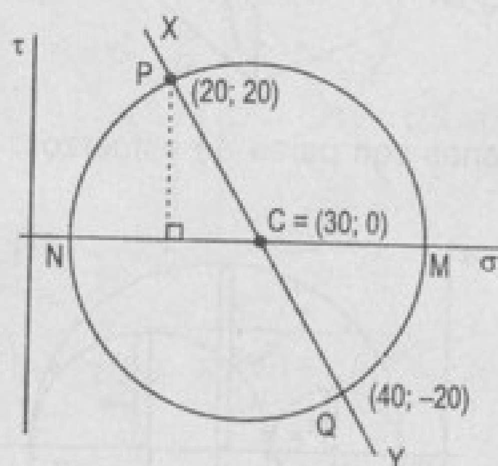
Es decir: $\tau_{xz} > \tau_{xy}$ ...(β)

Así el esfuerzo cortante máximo es: $\boxed{\tau_{máx.} = \tau_{xz} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}$

942. Un estado de esfuerzo plano está definido por $\sigma_x = 20\ MN/m^2$, $\sigma_y = 40\ MN/m^2$ y $\sigma_{xy} = 20\ MN/m^2$. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cualquier plano que pase por el punto. ***Indicación***: Hallar primero los esfuerzos principales y luego aplicar el resultado del problema anterior.

Resolución:

En el círculo de Mohr, para hallar los esfuerzos máximos:



Donde: $\sigma_{máx.} = 30 + CM = 30 + \sqrt{(40-30)^2 + 20^2} = 52{,}36\ MPa = \sigma_1$

$$\sigma_{mín.} = 30 - CN = 30 - \sqrt{(40-30)^2 + 20^2} = 7{,}64\ MPa = \sigma_2$$

Para hallar el esfuerzo cortante máximo, hay que tomar en cuenta que el tercer esfuerzo es nulo, $\sigma_3 = 0$.

Hallando el esfuerzo cortante máximo, como el mayor de:

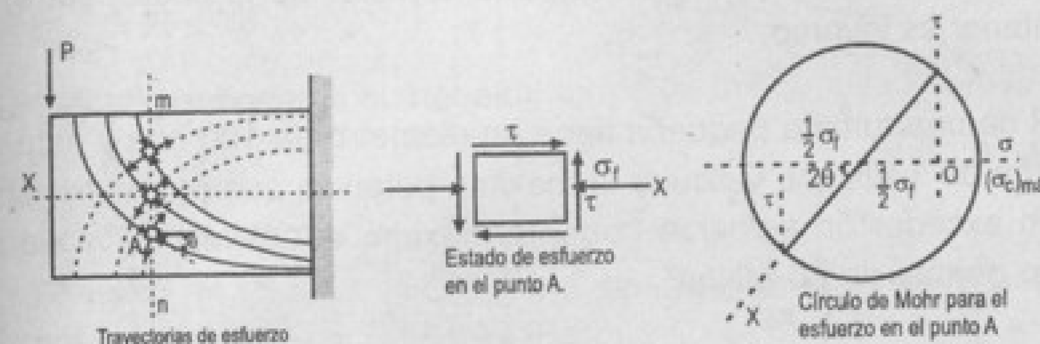
$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 22{,}36\ MPa;\ \tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 26{,}18\ MPa$$

$$\tau_3 = \frac{1}{3}(\sigma_2 - \sigma_3) = 3{,}82\ MPa$$

Así: $\tau_{máx.} = 26{,}18\ MPa \Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 26{,}2\ MN/m^2}$

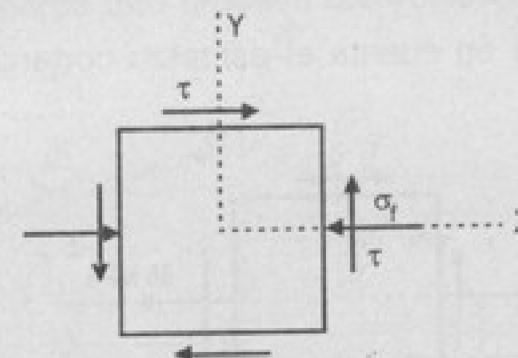
943; 944; 945: problemas ilustrativos.

946. Explicar por qué las trayectorias de esfuerzo, en la figura, tienden a ser horizontales al aproximarse al empotramiento. ¿En dónde son exactamente horizontales? ¿Cuáles son las trayectorias de esfuerzo en el caso de tensión o compresión axiales?

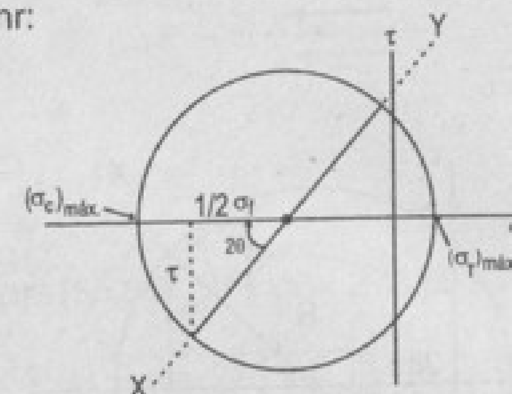


Resolución:

Para una viga empotrada afectada por una carga P produce esfuerzos por flexión y cortantes, en un punto cualquiera, el diferencial será:



En el círculo de Mohr:



Donde: $\tan 2\theta = \dfrac{\tau}{\dfrac{\sigma_f}{2}}$

En el empotramiento $\tau = 0$; así: $\tan 2\theta = 0$, donde se halla dos valores para θ:

$$\theta_1 = 0° \text{ o } \theta_2 = 90°$$

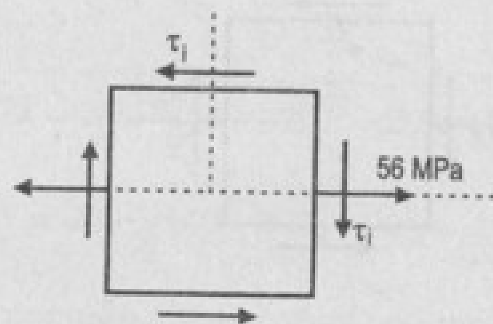
Lo cual solo es posible cuando las trayectorias en el empotramiento son horizontales.
Del mismo resultado los esfuerzos de tensión son horizontales y los de compresión, verticales; si se analiza la parte superior de la línea neutra, para la parte inferior es inverso.

947. El árbol de una turbina pequeña tiene un diámetro de 100 mm y está sujeto a una carga de 140π kN. Calcular la máxima potencia que puede transmitirse a 4 r/s sin exceder un esfuerzo cortante máximo de 70 MN/m² ni un máximo esfuerzo normal de 90 MN/m².

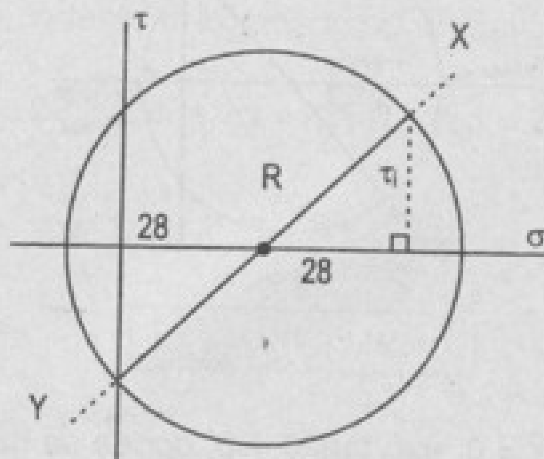
Resolución:

El esfuerzo normal es: $\sigma_N = \dfrac{P}{A} = \dfrac{140\pi \text{ kN}}{\pi r^2} = \dfrac{140\pi \text{ kN}}{\pi(0{,}05)^2 \text{ m}^2} \Rightarrow \sigma_N = 56 \text{ MPa}$

El diferencial, tomando en cuenta el esfuerzo cortante producido por un par torsor:



En el círculo de Mohr:



Para el esfuerzo máximo:

$\sigma_{máx.} = 28 + R \leq 90 \Rightarrow R \leq 62$ ...(1)

Para el esfuerzo cortante máximo:

$\tau_{máx.} = R \leq 70$ ...(2)

De (1) y (2) escogemos el menor:

$R = 62$

En el círculo de Mohr:

$R^2 - 28^2 = \tau_i^2$

$62^2 - 28^2 = \tau_i^2 \Rightarrow \tau_i = 55{,}32 \text{ MPa}$

Así, para que cumpla las condiciones dadas, el esfuerzo cortante producido por un momento torsionante es:

$\tau_i = 55{,}32 \text{ MPa}$

El momento torsionante que produce este esfuerzo cortante es:

$$\tau_i = \frac{T \cdot r}{J} = \frac{T \cdot r}{\frac{\pi}{2} r^4} = \frac{2 \cdot T}{\pi r^3}$$

$$T = \frac{\pi}{2} r^3 \tau_i \quad \text{...}(\alpha)'$$

La potencia generada por este momento torsionante es:

$$\mathcal{P} = 2\pi f T \quad \text{...}(\beta)$$

(α)' en (β):

$$\mathcal{P} = 2\pi f\left(\frac{\pi}{2} r^3 \tau_i\right) \Rightarrow P = \pi^2 \cdot f \cdot r^3 \tau_i$$

Así: $\mathcal{P} = \pi^2(4)\,(0{,}05)^3\,(55{,}3 \times 10^6) \text{ W} = 272\,993 \text{ W}$

o $\mathcal{P} = 272{,}993 \text{ kW} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} \cong 273 \text{ kW}}$

948. Un eje macizo de 100 mm de diámetro está sujeto simultáneamente a una fuerza de compresión de 600 kN y a un par de torsión que lo deforma un ángulo de 1,5° en una longitud de 8 m. Si G = 80 × 10⁹ N/m², calcular los máximos esfuerzos normal y cortante a que está sometido el eje.

Resolución:

La fuerza de compresión produce un esfuerzo normal:

$$\sigma_N = \frac{600\ \text{kN}}{\pi(0{,}05)^2\ m^2} = 76{,}39\ \text{MPa}$$

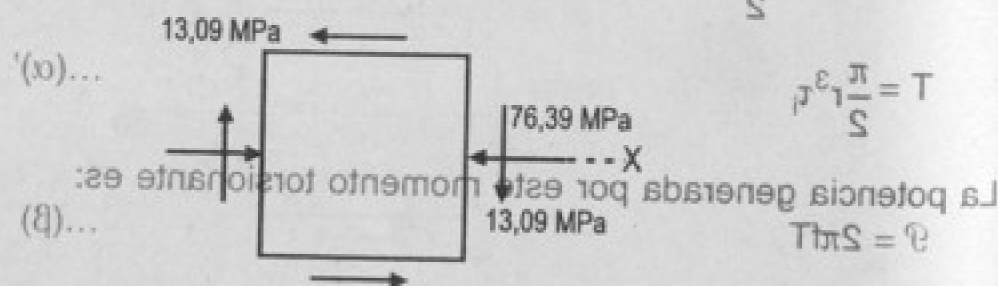
El par torsor necesario para deformar un ángulo 1,5° una longitud de 8 m está dado por: $T = \frac{G\theta}{L} \cdot J$ ...(α)

Que produce un esfuerzo cortante: $\tau_i = \frac{Tr}{J}$ ...(β)

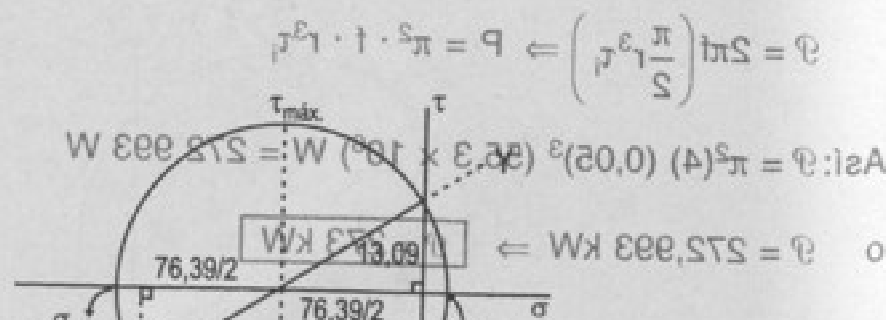
De (α) y (β): $\tau_i = \theta\left(\frac{r}{L}\right)G$ (θ: en radianes)

$$\tau_i = \frac{(1{,}5\pi)}{180}\frac{(0{,}05)}{8}(80\times10^9)\ N/m^2 \Rightarrow \tau_i = 13{,}09\ \text{MPa}$$

Nos da el diferencial:



En el círculo de Mohr:



Donde: $\tau_{máx.} = \sqrt{\left(\frac{76{,}39}{2}\right)^2 + (13{,}09)^2} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 40{,}4\ MN/m^2}$

$$\sigma_{máx.} = -\left(\frac{76{,}39}{2}\right) + 40{,}37 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max.} = 2{,}18\ \text{MPa}}$$

$$\sigma_{mín.} = -\left(\frac{76{,}39}{2}\right) - 40{,}37 \Rightarrow \boxed{\sigma_{mín.} = 78{,}565\ \text{MPa}}$$

949. Un eje de 100 mm de diámetro soporta simultáneamente una carga axial de tensión de 50π kN, un momento flexionante máximo de 2π kN·m y un par de torsión de 3π kN·m. Calcular los máximos esfuerzos cortantes y normales, tanto de tensión como de compresión.

Resolución:

Hay que hallar los esfuerzos producidos por cada carga o momento:

Por la carga axial, el esfuerzo será: $\sigma_a = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2}$

Y como: $P = +50\pi$ kN ∧ $r = 0{,}05$ m

Luego: $\sigma_a = +\frac{50\pi\ \text{kN}}{\pi(0{,}05)^2 m^2} = +20\ \text{MPa}$

Por el momento flexionante M = 2π kN·m:

$$\sigma_f = \pm\frac{Mr}{I} = \pm\frac{Mr}{\frac{\pi}{4}r^4} = \pm\frac{4M}{\pi r^3} = \pm\frac{4(2\pi\ \text{kN·m})}{\pi(0{,}05)^3 m^3} = \pm 64\ \text{MPa}$$

Así: $\sigma_f = +64$ MPa (por tensión)

$\sigma_f = -64$ MPa (por compresión)

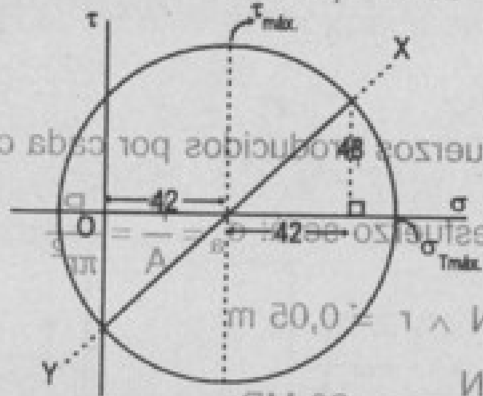
Por el par torsor T = 3π kN·m:

$$T = \frac{Tr}{J} = \frac{Tr}{\frac{\pi}{2}r^4} = \frac{2T}{\pi r^3} = \frac{2(3\pi)\ \text{kN·m}}{\pi(0{,}05)^3\ m^3} = 48\ \text{MPa}$$

Tanto el esfuerzo axial como el de flexión los sumamos por estar en el mismo plano:

1. Para la tensión: $\sigma_N = +20\ \text{MPa} + 64\ \text{MPa} = 84\ \text{MPa}$
$\tau = 48\ \text{MPa}$

Nos da el diferencial:



En el círculo de Mohr:

Donde: $\sigma_{T(\text{máx.})} = (42 + \sqrt{42^2 + 48^2})\ \text{MPa} \Rightarrow \boxed{\sigma_{T(\text{máx.})} = 106\ \text{MPa}}$

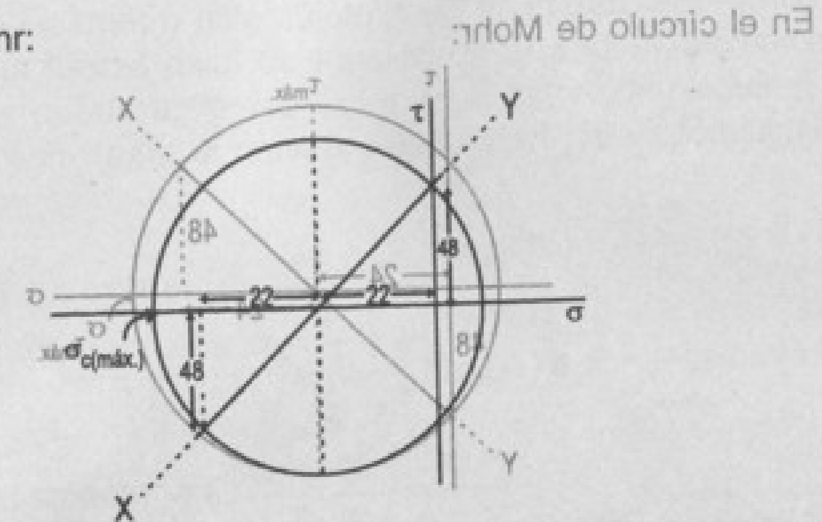
$\boxed{\tau_{\text{máx.}} = \sqrt{42^2 + 48^2} = 63{,}8\ \text{MPa}}$

2. Para la compresión:

$\sigma_N = +20\ \text{MPa} - 64\ \text{MPa} = -44\ \text{MPa} \wedge \tau = 48\ \text{MPa}$

En el diferencial:

En el círculo de Mohr:



Donde: $\sigma_{c(\text{máx.})} = (-22 - \sqrt{22^2 + 48^2})\ \text{MPa} \Rightarrow \boxed{\sigma_{c(\text{máx.})} = -74{,}8\ \text{MPa}}$

El signo menos sobreindica compresión.

950. Repetir el problema 949, suponiendo que se invierte el sentido de la carga axial, al mismo tiempo que su magnitud se abate a 40π kN.

Resolución:

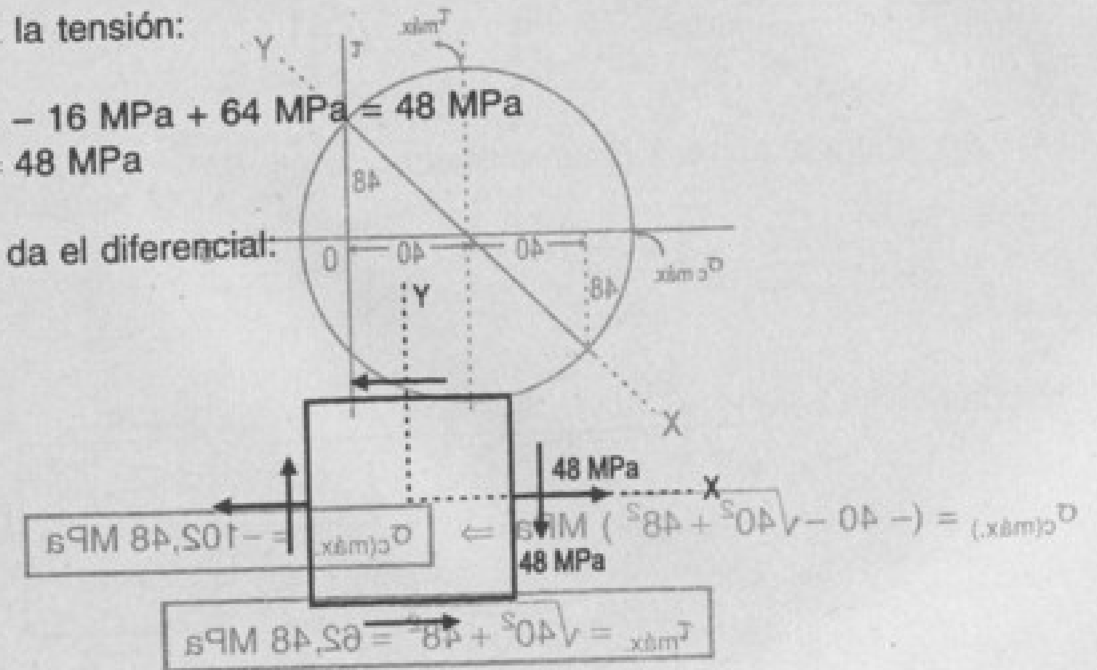
El procedimiento es el mismo que en el problema anterior, solo que:

$\sigma_a = -\dfrac{P}{A} = \dfrac{-40\pi\ \text{kN}}{\pi(0{,}05)^2\ \text{m}^2}$; $\sigma_a = -16\ \text{MPa}$ los demás valores son lo mismo.

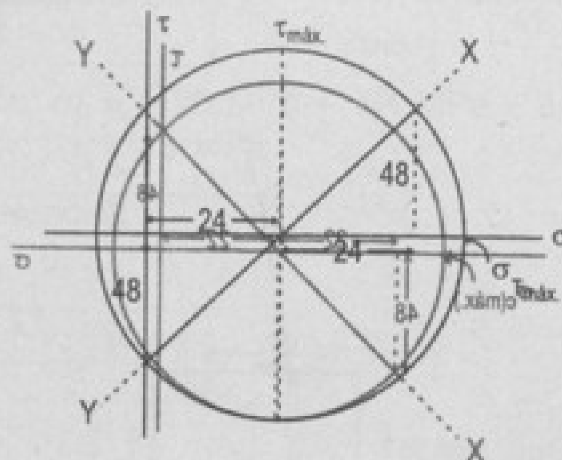
1. Para la tensión:

$\sigma_N = -16\ \text{MPa} + 64\ \text{MPa} = 48\ \text{MPa}$
$\tau_i = 48\ \text{MPa}$

Nos da el diferencial:



En el círculo de Mohr:

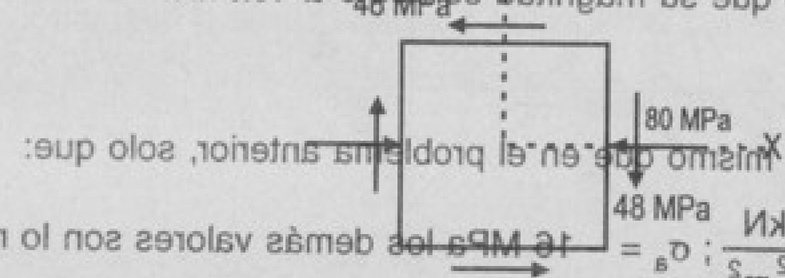


Donde: $\sigma_{T(máx.)} = 24 + \sqrt{24^2 + 48^2} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{T(máx.)} = 77{,}67\ \text{MPa}}$

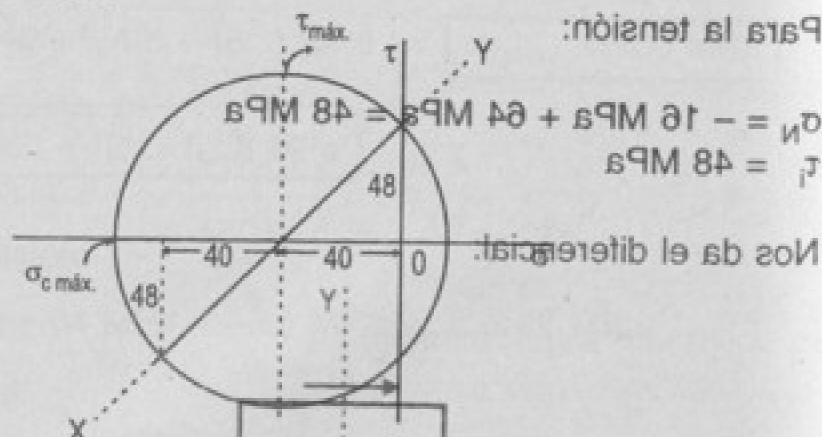
2. Para la compresión:

$\sigma_N = -16\ \text{MPa} - 64\ \text{MPa} = -80\ \text{MPa};\ \tau_i = 48\ \text{MPa}$

Nos da el diferencial:



En el círculo de Mohr:



$\sigma_{c(máx.)} = (-40 - \sqrt{40^2 + 48^2}\ )\ \text{MPa} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{c(máx.)} = -102{,}48\ \text{MPa}}$

$\boxed{\tau_{máx.} = \sqrt{40^2 + 48^2} = 62{,}48\ \text{MPa}}$

951. Un eje de 80 mm de diámetro está sujeto a un momento flexionante máximo de 80π N·m y a una fuerza axial de tensión de 40π kN. Calcular el par de torsión máximo que pueda aplicarse si los valores máximos admisibles del esfuerzo son 100 MN/m² para el normal y 80 MN/m² para el cortante.

Resolución:

Como el radio mide r = 0,04 m

Hallando los esfuerzos normales: $\sigma_a = \dfrac{P}{A} = \dfrac{40\pi\ \text{kN}}{\pi(0{,}04)^2\ \text{m}^2}$

$\Rightarrow\ \sigma_a = +25\ \text{MPa}$ ...(α)

Por el momento flexionante: $\sigma_f = \dfrac{Mc}{I} = \dfrac{Mr}{\frac{\pi}{4}r^4} = \dfrac{4M}{\pi r^3}$

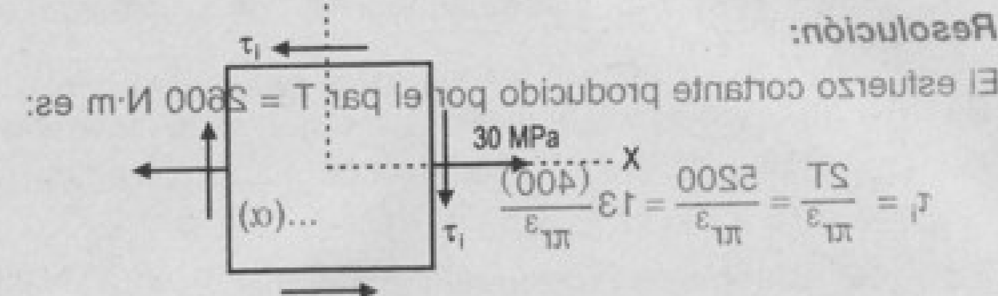
$\Rightarrow\ \sigma_f = \dfrac{4(80\pi)\ \text{N·m}}{\pi(0{,}04)^3\ \text{m}^3} = 5\ \text{MPa}$ ...(β)

Por superposición de esfuerzos, (α) + (β): $\sigma_N = \sigma_a + \sigma_f = 25\ \text{MPa} + 5\ \text{MPa}$

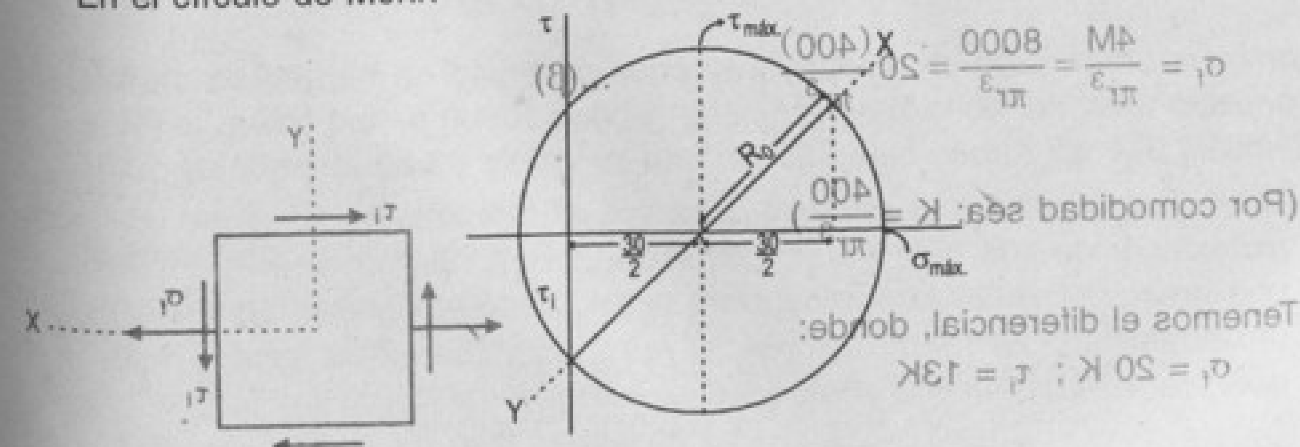
$\Rightarrow\ \sigma_N = 30\ \text{MPa}$ ...(θ)

Por el par torsor T, existe el esfuerzo cortante τ_i.

Tenemos el siguiente diferencial:



En el círculo de Mohr:



Donde:

$\sigma_{máx.} = 15 + R_0 \le 100$ ...(1)

$\tau_{máx.} = R_0 \le 80$ ...(2)

De (1) y (2), el R_0 óptimo es: $R_0 = 80$

En el círculo: $R_0^2 = \tau_i^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 \Rightarrow 80^2 - (15)^2 = \tau_i^2$

Así: $\tau_i = 78,58$ MPa y como: $\tau_i = \frac{T.r}{J} = \frac{T \times r}{\frac{\pi}{2} \times r^4} = \frac{2T}{\pi . r^3}$

Entonces: $T = \frac{\pi}{2}(0,04\ m)^3\ m^3 (78,58) \times 10^6 \frac{N}{m^2}$ ∴ $\boxed{T = 7899,84\ N{\cdot}m}$

952. Un eje de sección circular se emplea para transmitir simultáneamente un par de 2600 N·m y un momento flexionante máximo de 2000 N·m. Calcular el radio mínimo que pueda tener la sección del eje, si $\sigma_{máx.} \le 80$ MPa y $\tau_{máx.} \le 60$ MPa.

Resolución:

El esfuerzo cortante producido por el par T = 2600 N·m es:

$$\tau_i = \frac{2T}{\pi r^3} = \frac{5200}{\pi r^3} = 13\frac{(400)}{\pi r^3} \quad ...(\alpha)$$

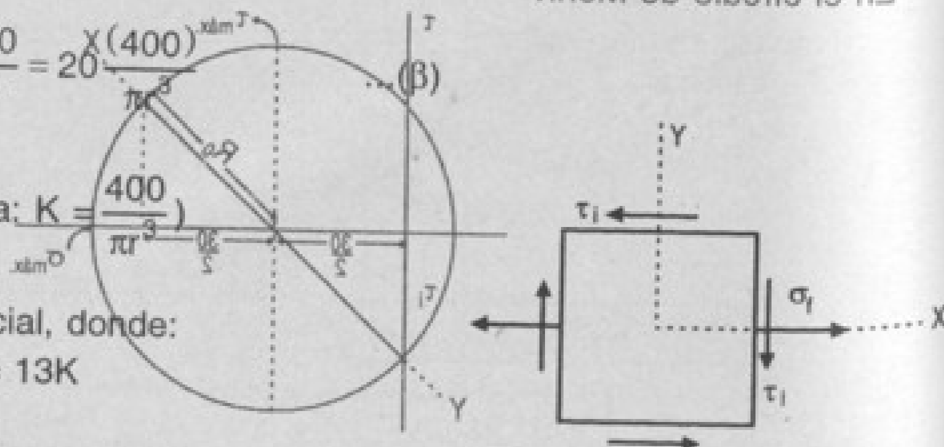
El esfuerzo normal por el momento flexionante es: (M = 2000 N·m)

$$\sigma_f = \frac{4M}{\pi r^3} = \frac{8000}{\pi r^3} = 20\frac{(400)}{\pi r^3} \quad ...(\beta)$$

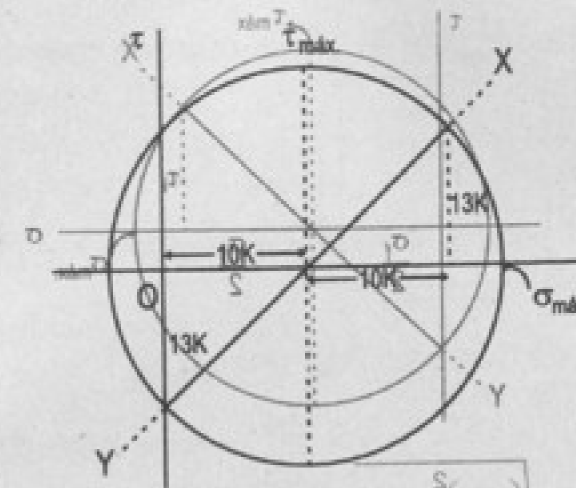
(Por comodidad sea: $K = \frac{400}{\pi r^3}$)

Tenemos el diferencial, donde:

$\sigma_f = 20\,K$; $\tau_i = 13K$



En el círculo de Mohr:



Como: $\tau_{máx} \le 60 \times 10^6$ N·m ...(1)

$\sigma_{máx} \le 80 \times 10^6$ N·m ...(2)

Debemos buscar el "K" apropiado.

De (1): $\sqrt{10^2K^2 + 13^2K^2} = 60 \times 10^6$

Así: $K_1 = 3658264,56$ ó $\frac{400}{\pi r_1^3} = 3658264,56$

donde: $r_1 = 0,03265$ m ó $r_1 = 32,65$ mm ...(3)

De (2): $10K + \sqrt{10^2 + 13^2}\,K = 80 \times 10^6$

Así $K_2 = 3030163,061$ ó $\frac{400}{\pi r_2^3} = 3030163,061$

donde: $r_2 = 0,03477$ m o $r_2 = 34,77$ mm ...(4)

De (3) y (4) elegimos el mayor valor: 34,77 mm ∴ $\boxed{r = 34,8\ mm}$

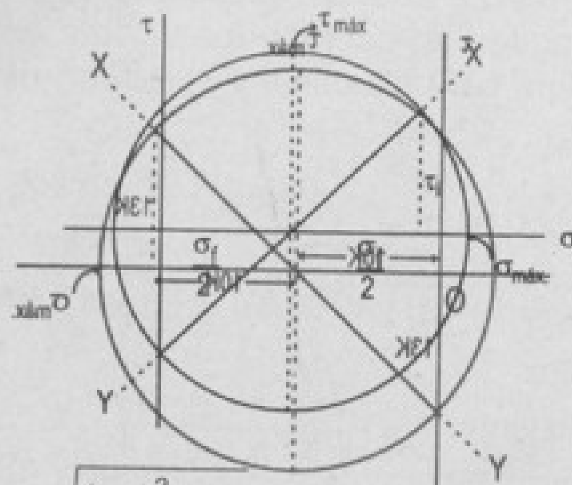
953. Un eje de 80 mm de diámetro soporta un momento flexionante máximo de 3 kN·m. ¿Qué par se puede aplicar, además, sin exceder un valor máximo del esfuerzo cortante de 80 MN/m² ni uno del esfuerzo normal de 120 MN/m²?

Resolución:

El momento flexionante M = 3 kN·m produce el esfuerzo:

$$\sigma_f = \frac{4M}{\pi r^3} = \frac{4(3\ kN{\cdot}m)}{\pi(0,04)^3\ m^3} \Rightarrow \sigma_f = 59,68\ MPa$$

El par torsor T produce el esfuerzo τ_i; así en el círculo de Mohr:



Donde: $\sigma_{máx.} = \frac{\sigma_f}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau_i^2} = 120 \text{ MPa}$

Así: $29{,}84 + \sqrt{(29{,}84)^2 + \tau_i^2} = 120$

$$\Rightarrow \sqrt{(29{,}84)^2 + \tau_i^2} = 90{,}16 \quad ...(\alpha)$$

$$\tau_{máx.} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau_i^2} = 80 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(29{,}84)^2 + \tau_i^2} = 80 \quad ...(\beta)$$

De (α) y (β), escogemos el menor valor, que es lo coherente.

Así: $(29{,}84)^2 + \tau_i^2 = 80^2$

$$\tau_i = 74{,}23 \text{ MPa}$$

Para este esfuerzo se requiere el par torsor T:

$$\tau_i = \frac{2T}{\pi r^3} \Rightarrow T = \frac{\pi r^3}{2}\tau_i \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}(0{,}04)^3\,(74{,}23 \times 10^6) \text{ N·m}$$

$T = 7462{,}06$ N·m ó $\boxed{T = 7{,}46 \text{ kN·m}}$

954. Un recipiente de forma cilíndrica, con sus extremos cerrados, tiene un diámetro exterior de 400 mm y un espesor de 20 mm. Si soporta simultáneamente una presión interna de 4 MPa, un par de torsión de 80 kN·m y un momento flexionante de 20 kN·m, calcular el máximo esfuerzo de tensión sobre sus paredes, descartando la posibilidad de pandeo.

Resolución:

Para el diámetro externo: d = 400 mm y un espesor: e = 20 mm, hallamos:

- Radio exterior = $r_e = 0{,}2$ m
- Radio interior = $r_i = 0{,}18$ m

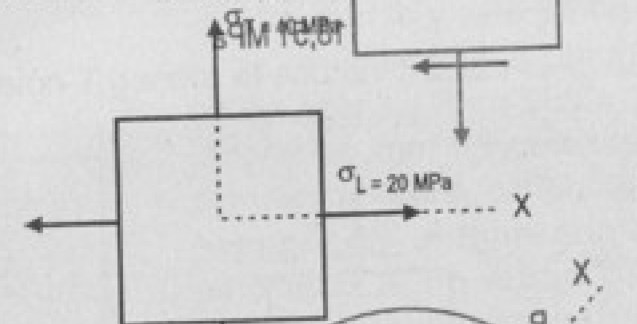
La presión interna $P_i = 4$ MPa causa dos esfuerzos:

- Esfuerzo tangencial = $\sigma_T = \frac{P_i r_e}{e}$
- Esfuerzo longitudinal = $\sigma_L = \frac{P_i r_e}{2e}$

Evaluando los valores:

$$\sigma_T = \frac{(4 \text{ MPa})(0{,}2)}{(0{,}02)} = 40 \text{ MPa} \quad \wedge \quad \sigma_L = \frac{(4 \text{ MPa})(0{,}2)}{2(0{,}02)} = 20 \text{ MPa}$$

Nos da el diferencial:



El par torsor T = 80 kN·m genera el esfuerzo cortante:

$$\tau = \frac{T r_e}{\frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4)} = \frac{(80)(0{,}2)}{\frac{\pi}{2}\left((0{,}2)^4 - (0{,}18)^4\right)} \text{ kPa}$$

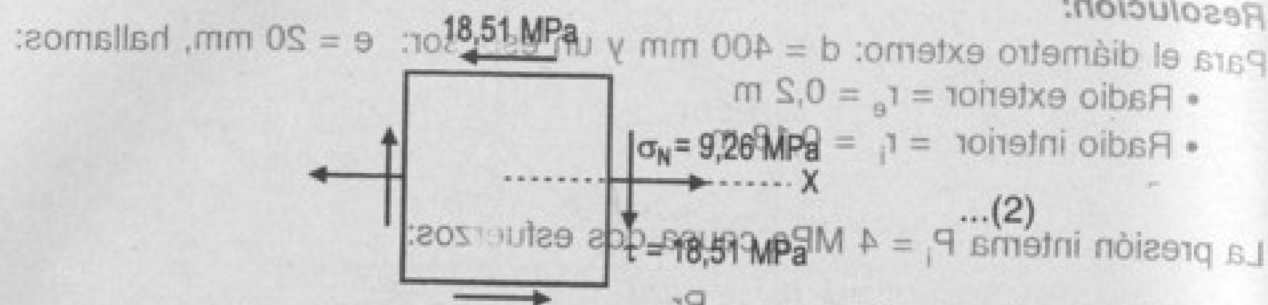
$$\tau = 18{,}51 \text{ MPa}$$

El momento flector M = 20 KN·m genera el esfuerzo normal:

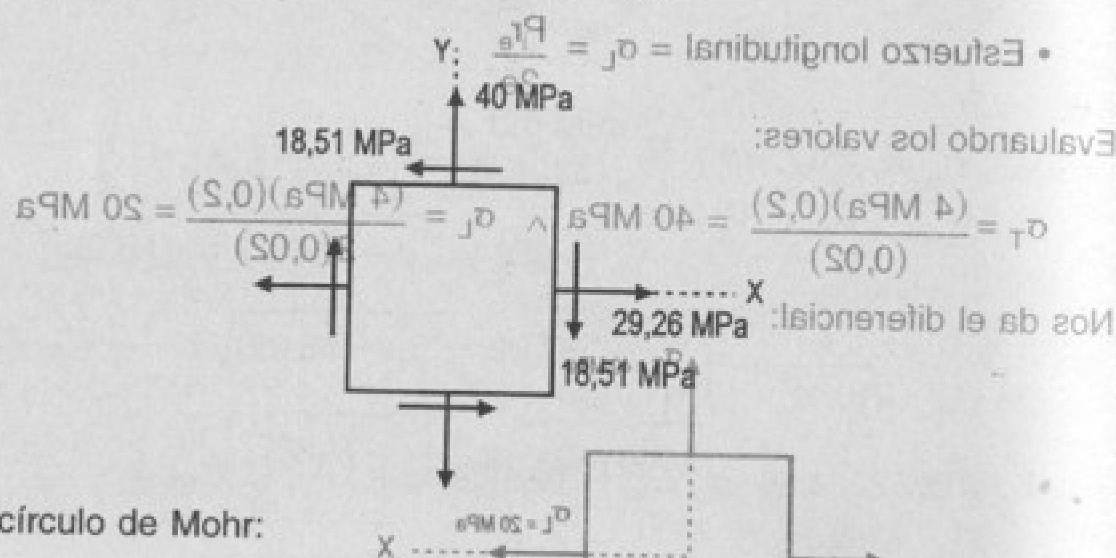
$$\sigma_N = \frac{M r_e}{\frac{\pi}{4}(r_e^4 - r_i^4)} = \frac{(20)(0{,}2)}{\frac{\pi}{4}\left((0{,}2)^4 - (0{,}18)^4\right)} \text{ kPa}$$

$$\sigma_N = 9{,}26 \text{ MPa}$$

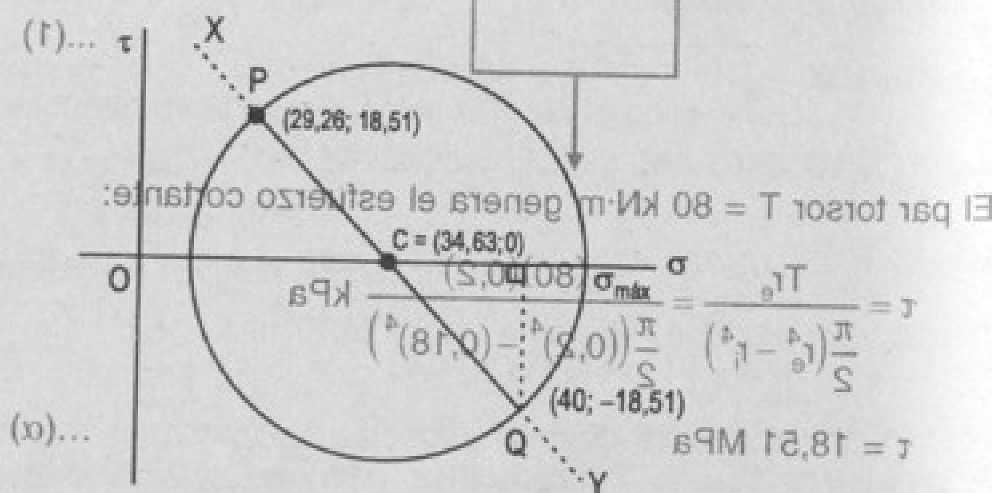
(α) y (β) generan el diferencial:



Superponiendo ambos diferenciales: ((1) + (2))



En el círculo de Mohr:



Donde: $\sigma_{máx.} = \left(34{,}63 + \sqrt{(40-34{,}63)^2 + (18{,}51)^2}\right)$ MPa

∴ $\boxed{\sigma_{máx.} = 53{,}9 \text{ MPa}}$

955. Un recipiente como el del problema anterior tiene un diámetro exterior de 300 mm y está construido con una placa de acero de 10 mm de espesor. Si el tanque está sujeto a una presión interna de 6 MN/m², calcular el máximo par de torsión que pueda aplicársele si el esfuerzo normal en sus paredes está limitado a 100 MN/m². Descartar la posibilidad de pandeo.

Resolución:

Para diámetro d = 300 mm y espesor e = 10 mm = 0,01 m, hallamos:

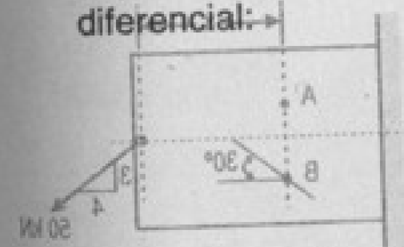
- Radio exterior = r_e = 0,15 m
- Radio interior = r_i = 0,14 m

Hallando los esfuerzos tangencial y longitudinal que produce la presión interna P_i = 6 MPa:

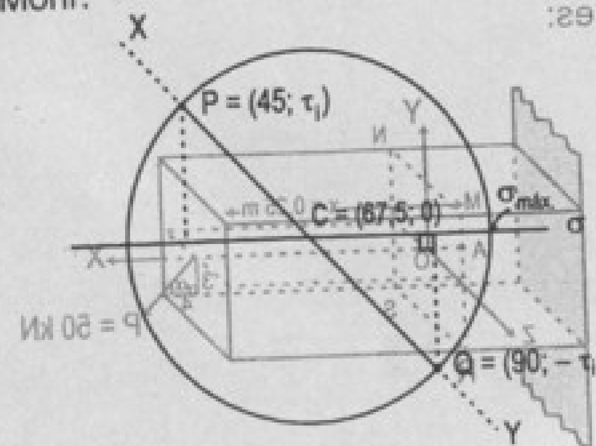
$$\sigma_T = \frac{P_i \cdot r_e}{e} = \frac{6\times 0{,}15}{0{,}01}\text{ MPa} \; ; \; \sigma_T = 90 \text{ MPa} \quad ...(1)$$

$$\sigma_L = \frac{P_i \cdot r_e}{2e} = \frac{6\times 0{,}15}{2\times 0{,}01}\text{ MPa} \; ; \; \sigma_L = 45 \text{ MPa} \quad ...(2)$$

El par de torsión T genera el esfuerzo cortante τ_i, así de (1) y (2) obtenemos el diferencial:



En el círculo de Mohr:



$$\sigma = \left(67,5 + \sqrt{(90-67,5)^2 + \tau_i^2}\right)\ \text{MPa} = 100\ \text{MPa}$$

Así: $\boxed{\tau_i = 23,45\ \text{MPa}}$

Y como el esfuerzo cortante está dado por: $\tau_i = \dfrac{T\cdot r_e}{\frac{\pi}{2}\left(r_e^4 - r_i^4\right)}$

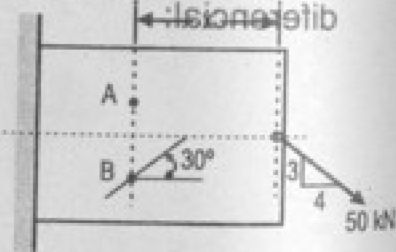
Así: $23,45 \times 10^6\ \text{N·m} = \dfrac{T(0,15)}{\frac{\pi}{2}\left((0,15)^4 - (0,14)^4\right)}$

$T = 29981,38\ \text{N·m}$

El par torsor necesario para las condiciones del problema es:

$\boxed{T = 29,98\ \text{kN·m}}$

956. Calcular los esfuerzos principales y el máximo esfuerzo cortante en el punto A de la figura, en la sección localizada a x = 250 mm. La viga es de sección rectangular, teniendo 20 mm de ancho, 120 mm de altura y el punto A se encuentra 20 mm arriba de la línea neutra. Supóngase que la carga de 50 kN actúa en el centroide de la sección. Mostrar las respuestas en forma gráfica sobre elementos diferenciales adecuados. *Indicación:* asegurarse de incluir el esfuerzo cortante causado por la carga aplicada.



Resolución:

La gráfica de la viga es:

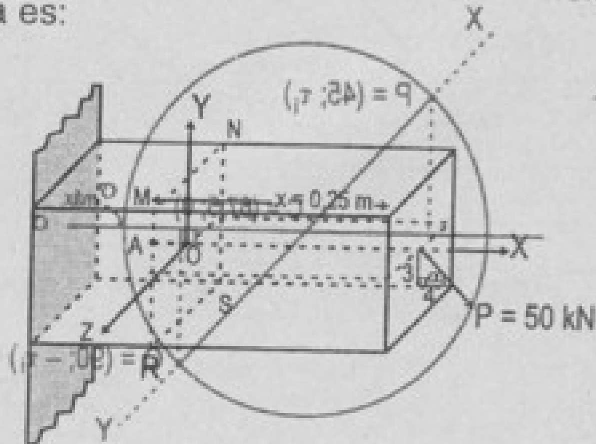
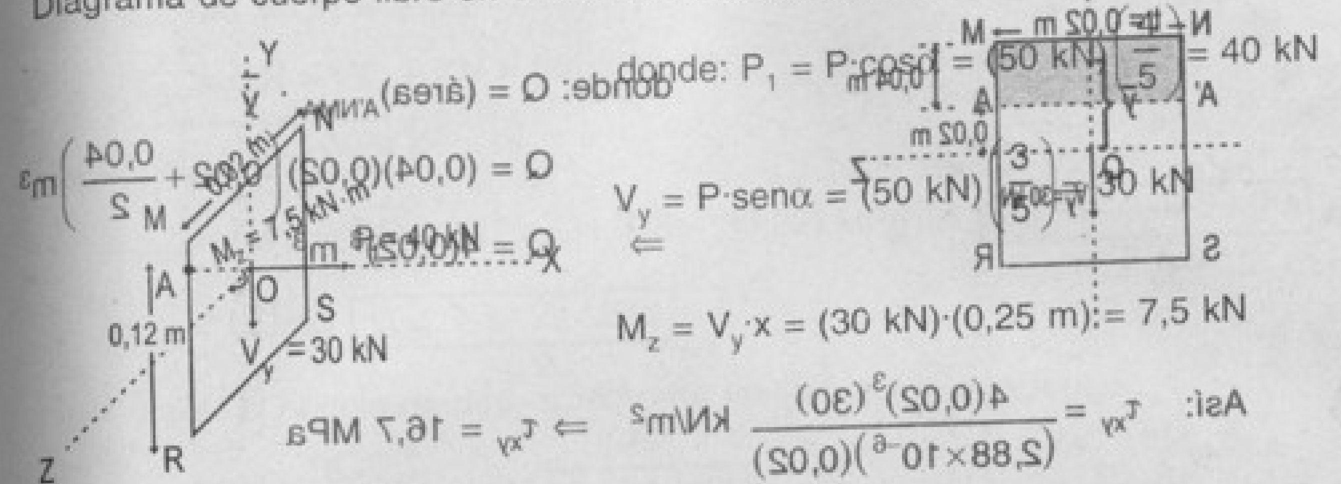


Diagrama de cuerpo libre en el centro de la sección MNSR:



donde: $P_1 = P\cdot\cos\alpha = (50\ \text{kN})\left(\frac{4}{5}\right) = 40\ \text{kN}$

$V_y = P\cdot\text{sen}\alpha = (50\ \text{kN})\left(\frac{3}{5}\right) = 30\ \text{kN}$

$M_z = V_y\cdot x = (30\ \text{kN})\cdot(0,25\ \text{m}) = 7,5\ \text{kN}$

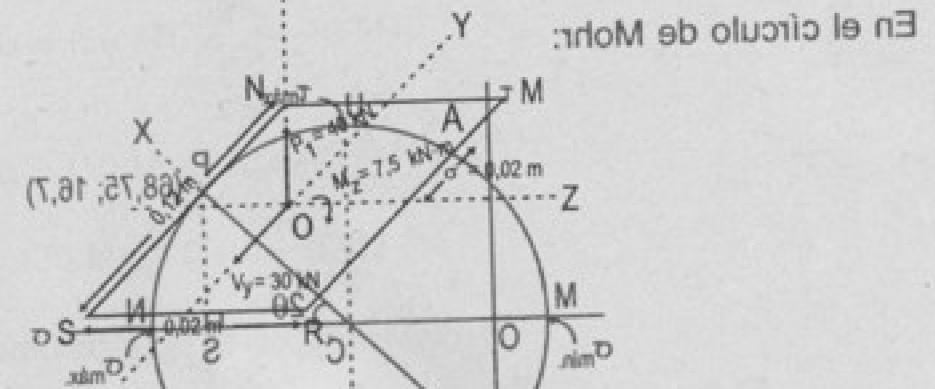
Las características de la sección MNSR (de los datos):

(área)MNSR $= A_{MNSR} = (0,02)(0,12)\ \text{m}^2 \Rightarrow A_{MNSR} = 2,4 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$

$$I_z = \frac{(0,02)(0,12)^3}{12}\ \text{m}^4 = 2,88 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

Para el esfuerzo normal tenemos: $\sigma_x = \dfrac{P_1}{A_{MNSR}} + \dfrac{M_z\cdot y}{I_z}$

Dado que:

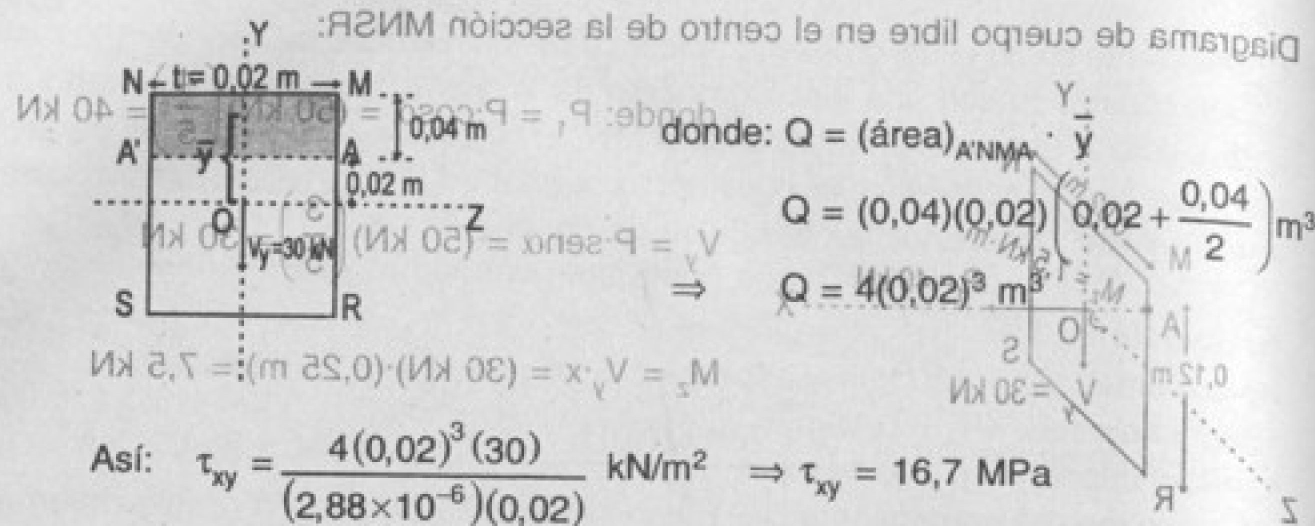


Por lo tanto tenemos:

$$\sigma_x = \frac{40\ \text{kN}}{2,4\times10^{-3}\ \text{m}^2} + \frac{(7,5\ \text{kN·m})(0,02\ \text{m})}{2,88\times10^{-6}\ \text{m}^4} \Rightarrow \sigma_x = 68,75\ \text{MPa}$$

La fuerza cortante V_y no genera esfuerzos normales, pero sí cortantes: donde:

$$\tau_{xy} = \frac{Q\cdot V_y}{I_z\cdot t}$$



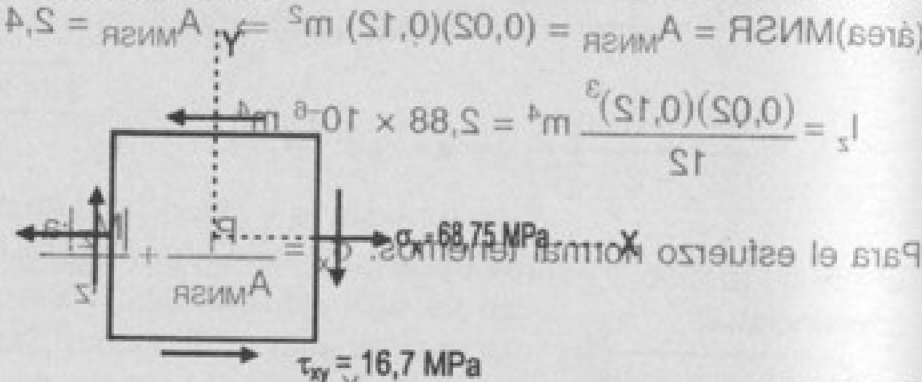
donde: $Q = (\text{área})_{A'NMA} \cdot \bar{y}$

$$Q = (0{,}04)(0{,}02)\left(0{,}02 + \frac{0{,}04}{2}\right) m^3$$

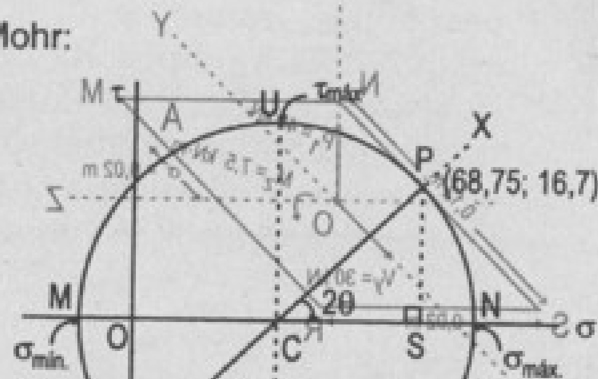
$$\Rightarrow \quad Q = 4(0{,}02)^3 \ m^3$$

Así: $\tau_{xy} = \dfrac{4(0{,}02)^3(30)}{(2{,}88 \times 10^{-6})(0{,}02)}$ kN/m² $\Rightarrow \tau_{xy} = 16{,}7$ MPa

Tenemos el siguiente diferencial:



En el círculo de Mohr:



donde $OC = \dfrac{68{,}75}{2} = 34{,}375$

Además: $UC = CP = \sqrt{(34{,}375)^2 + (16{,}7)^2} \Rightarrow UC = CP = 38{,}22$

También MC = CN = 38,22

Así: $\sigma_{máx} = ON = OC + CN = (34{,}375 + 38{,}22)$ MPa $\Rightarrow \sigma_{máx.} = 72{,}595$ MPa

$\therefore$ $\boxed{\sigma_{máx} = 72{,}8 \text{ MPa}}$

$\sigma_{mín} = -MO = OC - MC = (34{,}375 - 38{,}22)$ MPa $\Rightarrow \boxed{\sigma_{mín.} = -3{,}845 \text{ MPa}}$

$\tau_{máx} = UC \Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 38{,}22 \text{ MPa}}$

Para hallar el ángulo de desviación para los esfuerzos principales:

$$-\tan 2\theta = \frac{16{,}7}{34{,}375} \quad \text{donde:} \quad \boxed{\theta = -12{,}9°}$$

957. Dada la viga descrita en el problema 956, calcule las componentes de esfuerzo a lo largo del plano que forma con el eje neutro un ángulo de 30° y que pasa por B. Suponer, para esto, que x = 300 mm y que B está 20 mm abajo del eje neutro. Mostrar sus resultados gráficamente sobre un elemento diferencial.

Resolución:

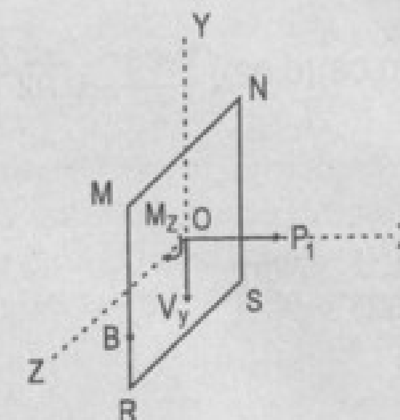
El problema es parecido, para ello: x = 300 mm = 0,3 m y el punto donde han de hallarse los esfuerzos está a 20 mm debajo de la línea neutra.

Así: $P_1 = P \cdot \cos\alpha = (50 \text{ kN})\left(\frac{4}{5}\right) = 40$ kN

$$V_y = P \cdot \text{sen}\alpha = (50 \text{ kN})\left(\frac{3}{5}\right) = 30 \text{ kN}$$

$$M_z = V_y \cdot x = (30 \text{ kN})(0{,}3 \text{ m}) = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

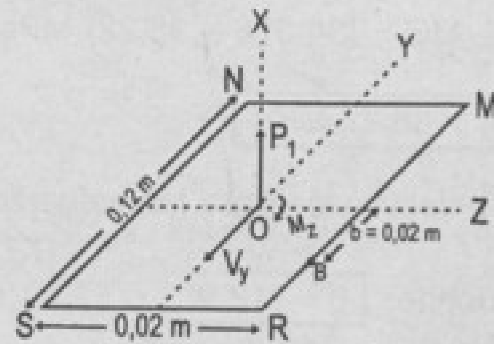
Diagrama de cuerpo libre de la sección MNSR:



donde: $A_{MNSR} = 2,4 \times 10^{-3}\ m^2 \wedge I_z = 2,88 \times 10^{-6}\ m^4$

Para el esfuerzo normal tenemos: $\sigma_x = \dfrac{P_1}{A_{MNSR}} + \dfrac{|M_Z|b}{I_Z}$

donde:

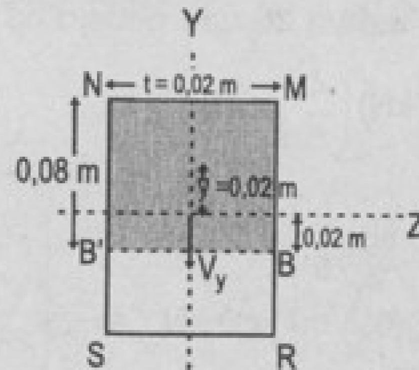


Así:

$$\sigma_x = \frac{40\ kN}{2,4\times10^{-3}\ m^2} + \frac{(9\ kN\cdot m)(0,02\ m)}{2,88\times10^{-6}\ m^4} \Rightarrow \sigma_x = 79,17\ MPa \quad ...(1)$$

La fuerza cortante V_y genera el esfuerzo cortante: $\tau_{xy} = \dfrac{Q\cdot V_y}{I_z\cdot t}$

donde:



Entonces:

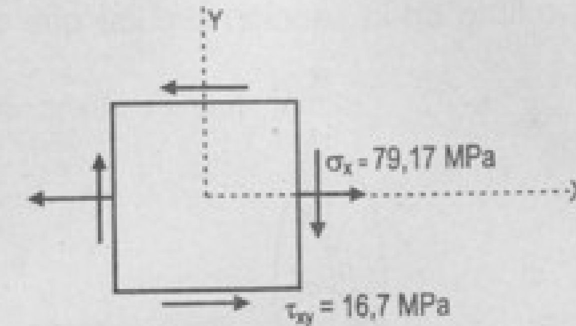
$$Q = (\text{área})_{BMNB'} \cdot \bar{y} = (0,08)(0,02)\left(\frac{0,08}{2} - 0,02\right) m^3$$

$$\Rightarrow Q = 4\cdot(0,02)^3\ m^3 \quad ...(2)$$

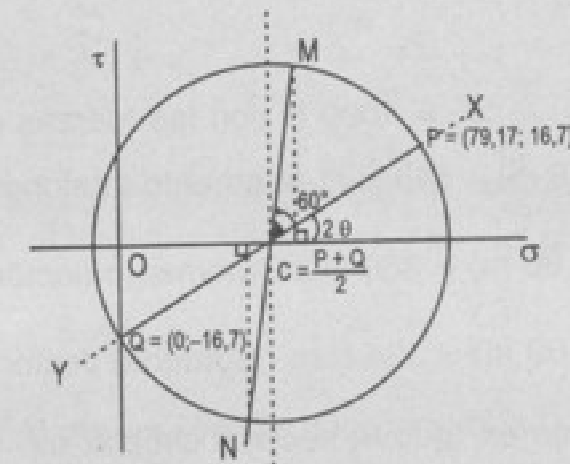
Así: $\tau_{xy} = \dfrac{4\times(0,02)^3(30)}{(2,88\times10^{-6})(0,02)}\ kN/m^2$

$$\tau_{xy} = 16,7\ MPa \quad ...(3)$$

El diferencial de esfuerzos es:



En el círculo de Mohr, hallamos los esfuerzos a 60° del eje X:



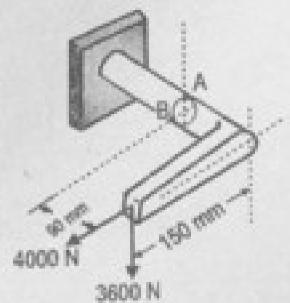
Del círculo $C = \dfrac{P+Q}{2} = \left(\dfrac{79,17}{2};\ 0\right)$, así: $\tan 2\theta = \dfrac{16,7}{79,17 - \dfrac{79,17}{2}} \Rightarrow 2\theta = 22,87°$

Los esfuerzos a 60° del eje X: [Y como OC = 39,585; además:

$CM = CP = \sqrt{\left(\dfrac{79,17}{2}\right)^2 + 16,7^2} = 42,96$]

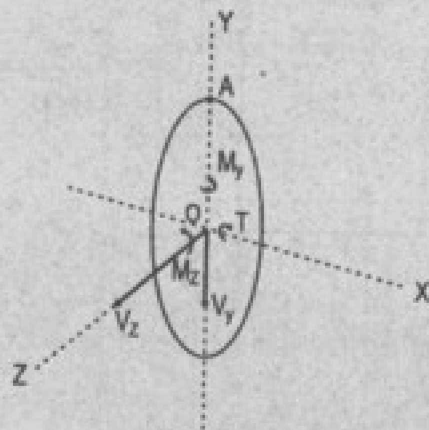
$$\sigma = OC + CM\cdot\cos(2\theta + 6\theta) \Rightarrow \sigma = (39,585 + (42,96)\cos(82,87°))\ MPa$$

958. Un soporte de 50 mm de diámetro, firmemente empotrado en un extremo, soporta en el otro unas cargas horizontal y vertical, como indica la figura. Calcular los esfuerzos resultantes máximos en el punto A de la fibra superior.



Resolución:

El diagrama de cuerpo libre en la sección circular que contiene al punto A:



donde: $V_y = 3600$ N $\wedge$ $V_z = 4000$ N son las fuerzas cortantes:

$T = (3600\ N)(0{,}15\ m) = 540\ N{\cdot}m$ (momento torsionante a lo largo del eje X)

$M_y = (4000\ N)(0{,}09\ m) = 360\ N{\cdot}m$ (momento flector a lo largo del eje Y)

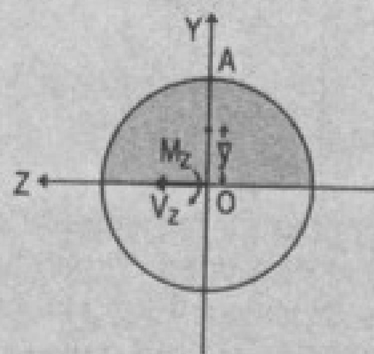
$M_z = (3600\ N)(0{,}09\ m) = 324\ N{\cdot}m$ (momento flector a lo largo del eje Z)

El esfuerzo torsionante en toda la sección circular es: $\tau = \dfrac{T.c}{J} = \dfrac{T.c}{\frac{\pi}{2}c^4} = \dfrac{2T}{\pi c^3}$

donde c: es el radio de la sección circular. $\tau = \dfrac{2(540\ Nm)}{\pi(0{,}025\ m)^3} = 22$ MPa ...(1)

Para nuestro problema vemos que la cortante y el momento que afecta al punto A son: V_z y M_z.

Del diagrama:



El esfuerzo normal en el punto A es causado por M_z: $\sigma_A = \dfrac{|M_z|c}{\frac{\pi}{4}.c^4} = \dfrac{4|M_z|}{\pi c^3}$

Entonces: $\sigma_A = \dfrac{4(324\ N{\cdot}m)}{\pi(0{,}025)^3\ m^3} = 26{,}4$ MPa ...(2)

La cortante V_z genera el esfuerzo torsor:

$$\tau_1 = \frac{Q{\cdot}V_z}{I.t} \quad ...(\alpha)$$

donde: $I = \dfrac{\pi}{4}c^4 \wedge t = 2c$

Además: Q = (área semicircunferencia) $\bar{y}$, es decir: $Q = (\text{área}_{\frown})\bar{y}$

También: $(\text{área}_{\frown}) = \dfrac{\pi}{2}c^2$

$$\bar{y} = \frac{4}{3\pi}c \text{ : (centroide de semicircunferencia)}$$

Entonces: $Q = \left(\dfrac{\pi}{2}c^2\right)\left(\dfrac{4}{3\pi}c\right) = \dfrac{2}{3}c^3$ ...(β)

Por lo tanto, el esfuerzo por torsión que genera la cortante V_z es:

$$\tau_1 = \frac{\left(\frac{2}{3}c^3\right)V_z}{\frac{\pi}{4}c^4{\cdot}(2c)} = \frac{4}{3\pi}.\frac{V_z}{c^2} \quad ...(\gamma)$$

Para los valores dados: $\tau_1 = \dfrac{4(4000\ N)}{3\pi(0{,}025\ m)^2} = 2{,}72$ MPa ...(3)

En conclusión, en el punto A los esfuerzos son:

$\sigma_A = 26{,}4$ MPa

$\tau_A = \tau + \tau_1 = (22 + 2{,}72)$ MPa $\Rightarrow \tau_A = 24{,}72$ MPa

Hallando el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{máx.} = \frac{\sigma_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^{\ 2}} = \left(\frac{26{,}4}{2} + \sqrt{\left(\frac{26{,}4}{2}\right)^2 + (24{,}72)^2}\right) \text{MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{máx.} = 41{,}2\ MN/m^2}$$

959. Repetir el problema anterior para el punto B.

Resolución:

Para el punto B, el esfuerzo τ es el mismo del problema anterior y solo es afectado por la cortante V_y y el momento flector M_y:

$$\sigma_B = \frac{|M_y|c}{\frac{\pi}{4}c^4} = \frac{4|M_y|}{\pi c^3} = \frac{4(360\ N\cdot m)}{\pi(0{,}025\ m)^3}$$

$$\Rightarrow \sigma_B = 29{,}34\ MPa \qquad ...(1)$$

Para el esfuerzo de torsión generado por V_y, Q es el mismo que el problema anterior:

$$\tau_2 = \frac{4V_y}{3\pi c^2} = \frac{4(3600\ N)}{3\pi(0{,}025\ m)^2} \Rightarrow \tau_2 = 2{,}44\ MPa \qquad ...(2)$$

Por lo tanto, en el punto B los esfuerzos son:

$\sigma_B = 29{,}34$ MPa y $\tau_B = \tau + \tau_2$

$$\Rightarrow \tau_B = (22 + 2{,}44)\ MPa = 24{,}4\ MPa$$

El esfuerzo máximo es:

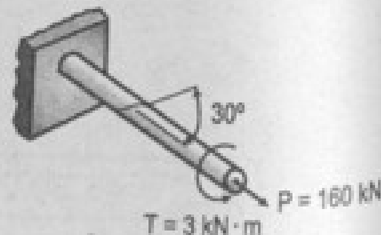
$$\sigma_{máx.} = \frac{\sigma_B}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_B}{2}\right)^2 + \tau_B^2}$$

$$\sigma_{máx.} = \left(\frac{29{,}34}{2} + \sqrt{\left(\frac{29{,}34}{2}\right)^2 + (24{,}44)^2}\right) MPa \quad \therefore \quad \boxed{\sigma_{máx.} = 43{,}17\ MPa}$$

Y $\tau_{máx.} = \sqrt{\left(\frac{29{,}34}{2}\right)^2 + (24{,}44)^2}$ MPa $\Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 28{,}5\ MPa} \Rightarrow \boxed{\sigma = 44{,}92\ MPa}$

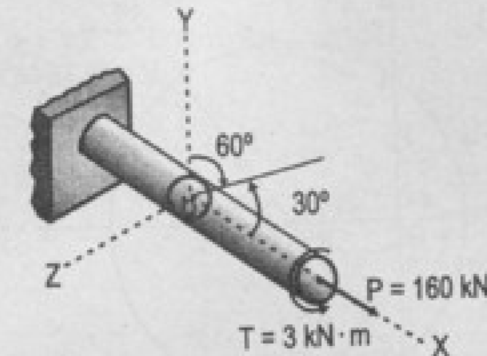
Además: $\tau = CM\ sen(60° + 2\theta) = (42{,}96)sen(82{,}87°)$ MPa $\Rightarrow \boxed{\tau = 42{,}63\ MPa}$

960. Un árbol de 100 mm de diámetro soporta una carga consistente en la fuerza P y el par T, como se muestra en la figura. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre el cordón de soldadura de forma helicoidal, que forma un ángulo de 30° con el eje del árbol.

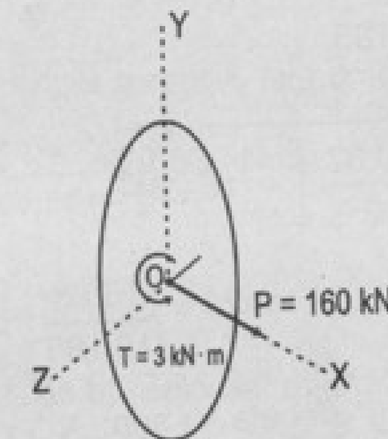


Resolución:

Del gráfico:



Haciendo el diagrama de cuerpo libre en una sección paralela:



La sección circular tiene radio igual a: r = 50 mm = 0,05 m

Y sus características geométricas:

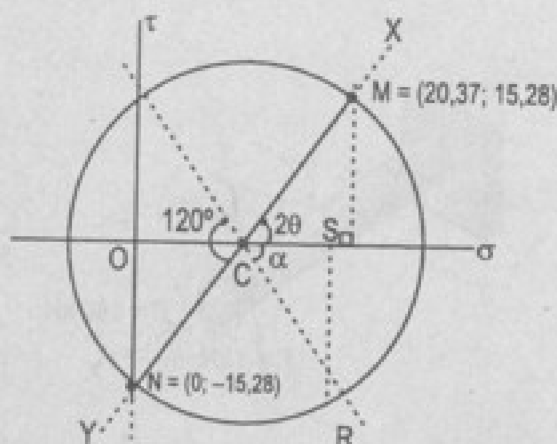
- Área = $A = \pi r^2 = \pi(0{,}05)^2\ m^2 \Rightarrow A = 7{,}85 \times 10^{-3}\ m^2$
- $J = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2}(0{,}05)^4\ m^4 \Rightarrow J = 9{,}81 \times 10^{-6}\ m^4$

El esfuerzo normal es causado solo por la fuerza axial P:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{160\ kN}{7{,}85\times10^{-3} m^2} \Rightarrow \sigma_x = 20{,}37\ MPa$$

El esfuerzo cortante es: $\tau_{xy} = \frac{T\cdot r}{J} = \frac{(3\ kN\cdot m)(0{,}05\ m)}{9{,}81\times10^{-6}\ m^4} \Rightarrow \tau_{xy} = 15{,}28\ MPa$

En el círculo de Mohr:



Donde: $OC = \dfrac{20{,}37}{2} = 10{,}185$

también: $CM = CR = \sqrt{\left(\dfrac{20{,}37}{2}\right)^2 + (15{,}28)^2}$

$\Rightarrow \quad CM = CR = 18{,}36 \;\; \text{y} \;\; \tan 2\theta = \dfrac{15{,}28}{10{,}185} \Rightarrow 2\theta = 56{,}31°$

Los esfuerzos a 60° (o 120° del eje Y) son:

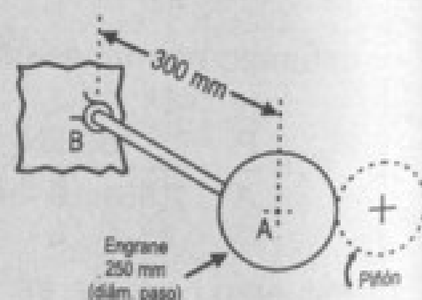
$\sigma = OS = OC + CS = OC + CR\cdot\cos\alpha = OC + CR\cos(120° - 2\theta)$

$\Rightarrow \sigma = (10{,}185 + 18{,}36\cos(120° - 56{,}31°))\ \text{MPa} \;\therefore\; \boxed{\sigma = 18{,}32\ \text{MPa}}$

$\tau = -SR = -CR\text{sen}(120° - 2\theta)$

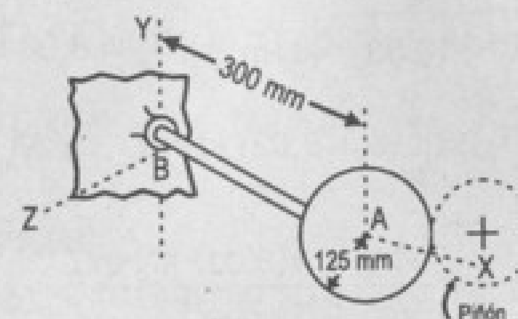
$\Rightarrow \tau = -(18{,}36\,\text{sen}(120° - 56{,}31°))\ \text{MPa} \Rightarrow \boxed{\tau = -16{,}5\ \text{MPa}}$

961. Un reductor de velocidad transmite una potencia de 20 kW. En cierta parte de dicho reductor, un piñón hace girar el engrane A del árbol AB a 6 r/s. Determinar el diámetro mínimo del árbol AB si $\tau_{máx.} \le 60\ MN/m^2$ y $\sigma_{máx.} \le 80\ MN/m^2$. Considere sólo esfuerzos por torsión y por flexión en el eje.



Resolución:

Del diagrama:



De los datos:

- Potencia que transmite el piñón: $\mathcal{P}$ = 20 kW = 20 kN·m/s
- Frecuencia de barra AB: $f = 6\ \dfrac{\text{rev.}}{\text{s}}$

Dicha potencia genera un par torsor T tal como:

$$T = \frac{\mathcal{P}}{2\pi f} = \frac{20\ \text{kN·m/s}}{(2\pi)(6\ \text{rev./s})} = 0{,}53\ \text{kN·m} \qquad \text{...(1)}$$

La fuerza F aplicada en A necesaria por la potencia transmitida por el piñón es:

F·d·f = $\mathcal{P}$; donde "d" es el radio del engranaje

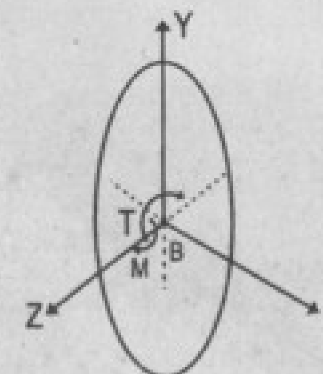
Entonces: $F(0{,}125\ \text{m})\left(6\ \dfrac{\text{rev.}}{\text{s}}\right) = 20\ \text{kN·m/s} \quad \Rightarrow F = 26{,}67\ \text{kN}$

Esta fuerza flectora genera momento flector a lo largo de la barra AB y alcanza un valor máximo en B:

$M = F(0{,}30\ \text{m}) = (26{,}67)(0{,}30)\ \text{kN·m}$

$M = 8\ \text{kN·m} \qquad \text{...(2)}$

Diagrama de una sección de la barra AB:



Los momentos equivalentes a torsión y a flexión en el punto B son:

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{8^2 + (0,53)^2}\ \text{kN·m} \Rightarrow T_e = 8,02\ \text{kN·m}$$

$$\text{Y:}\quad M_e = \frac{1}{2}(M + T_e) = \frac{1}{2}(8 + 8,02)\ \text{kN·m} \Rightarrow M_e = 8,01\ \text{kN·m}$$

El esfuerzo normal es: $\sigma = \dfrac{4M_e}{\pi r^3} = \dfrac{4(8,01)\ \text{kN·m}}{\pi r^3}$

Y por condición del problema: $\sigma = 80\ \text{MPa} = 80\ 000\ \dfrac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \dfrac{4(8,01)\ \text{kN·m}}{\pi r^3}$

$\Rightarrow\ r = 0,05032\ \text{m} = 50,32\ \text{mm}$ ...(3)

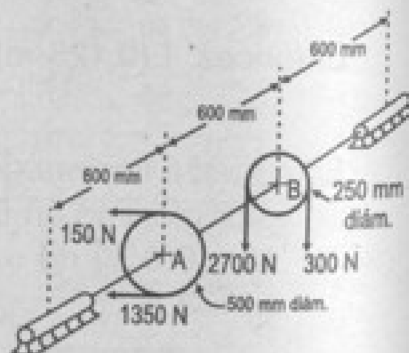
El esfuerzo cortante es: $\tau = \dfrac{2.T_e}{\pi r^3} = \dfrac{2(8,02)}{\pi r^3}\ \text{kN·m}$

Y por condición del problema $\tau = 60\ \text{MPa} = 60\ 000\ \dfrac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \dfrac{2(8,02)\text{kN·m}}{\pi \cdot r^3}$

$\Rightarrow\ r = 0,04398 = 43,98\ \text{mm}$ ...(4)

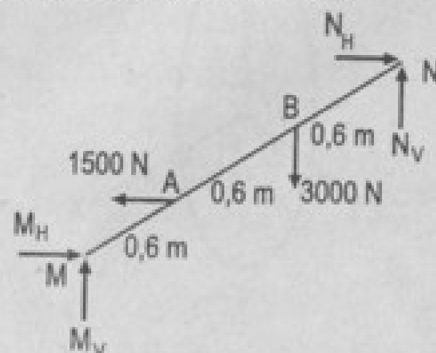
Eligiendo el mayor de los valores para el radio: $\boxed{r = 50,32\ \text{mm}}$ $\boxed{d = 100,64\ \text{mm}}$

962. Un eje de transmisión por correas de 50 mm de diámetro está sometido a las fuerzas indicadas en la figura. Las fuerzas sobre la polea A son horizontales y las de B son verticales. Calcular los esfuerzos resultantes normal y cortante máximos en el árbol.



Resolución:

El diagrama de cuerpo libre del sistema es:



Para las fuerzas horizontales:

$\Sigma M_N = 0 = 3(0,6)M_H - 2(0,6)(1500\ \text{N}) \Rightarrow M_H = 1000\ \text{N}$

Y como: $M_H + N_H = 1500\ \text{N} \Rightarrow N_H = 500\ \text{N}$

Para las fuerzas verticales:

$\Sigma M_N = 0 = 3(0,6)M_V - (0,6)(3000\ \text{N}) \Rightarrow M_V = 1000\ \text{N}$

Y como $= M_V + N_V = 3000\ \text{N} \Rightarrow N_V = 2000\ \text{N}$

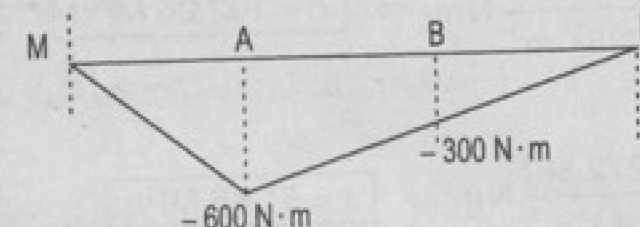
Las cargas aplicadas a cada disco producen tanta torsión como flexión; siendo la torsión constante a lo largo de la sección AB del eje que tiene un diámetro de 50 mm. Así:

$$T = (1350 - 150) \times \left(\frac{0,5}{2}\right)\ \text{N·m} = 300\ \text{N·m}$$

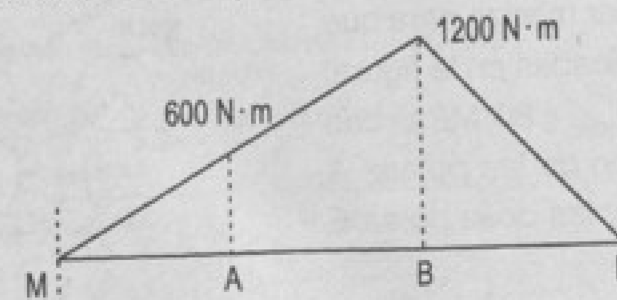
que es igual a: $T = (2700 - 300)\left(\dfrac{0,25}{2}\right)\text{N·m} = 300\ \text{N·m}$

Graficando los momentos flectores tanto del plano horizontal como vertical en el diagrama de área de momentos:

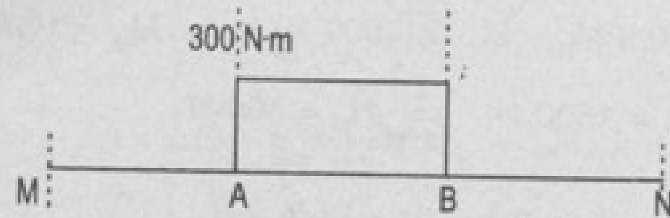
- Momentos flexionantes en el plan horizontal:



- Momento flexionantes en el plano vertical:



- Momentos torsionantes:



Observamos que los momentos máximos se encuentran en el punto B, donde el momento máximo resultante es:

$$M_{máx.} = \sqrt{M_H^2 + M_y^2} \Rightarrow M_{máx.} = \sqrt{300^2 + 1200^2} = 1237 \text{ N·m}$$

donde: T = 300 N·m

Hallando los momentos equivalentes de torsión y flexión:

$$T_e = \sqrt{M_{máx.}^2 + T^2} = \sqrt{1237^2 + 300^2} \text{ N·m} \quad \Rightarrow \quad T_e = 1272{,}86 \text{ N·m}$$

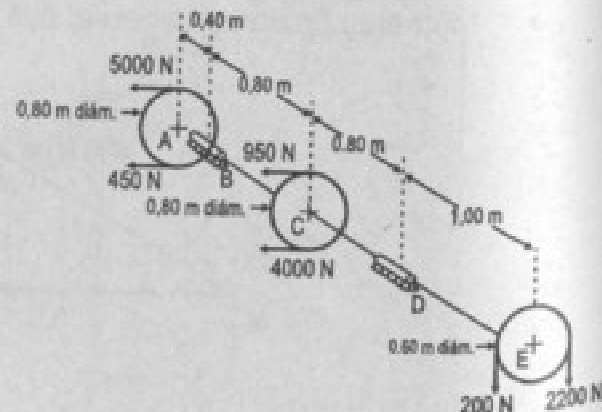
$$\text{Y como } M_e = \frac{1}{2}(M_{máx.} + T_e) = \frac{1}{2}(1237 + 1272{,}86) \text{ N·m} \Rightarrow M_e = 1254{,}93 \text{ N·m}$$

Así los esfuerzos máximos son:

$$\sigma = \frac{4M_e}{\pi r^3} = \frac{4 \times (1254{,}93)}{\pi (0{,}025)^3 \text{ m}^3} \text{ N·m} \Rightarrow \boxed{\sigma = 102{,}26 \text{ MPa}}$$

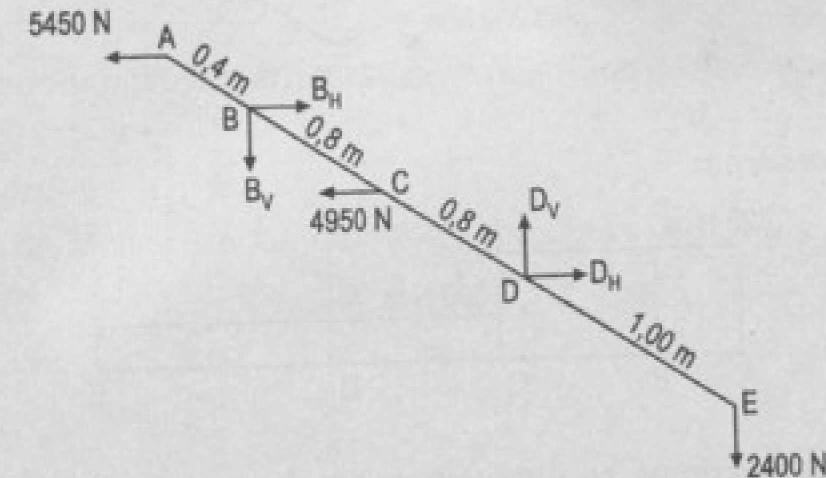
$$\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3} = \frac{2 \times (1272{,}86)}{\pi (0{,}025)^3 \text{ m}^3} \text{ N·m} \Rightarrow \boxed{\tau = 51{,}86 \text{ MPa}}$$

963. Diseñar un árbol circular macizo para que soporte las cargas indicadas en la figura, si $\tau_{máx.} \leq 60$ MPa y $\sigma_{máx.} \leq 80$ MPa. Las correas de transmisión de las poleas A y C son horizontales y las de la polea E son verticales.



Resolución:

El diagrama de cuerpo libre del sistema es:



Plano horizontal:

$$\Sigma M_B = 0 = 2(0{,}8)\,D_H - (0{,}8)(4950) + (0{,}4)(5450) \Rightarrow \quad D_H = 1112{,}5 \text{ N}$$

y como: $B_H + D_H = 5450 \text{ N} + 4950 \text{ N} \Rightarrow B_H = 9287{,}5$ N

Plano vertical:

$$\Sigma M_B = 0 = 2(0{,}8)D_V - (2{,}6)(2400 \text{ N}) \Rightarrow D_V = 3900 \text{ N}$$

y como: $D_v = B_v + 2400 \text{ N} \Rightarrow B_v = 1500$ N

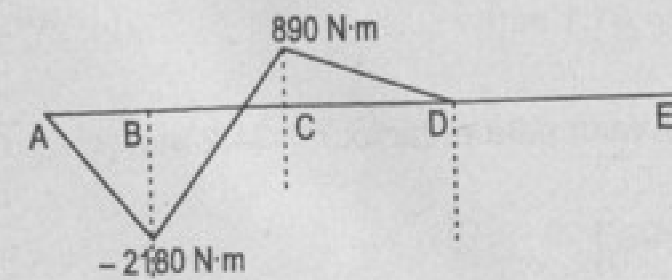
El momento torsor es:

$$\text{Tramo ABC: } T_1 = (5000 - 450)\left(\frac{0{,}80}{2}\right) \text{N·m} \quad \Rightarrow T_1 = 1820 \text{ N·m}$$

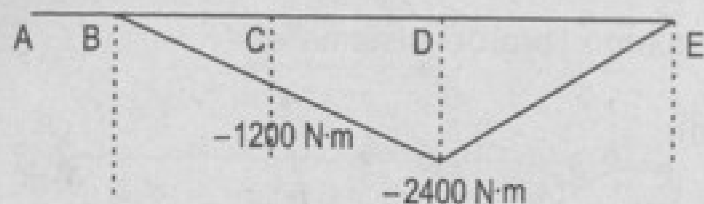
$$\text{Tramo CDE: } T_2 = 1820 \text{ N·m} - (4000 - 950)\left(\frac{0{,}80}{2}\right) \text{N·m} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 600 \text{ N·m}$$

Graficando el área de momentos:

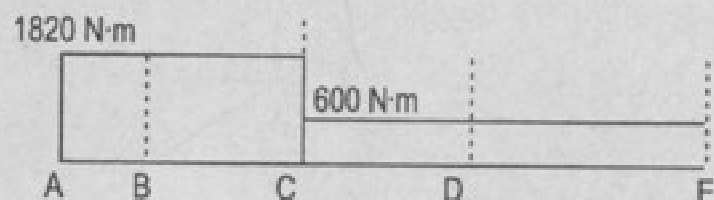
Momentos flexionantes en el plano horizontal:



Momentos flexionantes en el plano vertical.



Momentos torsores:



Los momentos máximos se encuentran en el punto B, así:
M = 2180 N·m y T = 1820 N·m

Los momentos equivalentes son:

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{2180^2 + 1820^2}\ \text{N·m} \Rightarrow T_e = 2840\ \text{N·m}$$

$$M_e = \frac{1}{2}(M + T_e) = \frac{1}{2}(2180 + 2840)\ \text{N·m} \Rightarrow M_e = 2510\ \text{N·m}$$

Por los datos del problema: $\sigma \leq 80$ MPa y $\tau \leq 60$ MPa

Sea "r" el radio del eje:

$$\sigma = \frac{4M_e}{\pi r^3} = \frac{4(2510\ \text{N·m})}{\pi r^3}\text{N·m} = 80\ 000\ 000\ \text{N/m}^2$$

$\Rightarrow$ r = 0,0342 m = 34,2 mm ...(1)

$$\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3} = \frac{2(2840\ \text{N·m})}{\pi r^3} = 60\ 000\ 000\ \text{N/m}^2$$

$\Rightarrow$ r = 0,0311 m = 31,1 mm ...(2)

Eligiendo el mayor valor para el radio: r = 34,2 mm o **d = 68,4 mm**

964. Problema ilustrativo.

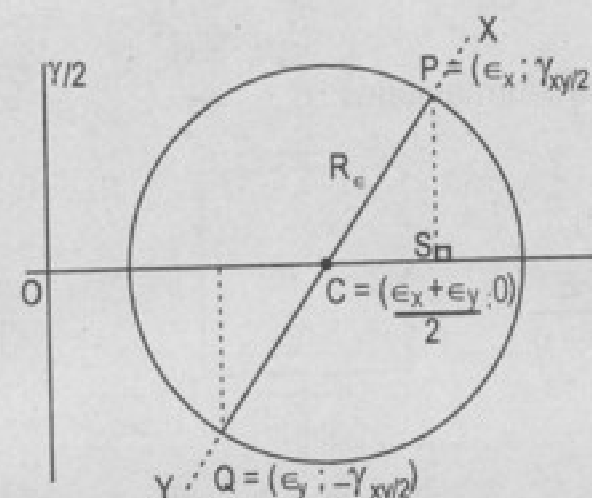
965. Demostrar que las ecuaciones: $R_\sigma = R_\epsilon \dfrac{E}{1+\upsilon}$ ...(9-17)

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{1-\upsilon} \quad ...(9\text{-}18)$$

transforman un círculo de deformaciones en uno de esfuerzos.

Resolución:

El círculo de Mohr para las deformaciones biaxiales: ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}:



Donde: $CS = \dfrac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \wedge PS = \dfrac{1}{2}\gamma_{xy}$ y como: $R_\epsilon^2 = CS^2 + PS^2$

El radio del círculo de deformaciones es:

$$R_\epsilon^2 = \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 \quad ...(\alpha)$$

La distancia del origen de coordenadas al centro del círculo de deformaciones

es: $(OC)_\epsilon = \dfrac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ ...(β)

De acuerdo a la ley de Hooke para el esfuerzo biaxial es:

$$\sigma_x = E\frac{(\epsilon_x + \upsilon\epsilon_y)}{1-\upsilon^2} \quad ...(1)$$

$$\sigma_y = E\frac{(V\epsilon_x + \epsilon_y)}{(1-\upsilon^2)} \quad ...(2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy} \quad ...(3)$$

(Donde E: módulo de elasticidad, υ: coeficiente de Poisson)

Resolviendo (1), (2) y (3) se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \upsilon\sigma_y}{E} \qquad \text{...(1)'}$$

$$\epsilon_y = \frac{-\upsilon\sigma_x + \sigma_y}{E} \qquad \text{...(2)'}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\tau_{xy} \qquad \text{...(3)'}$$

De acuerdo a las transformaciones:

$$R_\sigma = R_\epsilon \frac{E}{1+\upsilon} \qquad \text{...(9-17)}$$

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{1-\upsilon} \qquad \text{...(9-18)}$$

En (9-17):

$$R_\sigma^2 = R_\epsilon^2 \frac{E^2}{(1+\upsilon)^2}, \text{ por } (\alpha)\text{: } R_\sigma^2 = \left[\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2\right] . \frac{E^2}{(1+\upsilon)^2}$$

De (1)', (2)' y (3)':

$$R_\sigma^2 = \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2}\frac{(1+\upsilon)^2}{E^2} + \frac{(1+\upsilon)^2}{E^2}\tau_{xy}^2\right] . \frac{E^2}{(1+\upsilon)^2} \quad \text{o}$$

$$R_\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy}^2} \qquad \text{...(I)}$$

En (9-18): (por (β), (1)', (2)')

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon . \frac{E}{(1-\upsilon)} = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right) \times \frac{E}{(1-\upsilon)}$$

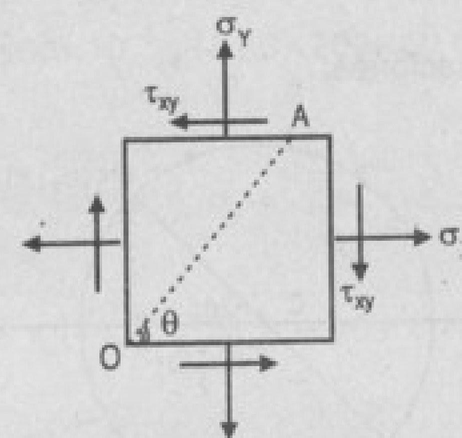
$$(OC)_\sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\frac{(1-\upsilon)}{E} \times \frac{E}{(1-\upsilon)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \text{...(II)}$$

De (I) y (II): R_σ y $(OC)_\sigma$ son respectivamente el radio y la distancia del centro de coordenadas al del círculo de esfuerzos de Mohr.

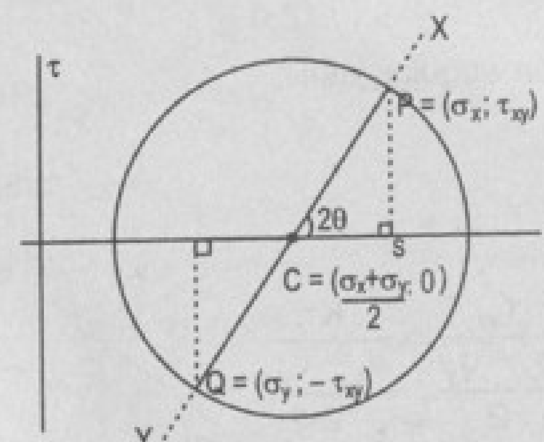
966. Partiendo de un elemento sometido únicamente a esfuerzos principales, comprobar que la desviación angular de un elemento lineal, tal como OA de la figura, es igual a la mitad de la distorsión γ_{ab}.

Resolución:

Para el diferencial de esfuerzos:



En el círculo de Mohr:



Por la ley de Hooke para los esfuerzos biaxiales:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_x + \upsilon\epsilon_y) \ \wedge \ \sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \qquad \text{...(1)}$$

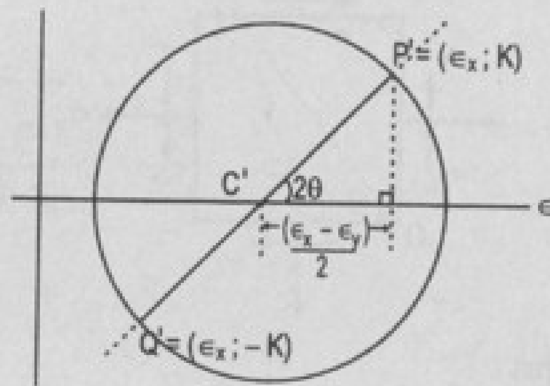
Donde:

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{E}{1-\upsilon}\left(\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2}\right) \qquad ...(2)$$

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right) \qquad ...(3)$$

Además: $\tan 2\theta = \dfrac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}$ ...(α)

En el círculo de deformaciones:



Siendo K la desviación angular, así:

$$\tan 2\theta = \frac{K}{\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}} \qquad ...(\beta)$$

Igualando (α) y (β): $\dfrac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}=\dfrac{K}{\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}}$

De (1), (2) y (3): $\dfrac{\dfrac{E}{1+\upsilon}\left(\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\right)}{\dfrac{E}{1+\upsilon}\left(\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)}=\dfrac{K}{\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}}$

Simplificando $K=\dfrac{\gamma_{xy}}{2}$; como las variables son mudas: $\boxed{K=\dfrac{\gamma_{ab}}{2}}$

967. Un estado de deformación está determinado por $\epsilon_x = -400 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 800 \times 10^{-6}$. Si E = 200 GPa y v = 0,30; calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, así como las componentes del esfuerzo en un elemento a + 40° del eje X.

Resolución:

Por la ley de Hooke:

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_x+\upsilon\epsilon_y)$$

$$\sigma_x=\frac{200\text{ GPa}}{(1-0{,}30^2)}\left(-400\times10^{-6}+(0{,}30)(200\times10^{-6})\right)$$

Así: $\sigma_x = -74{,}725$ MPa, también: $\sigma_y=\dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_x+\epsilon_y)$

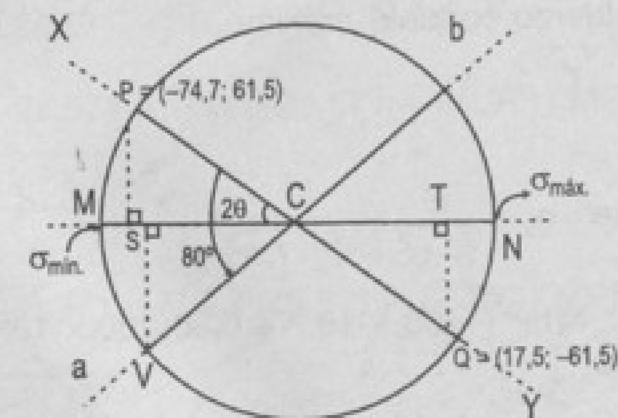
o $\sigma_y=\dfrac{200\text{ GPa}}{(1-0{,}3^2)}(0{,}3\times(-400\times10^{-6})+200\times10^{-6}) \Rightarrow \sigma_y = 17{,}582$ MPa;

Además:

$$\tau_{xy}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \Rightarrow \tau_{xy}=\frac{200\text{ GPa}}{(1+0{,}3)}\left(\frac{800}{2}\times10^{-6}\right)$$

$\tau_{xy} = 61{,}538$ MPa

En el círculo de Mohr:



donde: $C=\left(\dfrac{17{,}5-74{,}725}{2};\ 0\right) \Rightarrow C=(-28{,}61;\ 0)$

Además: $PC = CQ = \sqrt{(17{,}5+28{,}61)^2+(61{,}5)^2}$

$PC = CQ = MC = CN = 76{,}945$

Del gráfico:

$\sigma_{máx.} = (-28{,}61 + 76{,}945)$ MPa ; $\sigma_{máx.} = 48{,}335$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx.} = 48{,}3 \text{ MPa}}$

Y

$\sigma_{mín.} = (-28{,}61 - 76{,}945)$MPa ; $\sigma_{mín.} = -105{,}555$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{mín.} = -106 \text{ MPa}}$

$\boxed{\tau_{máx.} = 76{,}945 \text{ MPa}}$

Los esfuerzos a 40° del eje X son:

Como SC = CV cos(80° – 2θ), pero $\tan 2\theta = \dfrac{61{,}538}{46{,}112} \Rightarrow 2\theta = 53{,}15°$

Luego: SC = (76,945)cos(80° – 53,15°) $\Rightarrow$ SC = 68,652

Así: $\sigma = -28{,}61 - SC = -28{,}61 - 68{,}652$

$\Rightarrow \sigma = -97{,}26$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma = -97{,}3 \text{ MPa}}$

Para el esfuerzo cortante:

$\tau = -SV = -CV\text{sen}(80° - 2\theta) \Rightarrow \tau = -(76{,}945)\text{sen}(80° - 53{,}15°)$

$\therefore$ $\boxed{\tau = -34{,}8 \text{ MPa}}$

968. Un estado de deformación está determinado por $\epsilon_x = -400 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -600 \times 10^{-6}$. Si $E = 200 \times 10^9$ N/m² y v = 0,30; determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo.

Resolución:

Por la ley de Hooke: $\sigma_x = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_x + \upsilon\epsilon_y)$

Así: $\sigma_x = \dfrac{200\times10^9}{(1-0{,}30^2)}$ N/m² $(-400 \times 10^{-6} + 0{,}30(200 \times 10^{-6}))$

$\Rightarrow \sigma_x = -74{,}725$ MPa

Así: $\sigma_y = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_x + \epsilon_y)$

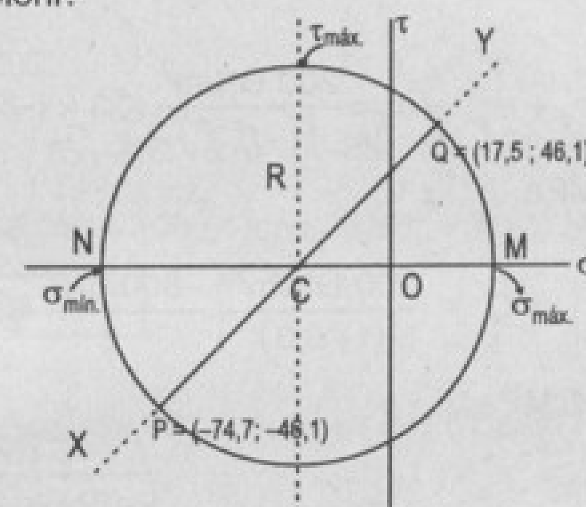
$\sigma_y = \dfrac{200\times10^9}{(1-0{,}30^2)}$ N/m² $(0{,}30(-400 \times 10^{-6}) + 200 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow \sigma_y = 17{,}582$ MPa

$\tau_{xy} = \dfrac{E}{1+\upsilon}\left(\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\right)$

$\tau_{xy} = \dfrac{200\times10^9}{(1-0{,}3)}$ N/m² $\left(\dfrac{-600\times10^{-6}}{2}\right) \Rightarrow T_{xy} = -46{,}154$ MPa

En el círculo de Mohr:



Donde: $C = \dfrac{1}{2}(P + Q)$, así C = (–28,571; 0)

El radio del círculo es: R = NC = CM = PC = CQ

$R = \sqrt{(17{,}5+28{,}57)^2+(46{,}1)^2} \Rightarrow R = 65{,}271$

Así: $\sigma_{máx.} = M = -28{,}571 + R = (-28{,}571 + 65{,}271)$ MPa

$\boxed{\sigma_{máx.} = 36{,}7 \text{ MPa}}$

Además:

$\sigma_{mín.} = N = -28{,}571 - R = (-28{,}571 - 65{,}271)$ MPa

$\boxed{\sigma_{mín.} = -93{,}842 \text{ MPa}}$

y $\tau_{máx.} = R \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{máx.} = 65{,}271 \text{ MPa}}$

969. Las componentes de la deformación en un punto son $\epsilon_x = -800 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -800 \times 10^{-6}$. Si E = 200 GN/m² y v = 0,30; determinar las componentes del esfuerzo en la cara cuya normal forma un ángulo de +20° con el eje X.

Resolución:

Por la ley de Hooke:

- $\sigma_x = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_x + \upsilon\epsilon_y) \Rightarrow \sigma_x = \dfrac{200\ GN/m^2}{(1-0{,}3^2)}\left(-800\times10^{-6} + (0{,}3)(200\times10^{-6})\right)$

  $\Rightarrow \sigma_x = -162{,}64$ MPa

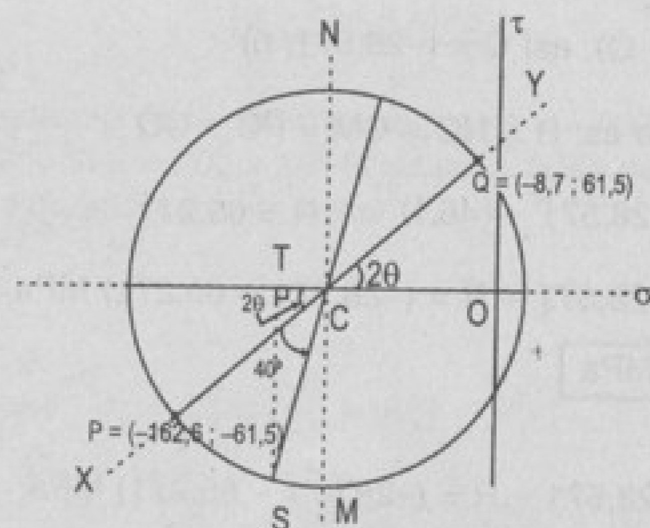
- $\sigma_y = \dfrac{E}{(1-\upsilon^2)}(\upsilon\epsilon_x + \epsilon_y) \Rightarrow \sigma_y = \dfrac{200\ GN/m^2}{(1-0{,}3^2)}(0{,}3\times(-800\times10^{-6}) + 200\times10^{-6})$

  $\Rightarrow \sigma_y = -8{,}79$ MPa

- $\tau_{xy} = \dfrac{E}{1+\upsilon}\left(\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\right) \Rightarrow \tau_{xy} = \dfrac{200\ GN/m^2}{(1+0{,}3)}\left(\dfrac{-800\times10^{-6}}{2}\right)$

  $\Rightarrow \tau_{xy} = -61{,}54$ MPa

En el círculo de Mohr:



Donde: $C = \dfrac{1}{2}(P + Q) \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}(-162{,}64 - 8{,}79;\ 61{,}54 - 61{,}54)$

$\Rightarrow C = (-85{,}715;\ 0)$ ...(α)

Luego: $\tan 2\theta = \dfrac{61{,}54}{-8{,}79-(-85{,}715)} \Rightarrow \tan 2\theta = \dfrac{61{,}54}{76{,}925}$

$\Rightarrow 2\theta = 38{,}66°$ ...(β)

El radio de la circunferencia es:

$$CQ = PC = \sqrt{(-8{,}79+85{,}715)^2 + (61{,}54)^2}$$

$\Rightarrow CQ = PC = 98{,}51$ ...(γ)

Los esfuerzos a + 20° del eje X es: (40° en el círculo de Mohr)

En el triángulo STC:

$\sigma = -85{,}715 - TC \Rightarrow \sigma = (-85{,}715 - SC\cos(2\theta + 40°))$

$\sigma = (-85{,}715 - (98{,}51)\cos(38{,}66° + 40°))$ MPa

$\Rightarrow \boxed{\sigma = -105\ MPa}$

Además: $\tau = -SC\text{sen}(38{,}66° + 40°) = -(98{,}51)\text{sen}(78{,}66°)$ MPa

$\boxed{\tau = -96{,}6\ MPa}$

970. Comprobar que para la roseta a 60°, son correctas las expresiones:

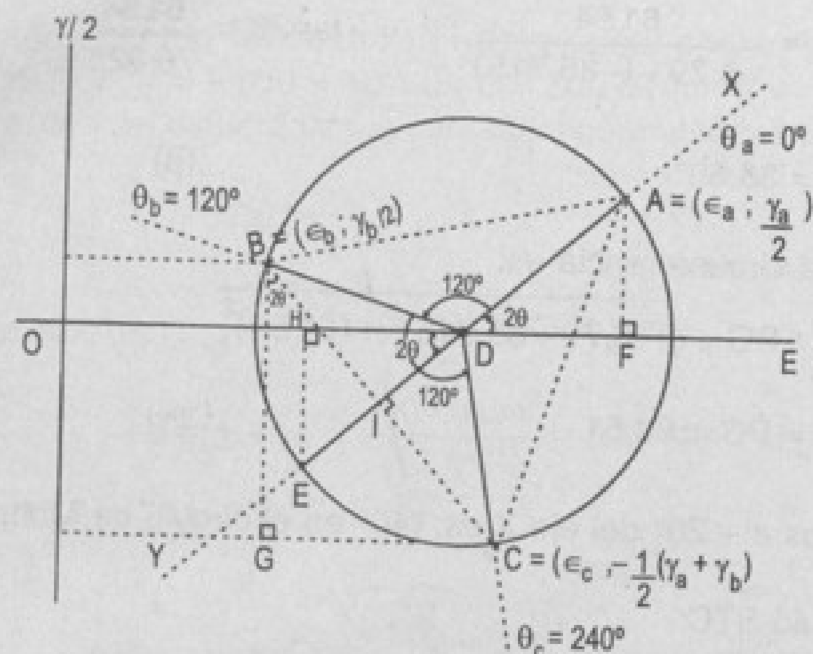
$\epsilon_x = \epsilon_a$

$\epsilon_y = \dfrac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a)$

$\dfrac{1}{2}\gamma_{xy} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b)$

Resolución:

Al medir las tres deformaciones ϵ_a, ϵ_b y ϵ_c, donde $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 120°$ y $\epsilon_c = 240°$; en el círculo de Mohr tenemos la roseta de deformación:



Al unir los puntos A, B y C se forma un triángulo equilátero. Si el radio de la circunferencia vale R el lado del triángulo equilátero vale $\sqrt{3}$ R.

El centro de la circunferencia es:

$$D = \frac{1}{3}(A + B + C) \Rightarrow D = \left(\frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c);\ 0\right)$$

Es decir: $OD = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c)$ ...(1)

Por propiedades geométricas:

$\measuredangle DIC = 90°$ ...(2)

Si: $\measuredangle ADF = 2\theta \Rightarrow \measuredangle HDE = \measuredangle CBG = 2\theta$ ...(3)

Así: Δ DHE es semejante al Δ BGC, por lo tanto: $\frac{HE}{GC} = \frac{DE}{BC}$ ...(4)

y como: $GC = \epsilon_c - \epsilon_b$ ...(5)

$DE = R$ ...(6)

$BC = \sqrt{3}R$ ...(7)

(5), (6), (7) en (4): $\overline{HE} = \frac{\epsilon_c - \epsilon_b}{\sqrt{3}}$ ...(8)

Pero como: Δ DHE = Δ ADF ⇒ HE = AF, siendo $AF = \frac{1}{2}(\gamma_a) = \frac{1}{2}(\gamma_{xy})$

Por lo tanto: $\boxed{\frac{1}{2}(\gamma_{xy}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b)}$

Además tenemos:

$OF = OD + DF$ ...(α)

y $OH = OD - HD$ ...(β)

Por la igualdad de triángulos: HD = DF ...(θ)

Sumando (α) con (β) y por (θ):

$OH + OF = 2OD$ ...(φ)

Así: $OH + \epsilon_a = \frac{2}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c)$ o $OH = \frac{1}{3}(-\epsilon_a + 2\epsilon_b + 2\epsilon_c)$

Siendo $OH = \epsilon_y$, tenemos: $\boxed{\epsilon_y = \frac{1}{3}(-\epsilon_a + 2\epsilon_b + 2\epsilon_c)}$

Por simple inspección: $\boxed{\epsilon_x = \epsilon_a}$

971. Demostrar que, para la roseta a 60°, las deformaciones principales son:

$$\epsilon_{\substack{máx.\\mín.}} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$$

y la dirección de la deformación principal máxima queda definida por:

$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_b - \epsilon_c)}{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c}$, en donde los valores positivos de θ se miden en sentido contrario al del reloj, a partir de ϵ_a.

Resolución:

El valor del radio del círculo de Mohr en el problema anterior es:

$R^2 = DF^2 + AF^2$ ...(1)

Pero $DF = OF - OD \Rightarrow DF = \epsilon_a - \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c)$

$\Rightarrow DF = \frac{1}{3}(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)$ ...(2)

y como $AF = \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b)$ ...(3)

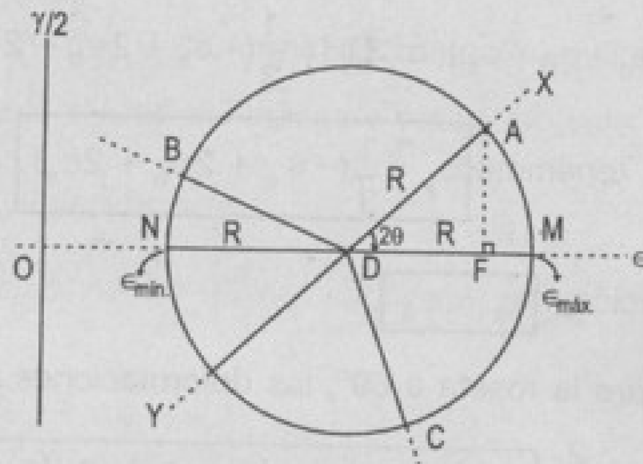
(2) y (3) en (1): $R^2 = \frac{1}{3^2}(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}^2}(\epsilon_c - \epsilon_b)^2$

Operando y factorizando:

$$R^2 = \frac{4}{9}(\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a))$$

o $R = \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$ ...(4)

Vemos en el círculo de Mohr:



Donde: $\epsilon_{máx.} = OM = OD + DM \Rightarrow \epsilon_{máx.} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + R$

$$\Rightarrow \epsilon_{máx.} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_o)}$$

Además: $\epsilon_{mín.} = ON = OD - ND \Rightarrow \epsilon_{mín.} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) - R$

$$\epsilon_{mín.} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) - \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$$

El valor de la dirección medido hacia abajo es:

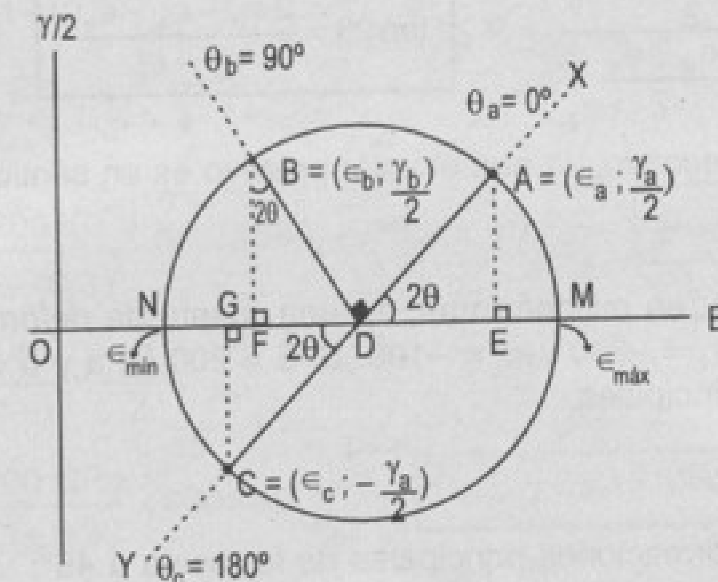
$$\tan 2\theta = -\frac{AF}{DF} \Rightarrow \tan 2\theta = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b)}{\frac{1}{3}(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)}$$

Simplificando: $\boxed{\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_b - \epsilon_c)}{(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)}}$

972. Demostrar que en la roseta a 45°, las deformaciones principales vienen dadas por: $\epsilon_{\substack{máx.\\mín.}} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$ y la dirección de la deformación principal máxima, por: $\tan 2\theta = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c - 2\epsilon_b}{\epsilon_a - \epsilon_c}$

Resolución:

La roseta de deformaciones de 45° en el círculo de Mohr es:



El valor del radio es (en el triángulo DAE): $R^2 = DE^2 + AE^2$

Y como: $DE = \frac{\epsilon_a - \epsilon_c}{2} \wedge AE = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \epsilon_b$

Así: $R^2 = \left(\frac{\epsilon_a - \epsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \epsilon_b\right)^2$

Operando y agrupando convenientemente:

$$R^2 = \frac{1}{2}((\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2) \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$$

En el círculo de Mohr:

$$\epsilon_{máx.} = OM = OD + R$$

$$\epsilon_{máx.} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$$

También: $\epsilon_{mín.} = ON = OD - R$

$$\epsilon_{mín.} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$$

Vemos también que la desviación angular del eje X al eje de la deformación principal: $\tan 2\theta = -\dfrac{AE}{DE}$

Así: $\tan 2\theta = -\dfrac{\dfrac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \epsilon_b}{\dfrac{\epsilon_a - \epsilon_c}{2}}$ o $\boxed{\tan 2\theta = \dfrac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c}}$

Nota: se toma negativo, ya que el valor positivo es en sentido de las agujas del reloj.

973. Las tres lecturas, en millonésimas, en una roseta de deformación a 45° han sido: $\epsilon_a = 400$, $\epsilon_b = -200$ y $\epsilon_c = -100$. Si E = 200 GPa y $\upsilon = 0{,}30$; determinar los esfuerzos principales.

Resolución:

Hallando las deformaciones principales de la roseta a 45°:

- $\epsilon_{máx.} = \dfrac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$$\epsilon_{máx.} = \frac{400 - 100}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(400 - (-200))^2 + (-200 - (-100))^2}$$

$\epsilon_{máx.} = 580 \times 10^{-6}$ ...(1)

- $\epsilon_{mín.} = -\dfrac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$$\epsilon_{mín.} = \frac{400 - 100}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(400 - (-200))^2 + (-200 - (-100))^2}$$

$\epsilon_{mín.} = -280 \times 10^{-6}$ ...(2)

- $\dfrac{1}{2}\gamma_{máx.} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$$\frac{1}{2}\gamma_{máx.} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(400 - (-200))^2 + (-200 - (-100))^2}$$

$\dfrac{1}{2}\gamma_{máx.} = 430 \times 10^{-6}$ ...(3)

Hallando los esfuerzos principales:

- $\sigma_{máx.} = \dfrac{E}{1 - \upsilon^2}(\epsilon_{máx.} + \upsilon\epsilon_{mín.})$

$\sigma_{máx.} = \dfrac{(200)GPa}{1 - (0{,}3)^2}(580 + (0{,}3)(-280)) \times 10^{-6} \Rightarrow \boxed{\sigma_{máx.} = 109 \text{ MPa}}$

- $\sigma_{mín.} = \dfrac{E}{1 - \upsilon^2}(\upsilon\epsilon_{máx.} + \epsilon_{mín.})$

$\sigma_{mín.} = \dfrac{(200)GPa}{1 - (0{,}3)^2}((0{,}3)(580) - 280) \times 10^{-6} \Rightarrow \boxed{\sigma_{mín.} = -23{,}3 \text{ MPa}}$

- $\tau_{máx.} = \dfrac{E}{1 + \upsilon} \times \dfrac{\gamma_{máx.}}{2}$

$\tau_{máx.} = \dfrac{200 \text{ GPa}}{1 + 0{,}3} \times 430 \times 10^{-6} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 66{,}15 \text{ MPa}}$

El ángulo de desviación es: $\tan 2\theta = \dfrac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c}$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2(-200) - 400 - (-100)}{400 - (-100)} \Rightarrow \tan 2\theta = -1{,}4$$

$$\Rightarrow 2\theta = -54{,}46° \Rightarrow \theta = -27{,}23° \Rightarrow \boxed{\theta = -27{,}2°}$$

974. Repetir el problema anterior, si $\epsilon_a = 300$, $\epsilon_b = 600$ y $\epsilon_c = 100$.

Resolución:

Hallando las deformaciones principales en la roseta a 45°:

- $\epsilon_{máx.} = \dfrac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$$\epsilon_{máx.} = \frac{300+100}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(300-600)^2 + (600-100)^2}$$

$$\epsilon_{máx.} = 612 \times 10^{-6}$$

- $\epsilon_{mín.} = \dfrac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$$\epsilon_{mín.} = \frac{300+100}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(300-600)^2 + (600-100)^2}$$

$$\epsilon_{mín.} = -212 \times 10^{-6}$$

- $\dfrac{1}{2}\gamma_{máx.} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$$\frac{1}{2}\gamma_{máx.} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(300-600)^2 + (600-100)^2}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{máx.} = 412 \times 10^{-6}$$

Hallando las esfuerzos principales:

- $\sigma_{máx.} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_{máx.} + \upsilon\epsilon_{mín.})$

$$\sigma_{máx.} = \frac{200\ \text{GPa}}{1-0{,}3^2}(612 + (0{,}3)(-212)) \times 10^{-6}$$

$$\boxed{\sigma_{máx.} = 120{,}5\ \text{MPa}} \qquad ...(1)$$

- $\sigma_{mín.} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_{máx.} + \epsilon_{mín.})$

$$\sigma_{mín.} = \frac{200\ \text{GPa}}{1-0{,}3^2}((0{,}3)(612) - 212) \times 10^{-6}$$

$$\boxed{\sigma_{mín.} = -6{,}2\ \text{MPa}} \qquad ...(2)$$

$$\tau_{máx.} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\gamma_{máx.}}{2}\right) \Rightarrow \tau_{máx.} = \frac{200\ \text{GPa}}{1+0{,}3}(412 \times 10^{-6})$$

$$\boxed{\tau_{máx.} = 63{,}4\ \text{MPa}} \qquad ...(3)$$

La desviación angular del eje X al eje de la deformación principal:

$$\tan 2\theta = \frac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2(600) - 300 - 100}{300 - 100}$$

Luego: $\tan 2\theta = 4 \Rightarrow 2\theta = 75{,}96° \Rightarrow \boxed{\theta = +37{,}98°}$

975. Las deformaciones, en millonésimas, medidas en una roseta a 60° han sido: $\epsilon_a = 300$, $\epsilon_b = 400$ y $\epsilon_c = 100$. Con E = 200 GN/m² y v = 0,30; calcular el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos principales.
Nota: para que salga la respuesta $\epsilon_b = -400 \times 10^{-6}$

Resolución:

En la roseta a 60° las deformaciones máximas son: (Ver problema 971)

- $\epsilon_{máx.} = \dfrac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + \dfrac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$$\epsilon_{máx.} = \left(\frac{1}{3}(300 - 400 + 100) + \frac{2}{3}\sqrt{300(300+400) - 400(-400-100) + 100(100-300)}\right) \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_{máx.} = 416{,}3 \times 10^{-6}$$

- $\epsilon_{mín.} = \dfrac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) - \dfrac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$$\epsilon_{mín.} = \left(\frac{1}{3}(300 - 400 + 100) - \frac{2}{3}\sqrt{300(300+400) - 400(-400-100) + 100(100-300)}\right) \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_{mín.} = -\ 416{,}3 \times 10^{-6}$$

- $\dfrac{\gamma_{máx.}}{2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$$\frac{\gamma_{máx.}}{2} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{300(300+400) - 400(-400-100) + 100(100-300)}\right) \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{máx.}}{2} = 416{,}3 \times 10^{-6}$$

Hallando los esfuerzos principales:

- $\sigma_{máx.} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_{máx.} + \upsilon\epsilon_{mín.})$

$\sigma_{máx.} = \dfrac{200\ GPa}{1-0,3^2}(416,3 + 0,3(-416,3)) \times 10^{-6} \Rightarrow \boxed{\sigma_{máx.} = 64,1\ MPa}$

- $\sigma_{mín.} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon \cdot \epsilon_{máx.} + \epsilon_{mín.}) \Rightarrow \sigma_{mín.} = \dfrac{200\ GPa}{1-0,3^2}(0,3(416,3) - (416,3)) \times 10^{-6}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_{mín.} = -\ 64,1\ MPa}$

- $\tau_{máx.} = \dfrac{E}{1+\upsilon} \cdot \dfrac{\gamma_{máx.}}{2}$

$\tau_{máx.} = \dfrac{200\ MPa}{1+0,3} \cdot (416,3 \times 10^{-6}) \Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 64,1\ MPa}$

La desviación angular al eje principal es:

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_b - \epsilon_c)}{(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(-400-100)}{(2(300)-(-400)-100)}$$

$$\tan 2\theta = -\ 0,962 \Rightarrow 2\theta = -\ 43,898° \Rightarrow \theta = -21,95° \Rightarrow \boxed{\theta = -22°}$$

976. Una roseta a 60° aplicada en un punto de la envolvente de aluminio del fuselaje de un avión mide las siguientes deformaciones, en millonésimas:

$\epsilon_a = 200$, $\epsilon_b = 200$ y $\epsilon_c = 400$. Si E = 70 GPa y $\upsilon = \dfrac{1}{3}$, calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo.

Resolución:

Calculando las deformaciones principales:

- $\epsilon_{máx.} = \dfrac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + \dfrac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$\epsilon_{máx.} = \left(\dfrac{200+200+400}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{200(200-200)+200(200-400)+400(400-200)}\right) \times 10^{-6}$

$\epsilon_{máx.} = 400 \times 10^{-6}$

- $\epsilon_{mín.} = \left(\dfrac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}\right)$

$\epsilon_{mín.} = \left(\dfrac{200+200+400}{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{200(200-200)+200(200-400)+400(400-200)}\right) \times 10^{-6}$

$\epsilon_{mín.} = 133,3 \times 10^{-6}$

- $\dfrac{\gamma_{máx.}}{2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$\dfrac{\gamma_{máx.}}{2} = \left(\dfrac{2}{3}\sqrt{200(200-200)+200(200-400)+400(400-200)}\right) \times 10^{-6}$

$\dfrac{\gamma_{máx.}}{2} = 133,3 \times 10^{-6}$

Hallando los esfuerzos principales:

- $\sigma_{máx.} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_{máx.} + \upsilon\epsilon_{mín.}) \Rightarrow \sigma_{máx.} = \dfrac{70\ GPa}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}(400 + \dfrac{1}{3}(133,3)) \times 10^{-6}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_{máx.} = 35\ MPa}$

$\sigma_{mín.} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon \cdot \epsilon_{máx.} + \epsilon_{mín.}) \Rightarrow \sigma_{mín.} = \dfrac{70\ GPa}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}\left(\dfrac{1}{3}(400) + 133,3\right) \times 10^{-6}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_{mín.} = 7\ MPa}$.

- $\tau_{máx.} = \dfrac{E}{1+\upsilon}\left(\dfrac{\gamma_{máx.}}{2}\right) \Rightarrow \tau_{máx.} = \dfrac{70\ GPa}{1+\dfrac{1}{3}}(133,3 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 7\ MPa}$

977. Repetir el problema anterior con $\epsilon_a = -100$, $\epsilon_b = 200 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_c = -\ 400$.

Resolución:

Hallando las deformaciones principales:

$\epsilon_{máx.} = \dfrac{(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c)}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

- $\in_{máx.} \left(\frac{-100+200-400}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{-100(-100-200)+200(200-(-400)-400(-400-(-100))}\right)\times 10^{-6}$

$\in_{máx.} = 246{,}4 \times 10^{-6}$

- $\in_{mín.} = \frac{(\in_a + \in_b + \in_c)}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\in_a(\in_a - \in_b) + \in_b(\in_b - \in_c) + \in_c(\in_c - \in_a)}$

$\in_{mín.} = \left(\frac{-100+200-400}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{-100(-100-200)+200(200+400)-400(-400+100)}\right)\times 10^{-6}$

$\in_{mín.} = -\ 446{,}4 \times 10^{-6}$

- $\frac{\gamma_{máx.}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{\in_a(\in_a - \in_b) + \in_b(\in_b - \in_c) + \in_c(\in_c - \in_a)}$

$\frac{\gamma_{máx.}}{2} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{-100(-100-200)+200(200-(-400)-400(-400-(-100))}\right)\times 10^{-6}$

$\frac{\gamma_{máx.}}{2} = 346{,}4 \times 10^{-6}$

Hallando los esfuerzos principales:

- $\sigma_{máx.} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\in_{máx} + \upsilon \cdot \in_{mín})$

$\sigma_{máx.} = \frac{70\ GPa}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(246{,}4 + \frac{1}{3}(-446{,}4)\right)\times 10^{-6} \Rightarrow \boxed{\sigma_{máx.} = 7{,}7\ MPa}$

- $\sigma_{mín.} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon \cdot \in_{máx} + \in_{mín})$

$\sigma_{mín.} = \frac{70\ GPa}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(\frac{1}{3}\times(246{,}4) - 446{,}4\right)\times 10^{-6}$

$\sigma_{mín.} = -\ 28{,}69\ MPa \Rightarrow \boxed{\sigma_{mín.} = -\ 28{,}7\ MPa}$

- $\tau_{máx.} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\gamma_{máx.}}{2}\right)$

$\tau_{máx.} = \frac{70\ GPa}{1+\frac{1}{3}} \times 346{,}4 \times 10^{-6} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx.} = 18{,}19\ MPa}$

La desviación angular al eje principal:

$\tan 2\theta = \sqrt{3}\frac{(\in_b - \in_c)}{(2\in_a - \in_b - \in_c)}$

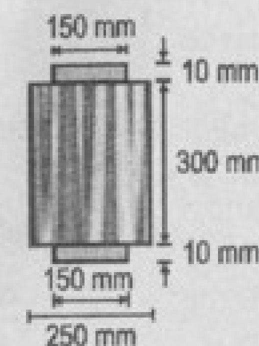
$\tan 2\theta = \sqrt{3}\frac{(200-(-400))}{(2(-100)-200-(-400))}$

$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(600)}{0} \Rightarrow 2\theta = 90° \quad \therefore \quad \boxed{\theta = 45°}$

CAPÍTULO 10

VIGAS REFORZADAS

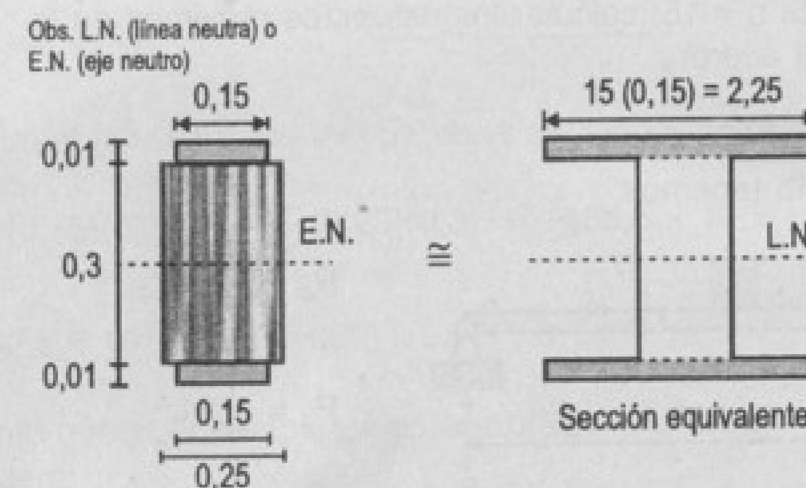
1001. Problema ilustrativo.



1002. Una viga de madera se refuerza con dos placas de acero firmemente sujetas a las caras superior e inferior, como se observa en la figura. Calcular el aumento de momento flexionante que puede resistir la viga, si n = 15 y los esfuerzos admisibles en el acero y en la madera son de 120 y 8 MPa, respectivamente.

Resolución:

Tenemos la sección transversal y su equivalente:



El eje neutro pasa por la mitad de la sección:

$\bar{y} = 0{,}32/2 = 0{,}16$ m ; $y' = 0{,}3/2 = 0{,}15$ m (sólo madera)

El momento de inercia de la sección equivalente y de la sección considerando solo la madera:

$$I = \frac{1}{12}(2{,}25)\,(0{,}32)^3 - \frac{1}{12}(2{,}0)(0{,}3)^3 = 1644 \times 10^{-6}$$

$$I' = \frac{1}{12}(0{,}25)\,(0{,}3)^3 = 562{,}5 \times 10^{-6}$$

El momento que puede soportar la sección en función del esfuerzo admisible de la madera:

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(8\times10^{6})(1644\times10^{-6})}{0,16} = 82,2 \text{ kN.m}$$

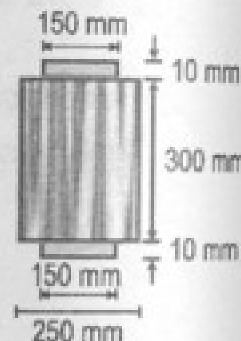
$$M' = \frac{\sigma I'}{y'} = \frac{(8\times10^{6})(562,5\times10^{-6})}{0,15} = 30 \text{ kN.m}$$

$\therefore$ incremento = M – M' = 82,2 – 30 ⇒ $\boxed{M - M' = 52,2 \text{ kN.m}}$

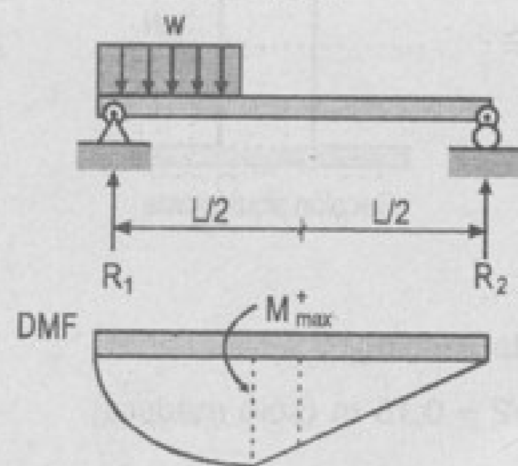
En la madera equivalente al acero, el esfuerzo máximo es:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{120}{15} = 8 \text{ MPa}$$

1003. Una viga simplemente apoyada de 4 m de longitud tiene la sección recta representada en la figura. Soporta una carga uniformemente repartida de 20 kN/m sobre la mitad central del tramo. Si n = 15, calcular los esfuerzos máximos en la madera y el acero.



Resolución:
Del equilibrio tenemos:



$$R_1 = \frac{3}{8}wL$$

$$R_2 = \frac{1}{8}wL$$

$$M^{+}_{máx} = \frac{9}{128}wL^2 = 22,5$$

Calculamos el esfuerzo para la sección equivalente, además:

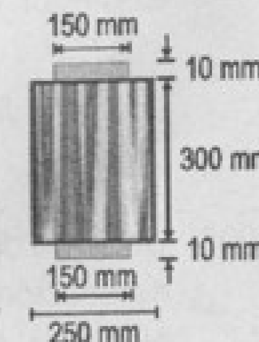
$I = 1644 \times 10^{-6}$; $y = 0,16$ m

$$\sigma_m = \frac{My}{I} = \frac{(22,5\times10^{3})(0,16)}{1644\times10^{-6}} = 2,2 \text{ MPa}$$

El esfuerzo máximo en el acero:

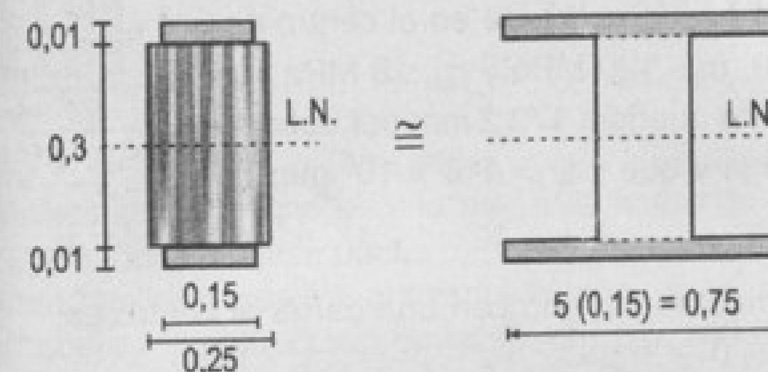
$\sigma_a = n\sigma_m = 15\,(2,2) = 33$ MPa $\therefore$ $\boxed{\sigma_m = 2,2 \text{ MPa y } \sigma_a = 33 \text{ MPa}}$

1004. Repetir el problema 1002 si los refuerzos son de aluminio, con un esfuerzo admisible de 80 MN/m² y n = 5.



Resolución:
Tenemos la sección equivalente:

$\sigma_m = 8$ MPa ; $\sigma_a = 80$ MPa ; n = 5



Calculamos el momento de inercia de la sección equivalente:

$$I = \frac{1}{12}(0,75)(0,32)^3 - \frac{1}{12}(0,25)(0,3)^3 = 1485,5 \times 10^{-6}$$

$I' = 562,5 \times 10^{-6}$ (ver P-1002)

El momento que puede soportar la sección en función del esfuerzo admisible de la madera:

$$M_m = \frac{\sigma_m I}{y} = \frac{(8\times10^{6})(1485,5\times10^{-6})}{0,16} = 74,3 \text{ kN.m}$$

$$M'_m = \frac{\sigma_m I'}{y'} = \frac{(8\times10^{6})(562,5\times10^{-6})}{0,15} = 30 \text{ kN.m}$$

En la madera equivalente al aluminio, el esfuerzo máximo es:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{80}{5} = 16 \text{ MPa}$$

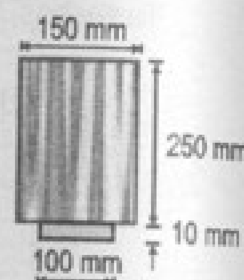
El momento correspondiente al esfuerzo admisible en el acero es:

$$M_a = \frac{(16\times10^6)(1485,5\times10^{-6})}{16} = 148,6$$

El menor valor de los dos obtenidos: $M_m = 74,3$ kN.m

Luego el incremento es: inc. = $M_m - M'_m = 74,3 - 30 = \boxed{44,3 \text{ MPa}}$

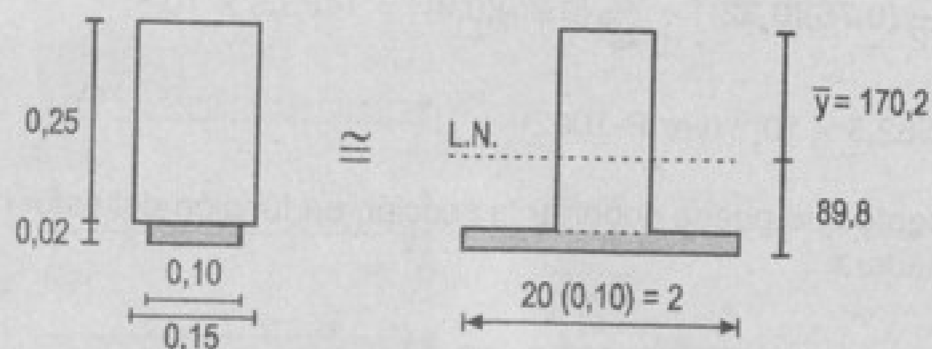
1005. Una viga de madera simplemente apoyada, de 150 × 250 mm de sección, se refuerza solamente en su parte inferior con placa de acero, como se indica en la figura. Calcular la carga concentrada que puede aplicarse en el centro de un tramo de 6 m si n = 20, $\sigma_a \leq 120$ MPa y $\sigma_m \leq 8$ MPa. Comprobar que la línea neutra queda a 170,2 mm por debajo del borde superior de la viga y que $I_{L.N.} = 416 \times 10^6$ mm^4.



Resolución:

Para un tramo simplemente apoyado con una carga al centro es:
M = PL/4 = 1,5P ; (L = 6 m)

Además tenemos la sección equivalente y n = 20; $\sigma_a \leq 120$; MPa $\sigma_m \leq 8$ MPa



Calculamos la ubicación de la línea neutra:

$$\bar{y} = \frac{2(0,26)(0,13) - 1,85(0,25)(0,125)}{2(0,26) - 1,85(0,25)}$$

$\bar{y} = 0,1702$ m = 170,2 mm

$$I = \frac{1}{3}(2)(0,26)^3 - \frac{1}{3}(1,85)(0,25)^3 - (2\times0,26 - 1,85\times0,25)(0,1702)^2 = 416\times10^{-6}$$

En la madera equivalente al acero, el esfuerzo máximo es:

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{120}{20} = 6 \text{ MPa}$$

El esfuerzo admisible en la madera:

$$\sigma_m = \frac{My}{I} = \frac{1,5P(0,1702)}{416\times10^{-6}} \leq 8\times10^6 \quad \therefore \; P \leq 13 \text{ kN}$$

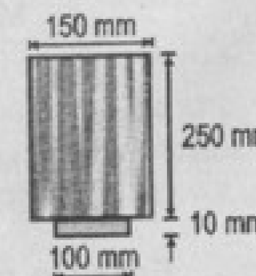
El esfuerzo correspondiente al esfuerzo admisible en el acero:

$$\sigma'_m = \frac{My'}{I} = \frac{1,5P(0,0898)}{416\times10^{-6}} \leq 6\times10^6$$

$P \leq 18,5$ kN

$\Rightarrow \boxed{P = 13 \text{ kN}}$

1006. Determinar el ancho b de la placa de acero de 10 mm con que ha de reforzarse por su parte inferior la viga de la figura, para que se alcancen, al mismo tiempo, en la madera y en el acero los esfuerzos admisibles de 8 y 120 MN/m^2, respectivamente.



Resolución:

Tenemos:

$$\sigma_m = 8 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma'_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{120}{20} = 6 \text{ MPa}$$

Además sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{My}{I} = 8 \\ \sigma'_m &= \frac{My'}{I} = 6 \end{aligned}\right\} y' = \frac{3}{4}y \quad \text{...(I)} \quad \text{También sabemos: } y' + y = 0,26 \quad \text{...(II)}$$

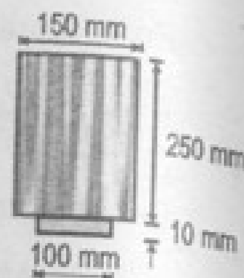
De (I) y (II): y = 0,1486 m ; y' = 0,1114 m

Calculamos b: de la geometría.

$$y = \frac{(20b)(0,26)(0,13) - (20b - 0,15)(0,25)(0,125)}{(20b)(0,26) - (20b - 0,15)(0,25)} = \frac{0,051b + 0,0046875}{0,2b + 0,0375} = 0,1486$$

b = 0,0416 m $\quad \therefore \; \boxed{b = 41,6 \text{ mm}}$

1007. Una viga simplemente apoyada sobre un tramo de 6 m soporta una carga uniformemente repartida de 4 kN/m. La sección recta está representada en la figura. Si n = 20, calcular los esfuerzos máximos en la madera y en el acero. (La carga incluye su peso propio).



Resolución:

El momento máximo para una viga simplemente apoyada con carga uniforme:

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{(4\times10^3)(6)^2}{8} = 18 \text{ kN.m}$$

Para la sección tenemos: y = 170,2 mm = 0,1702 m ; I = 416 × 10^{-6} mm^4

Calculamos el esfuerzo máximo en la madera:

$$\sigma_m = \frac{My}{I} = \frac{(18\times10^3)(0,1702)}{416\times10^{-6}} = 7,4 \text{ MPa}$$

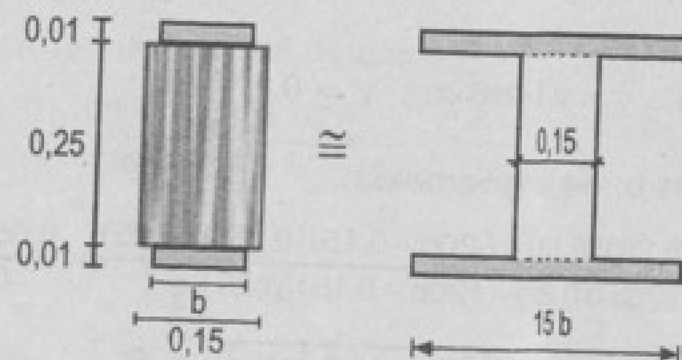
$$\sigma'_m = \frac{My'}{I} = \frac{(18\times10^3)(0,0898)}{416\times10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma'_m = 3,9 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo máximo en el acero:

$$\sigma'_a = n\sigma'_m = 20(3,9) \Rightarrow \boxed{\sigma'_a = 78 \text{ MPa}}$$

1008. Una viga de madera de 150 × 250 mm se refuerza con dos placas de acero de 10 mm de espesor en las caras superior e inferior. Calcular la anchura que deban tener los refuerzos si la viga soportara un momento máximo de 50 kN.m y los esfuerzos admisibles son de 8 y 110 MPa, en la madera y el acero respectivamente. Se considerará n = 15.

Resolución:



Calculamos el momento de inercia:

$$I = \frac{1}{12}(15b)(0,27)^3 - \frac{1}{12}(15b - 0,15)(0,25)^3 = (5072,5\,b + 195,3125)\times 10^{-6}$$

El esfuerzo en la madera, correspondiente al esfuerzo admisible del acero:

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{110}{15}$$

El esfuerzo en la sección equivalente:

$$\sigma'_m = \frac{My}{I} = \frac{(50\times10^3)(0,27/2)}{(5072,5b+195,3125)\times10^{-6}} = \frac{110}{15}\times10^6$$

$$\boxed{b = 0,143 \text{ m} = 143 \text{ mm}}$$

1009. Una viga de madera de 150 × 200 mm se refuerza en sus caras superior e inferior con placas de aluminio de 6 mm de espesor. Calcular su anchura si la viga ha de soportar un momento flexionante de 16 kN.m. Se considerará n = 5 y los esfuerzos admisibles 8 y 70 MN/m² en la madera y el aluminio, respectivamente.

Resolución:

Siguiendo el procedimiento del problema anterior.

Calculamos el momento de inercia:

$$I = \frac{1}{12}(5b)(0,212)^3 - \frac{1}{12}(5b - 0,15)(0,2)^3 = (636,72b + 100)\times 10^{-6}$$

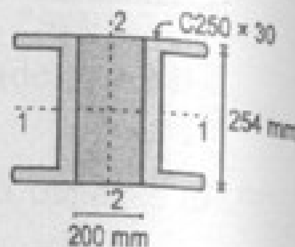
El esfuerzo máximo en la madera, correspondiente al esfuerzo admisible del aluminio:

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_{Al}}{n} = \frac{70}{5} = 14 \text{ MPa}$$

El esfuerzo en la sección equivalente:

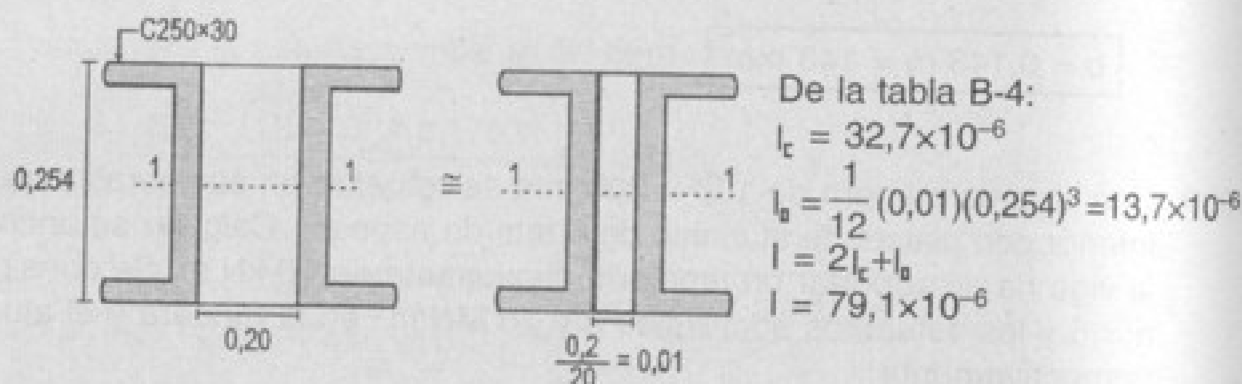
$$\sigma_m = \frac{My}{I} = \frac{(16\times10^3)(0,20/2)}{(636,72b+100)\times10^{-6}} = 8\times10^6 = 0,157 \Rightarrow \boxed{b = 157 \text{ mm}}$$

1010. Un par de perfiles C250 × 30 están firmemente atornillados a una viga de madera de 220 × 254 mm, como se indica en la figura. Si la flexión tiene lugar respecto del eje 1-1, es decir, en el plano vertical; determinar el momento máximo que puede soportar si los esfuerzos admisibles son σ_a = 120 MPa y σ_m = 8 MPa. Se considerará n = 20. (El peralte de los canales es también de 254 mm).



Resolución:

Para este caso, por facilidad, transformamos la madera en acero, además n = 20.



De la tabla B-4:

$I_c = 32,7\times10^{-6}$

$I_o = \frac{1}{12}(0,01)(0,254)^3 = 13,7\times10^{-6}$

$I = 2I_c + I_o$

$I = 79,1\times10^{-6}$

Calculamos el esfuerzo del acero para el esfuerzo máximo admisible de la madera:

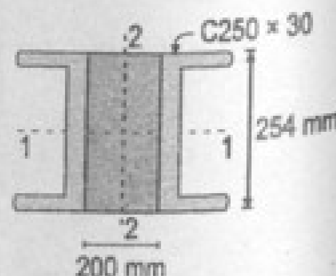
$$\sigma'_a = n\sigma_m = 20(8) = 160 \text{ MPa} > \sigma_a \quad \text{¡no!}$$

Además: σ_a = 120 MPa (controla)

El momento que puede soportar la sección equivalente de acero en función del esfuerzo admisible del acero:

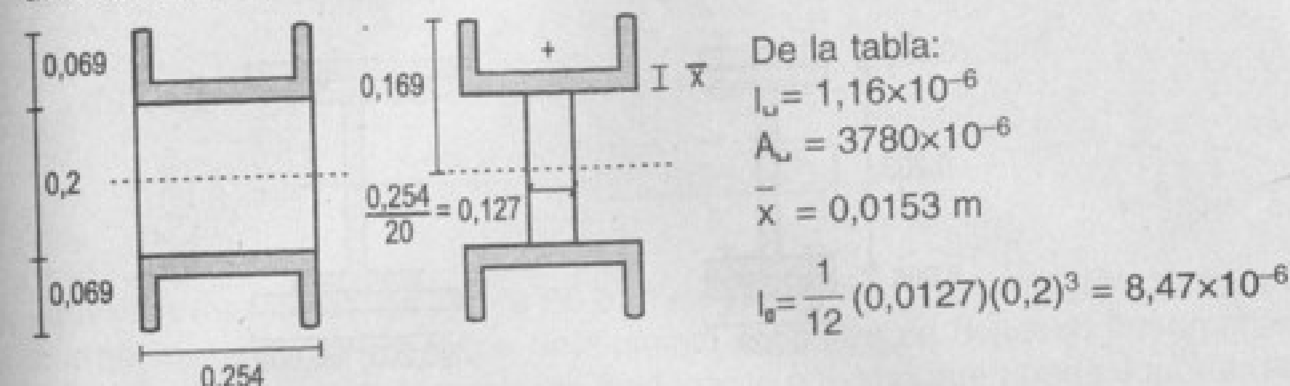
$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(120\times10^6)(79,1\times10^{-6})}{(0,254/2)} = 74,7 \text{ kN.m} \quad \therefore \quad \boxed{M = 74,7 \text{ kN.m}}$$

1011. Repetir el problema 1010 si la flexión tiene lugar con respecto al eje 2-2, es decir, en el plano horizontal.



Resolución:

La flexión tiene lugar con respecto al eje 2-2. Transformamos la sección en una sección equivalente de acero:



De la tabla:

$I_c = 1,16\times10^{-6}$

$A_c = 3780\times10^{-6}$

$\bar{x} = 0,0153$ m

$I_o = \frac{1}{12}(0,0127)(0,2)^3 = 8,47\times10^{-6}$

La inercia de la sección equivalente:

$$I = 8,47\times10^{-6} + 2[\underbrace{1,16\times10^{-6} + 3780\times10^{-6}(0,1153)^2}_{50,25\times10^{-6}}] = 108,97\times10^{-6} \text{ m}^4$$

El momento que puede soportar la sección equivalente en función del esfuerzo admisible del acero:

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(120\times10^6)(108,97\times10^6)}{0,169} \Rightarrow M = 77,4 \text{ kN.m}$$

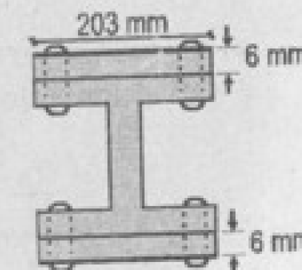
El momento que puede soportar la sección equivalente en función del esfuerzo admisible de la madera:

$$M = \frac{(n\sigma)I}{y} = \frac{(20\times8\times10^6)(108,97\times10^{-6})}{0,10} = 174,3 \text{ kN.m}$$

El momento que puede soportar es el menor valor obtenido.

$$\boxed{M = 77,4 \text{ kN.m}}$$

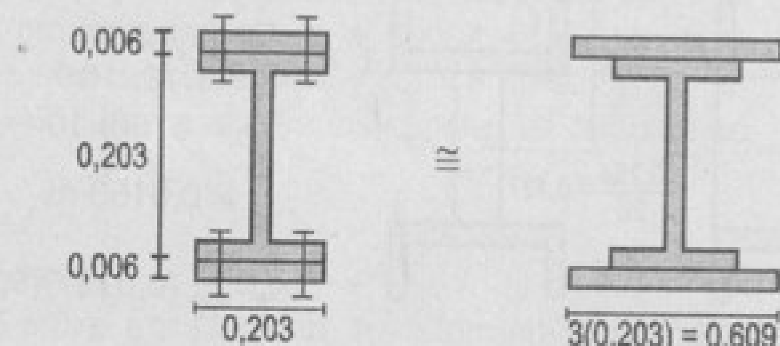
1012. Un perfil de aluminio de las mismas dimensiones que un perfil W200 × 46 de sección, se refuerza remachando a sus alas unas placas de acero de 6 mm de espesor y 203 mm de anchura, como indica la figura. Los esfuerzos admisibles en el aluminio y en el acero son de 100 y 140 MPa, respectivamente, y la relación E_a/E_{Al} = 3. Determinar (a) el incremento de resistencia del perfil original de aluminio, en tanto por ciento del perfil aislado, y (b) el tanto por ciento de incremento de la rigidez EI.



Resolución:

Transformamos la sección reforzada en una sección equivalente:

$n = 3$, $\sigma_{Al} \leq 100$ MPa , $\sigma_a \leq$ 140 MPa



De la tabla tenemos para el perfil W200 × 46: $I_w = 45{,}5 \times 10^{-6}$ m⁴

El momento de inercia para la sección equivalente:

$$I = 45{,}5 \times 10^{-6} + 2\left[\frac{1}{12}(0{,}609)(0{,}006)^3 + (0{,}609)(0{,}006)(0{,}203/2 + 0{,}006/2)^2\right]$$

$$I = 125{,}3 \times 10^{-6}\ m^4$$

El momento que puede soportar la sección equivalente de aluminio sin exceder el esfuerzo admisible del aluminio:

$$M = \frac{\sigma_{Al} I}{y} = \frac{(100 \times 10^6)(125{,}3 \times 10^{-6})}{(0{,}203/2)} = 123{,}5 \text{ kN.m}$$

Solo la sección W200 × 46:

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(100 \times 10^6)(45{,}5 \times 10^{-6})}{(0{,}203/2)} = 44{,}8 \text{ kN.m}$$

El momento que puede soportar la sección equivalente sin exceder el esfuerzo admisible del acero:

$$M = \frac{\left(\frac{\sigma_a}{n}\right) I}{y} = \frac{(140 \times 10^6/3)(125{,}3 \times 10^{-6})}{(0{,}203/2 + 0{,}006)} = 54{,}4 \text{ kN.m}$$

Tomamos el menor: M = 54,4 kN.m

(a) Calculamos el incremento de resistencia:

$$(\%)\ I_R = \frac{54{,}4 - 44{,}8}{44{,}8} \Rightarrow \boxed{(\%) I_R = 21{,}4\%}$$

(b) Calculamos el incremento de la rigidez:

$$(\%)\ I_I = \frac{125{,}3 - 45{,}5}{45{,}5} \Rightarrow \boxed{(\%) I_I = 175\%}$$

1013. Una viga maciza de acero, de 50 mm de diámetro, está protegida contra la corrosión mediante una capa de aluminio de 6 mm de espesor, firmemente unida a ella. Calcular el momento flexionante máximo que puede soportar la sección compuesta si $\sigma_a \leq 102$ MPa, $\sigma_{Al} \leq 100$ MPa y $E_{ac}/E_{Al} = 3$.

Resolución:

Para resolver el problema convertimos en una sección equivalente de acero:

$$I_a = \frac{\pi}{4}(r)^4 = \frac{\pi}{4}(0{,}025)^4 = 3068 \times 10^{-10}$$

$$I_{Al} = \frac{\pi}{4}(1/n)(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4}(1/3)((0{,}031)^4 - (0{,}025)^4) = 1395 \times 10^{-10}\ m^4$$

$$I = I_a + I_{Al} = 4463 \times 10^{-10}\ m^4$$

Calculamos el momento resistente considerando el esfuerzo admisible del acero:

$$M = \frac{\sigma_a I}{y} = \frac{(120 \times 10^6)(4463 \times 10^{-10})}{0{,}25} = 214 \text{ N.m}$$

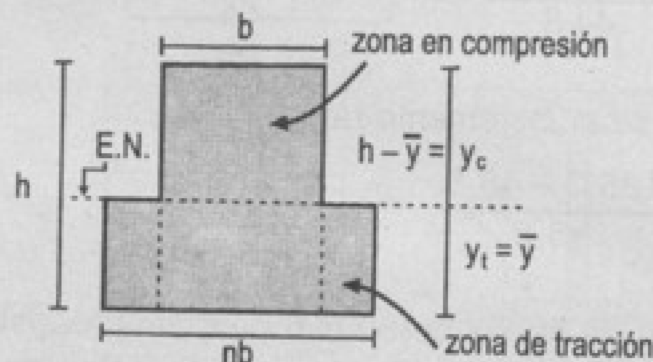
Calculamos el momento resistente en función del esfuerzo admisible del aluminio:

$$M = \frac{(n\sigma_{Al})(I)}{y'} = \frac{(3 \times 100 \times 10^6)(4463 \times 10^{-10})}{0{,}31} = 432 \text{ N.m}$$

Escogemos el menor valor de momento: $\boxed{M = 214 \text{ N.m}}$

1014. Una sección rectangular de 150 mm de anchura por 250 mm de altura soporta un momento flexionante de 140 kN.m. El material de la viga no es isótropo, y su módulo elástico a tensión es el doble del módulo a compresión. Calcular los esfuerzos máximos de tensión y de compresión en la viga.

Resolución:
Del enunciado tenemos: $E_t = 2E_c$, de donde n = 2.



Para determinar la ubicación del E.N. tomamos momentos en el E.N.:

$\Sigma(ay) = 0$: $b(h-\bar{y})^2/2 - nb(\bar{y})^2/2 = 0$

Reemplazando los datos y operando:

$15(25-\bar{y})^2/2 - 2(15)(\bar{y})^2/2 = 0$

$\bar{y}^2 + 50\bar{y} - 625 = 0 \Rightarrow \bar{y} = 25(\sqrt{2}-1) \simeq 10{,}35$ cm

De donde:

$y_t = \bar{y} = 10{,}35$ cm; $y_c = h - \bar{y} = 25 - 10{,}35 = 14{,}65$ cm

Calculamos el momento de inercia:

$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(nb)(y_t)^3 + \frac{1}{3}(b)(y_c)^3$$

$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(2\times 15)(10{,}35)^3 + \frac{1}{3}(15)(14{,}65)^3 = 26\ 800\ \text{cm}^4 \Rightarrow I_{E.N.} = 268\times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

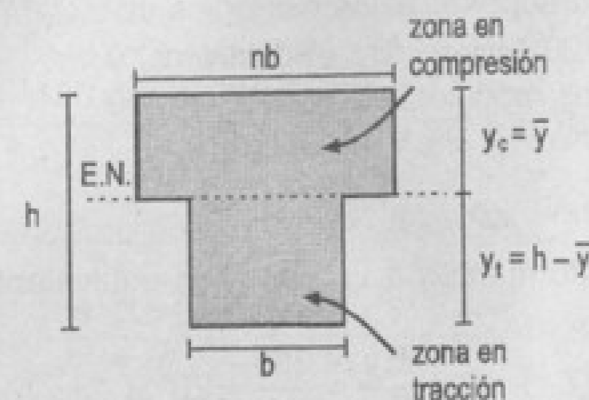
Como paso final calculamos los esfuerzos:

$$\sigma_c = \frac{My_c}{I} = \frac{(140\times 10^3)(14{,}65\times 10^{-2})}{268\times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 76{,}5\ \text{MPa}}$$

$$\sigma_t = \frac{nMy_t}{I} = \frac{2(140\times 10^3)(10{,}35\times 10^{-2})}{268\times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_t = 108\ \text{MPa}}$$

1015. Resolver el problema 1014 si el módulo elástico a compresión es 1,5 veces mayor que a tensión.

Resolución:
Del enunciado tenemos: $E_C = 1{,}5E_t \Rightarrow n = 1{,}5$



Determinamos la ubicación del E.N.; sabemos que:

$\Sigma(ay) = 0$: $b(n-\bar{y})^2/2 - nb\bar{y}^2/2 = 0$

Reemplazando los valores de los datos:

$150(250-\bar{y})^2/2 - 1{,}5(150)(\bar{y})^2/2 = 0$

Operando:

$\bar{y}^2 + 1000\bar{y} - 125\ 000 = 0 \Rightarrow \bar{y} = 250(\sqrt{6}-2) = 112{,}5$ mm $= 0{,}1125$ m

$y_c = \bar{y} = 112{,}5$ mm; $y_t = h - \bar{y} = 250 - 112{,}5 = 137{,}5$ mm

Calculamos el momento de inercia al E.N.:

$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(nb)(y_c)^3 + \frac{1}{3}(b)(y_t)^3$$

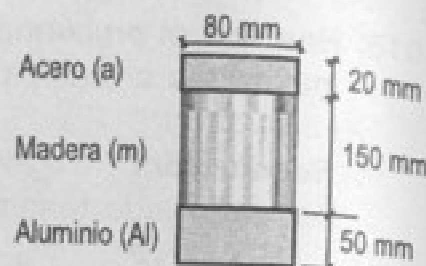
$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(1{,}5\times 150)(112{,}5)^3 + \frac{1}{3}(150)(137{,}5)^3 = 237\times 10^6\ \text{mm}^4 = 237\times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

Para finalizar calculamos los esfuerzos:

$$\sigma_c = \frac{nMy_c}{I} = 1{,}5\frac{(140\times 10^3)(112{,}5\times 10^{-3})}{237\times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 99{,}8\ \text{MPa}}$$

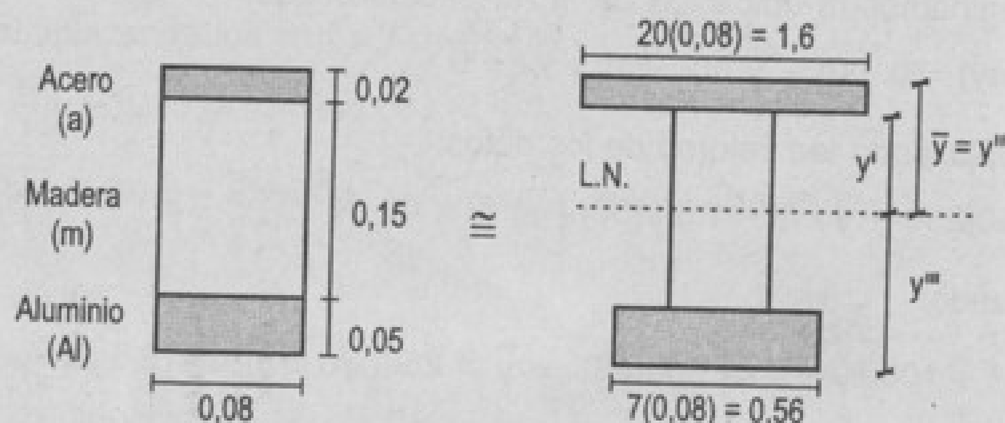
$$\sigma_t = \frac{My_t}{I} = \frac{(140\times 10^3)(137{,}5\times 10^{-3})}{237\times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_t = 81{,}2\ \text{MPa}}$$

1016. Una viga experimental está compuesta de tres materiales, como se observa en la figura. Las tres partes se hallan firmemente unidas entre sí de manera que no existe posibilidad de deslizamiento entre ellas. Determinar el momento de seguridad que pueden soportar si los esfuerzos admisibles son $\sigma_a \leq 120$ MN/m², $\sigma_{Al} \leq 80$ MN/m², y $\sigma_m = 10$ MN/m², y los módulos elásticos $E_a = 200$ GN/m², $E_{Al} = 70$ GN/m² y $E_m = 10$ GN/m².



Resolución:
La sección la transformamos a una sección equivalente en madera:

$$n_1 = \frac{E_{Al}}{E_m} = \frac{70}{10} = 7 \quad ; \quad n_2 = \frac{E_a}{E_m} = \frac{200}{10} = 20$$



Calculamos la ubicación de la línea neutra:

$$A = \overbrace{(1,6)(0,02)}^{0,032} + \overbrace{(0,08)(0,15)}^{0,012} + \overbrace{(0,56)(0,05)}^{0,028} = 0,072$$

$$\bar{y} = \frac{(0,032)(0,01) + (0,012)(0,095) + (0,028)(0,195)}{0,072} = 0,096 \text{ m}$$

Calculamos el momento de inercia:

$$I = \frac{1}{12}(1,6)(0,02)^3 + 0,032(0,096 - 0,01)^2 + \frac{1}{12}(0,08)(0,15)^3 +$$

$$0,012(0,096 - 0,195)^2 + \frac{1}{12}(0,56)(0,05)^3 + 0,028(0,096 - 0,195)^2$$

$I = 540,5 \times 10^{-6}$ m⁴

Calculamos el momento resistente de la sección equivalente considerando el esfuerzo admisible de la madera:

$$M = \frac{\sigma_m I}{y'} = \frac{(10\times10^6)(540,5\times10^{-6})}{(0,096 - 0,02)} = 71,1 \text{ kN.m}$$

Considerando el esfuerzo admisible del acero:

$$M = \frac{(\sigma_a / n_2) I}{y''} = \frac{(120\times10^6/20)(540,5\times10^{-6})}{(0,096)} = 33,8 \text{ kN.m}$$

Considerando el esfuerzo admisible del aluminio:

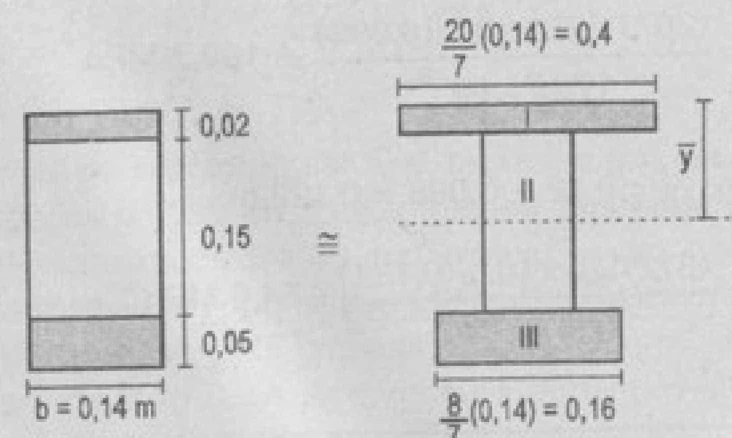
$$M = \frac{(\sigma_{Al} / n_1) I}{y'''} = \frac{(80\times10^6/7)(540,5\times10^{-6})}{(0,22 - 0,096)} = 49,8 \text{ kN.m}$$

Tomamos el momento menor: $\therefore$ $\boxed{M = 33,8 \text{ kN.m}}$

1017. En una sección como la de la figura 10-2a, p. 337, el espesor b es 140 mm para cada material. Las dimensiones verticales son: 20 mm para el acero, 150 mm para el aluminio y 50 mm para el bronce. Suponiendo que los materiales están firmemente unidos, calcule el máximo esfuerzo en cada material cuando la sección resista un momento flexionante de 70 kN.m si $E_c = 200$ GPa, $E_{Al} = 70$ GPa y $E_b = 80$ GPa.

Resolución:
Seguimos un procedimiento similar al problema anterior, transformamos en una sección equivalente de aluminio:

$$n_1 = \frac{E_a}{E_{Al}} = \frac{200}{70} = \frac{20}{7} \qquad n_2 = \frac{E_b}{E_{Al}} = \frac{80}{70} = \frac{8}{7}$$



Calculamos la ubicación de la línea neutra:
Usamos una tabla:

Zona	b	h	A	$\bar{y}'$	$A'\bar{y}' \times 10^{-6}$	$I' = \frac{bh^3}{12}$	$A'(\bar{y}-\bar{y}')^2$
I	0,4	0,02	0,008	0,01	80	0,27	61,95
II	0,14	0,15	0,021	0,095	1995	39,38	0,19
III	0,16	0,05	0,008	0,195	1560	1,66	75,27
Σ			0,037		3635	41,31	137,41

De la tabla:

$A = 0{,}037\ m^2$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A'\bar{y}}{\Sigma A'} = \frac{3\,635\times10^{-6}}{0{,}037} = 0{,}098\ m$$

$$I = \Sigma I' + \Sigma A(\bar{y}'-\bar{y})^2 = 41{,}3 \times 10^{-6} + 137{,}41 \times 10^{-6} = 178{,}7 \times 10^{-6}\ m^4$$

Calculamos el esfuerzo máximo, en cada material, para el momento de 70 kN.m:

I. En el aluminio: $y = 0{,}098 - 0{,}02 = 0{,}078\ m$

$$\sigma_{Al} = \frac{My}{I} = \frac{(70\times10^3)(0{,}078)}{178{,}7\times10^{-6}} = 30{,}5\ MPa$$

II. En el acero: $y = \bar{y} = 0{,}098\ m$

$$\sigma_{ac} = \frac{n_1My}{I} = \frac{(20/7)(70\times10^3)(0{,}098)}{178{,}7\times10^{-6}} = 109{,}7\ MPa$$

III. En el bronce: $y = 0{,}22 - 0{,}098 = 0{,}122\ m$

$$\sigma_b = \frac{n_2My}{I} = \frac{(8/7)(70\times10^3)(0{,}122)}{178{,}7\times10^{-6}} = 54{,}6\ MPa$$

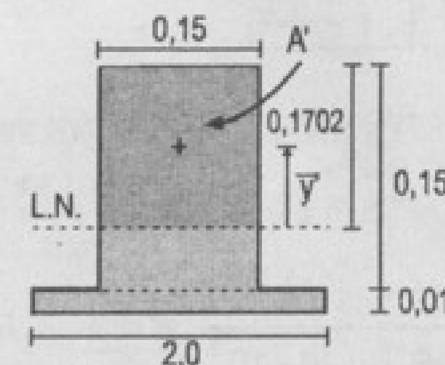
Resumen:

$\boxed{\sigma_{Al} = 30{,}5;\ \sigma_a = 109{,}7;\ \sigma_b = 54{,}6\ MPa}$

1018. Calcular la fuerza cortante vertical admisible en una viga que tiene la sección recta del problema 1005, si n = 20 y el esfuerzo cortante máximo ha de ser de 800 kN/m².

Resolución:

De la sección equivalente del problema 1005 tenemos:



Calculamos Q:

$A' = (0{,}15)(0{,}1702) = 0{,}02553$; $\bar{y}' = 0{,}1702/2 = 0{,}0851$

$\Rightarrow Q = A'\bar{y}' = 2172{,}6 \times 10^{-6}$

También se conoce: $I = 416 \times 10^{-6}\ m^4$

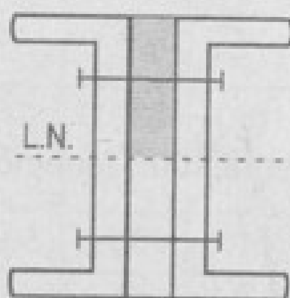
$$\therefore\ \tau = \frac{V}{It}Q = \frac{V}{(416\times10^{-6})(0{,}15)}(2172{,}6\times10^{-6}) \le 800 \times 10^3$$

$$V \le 23\ kN \Rightarrow \boxed{V = 23\ kN}$$

1019. En una viga de sección igual a la representada en el problema 1010, se supone que los perfiles en U están unidos a la madera por dos filas de tornillos de 20 mm, espaciados 30 mm y situados (las dos filas) a 75 mm arriba y abajo de la línea 1-1. Considerando n = 20, calcular el esfuerzo cortante en los tornillos, producido por una carga puntual de 80 kN aplicada en el centro de un claro de 3 m (viga simplemente apoyada) si el pandeo tiene lugar respecto de (a) el eje 1-1 horizontal y (b) el eje 2-2 vertical.

Resolución:

Para la parte (a) tenemos la siguiente sección equivalente:



Se tiene como dato:
$I = 79{,}1\times10^{-6}$

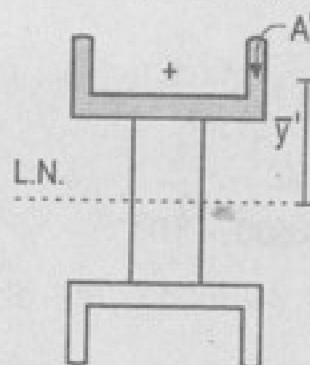
Calculamos el momento estático: $Q = (0{,}01)(0{,}264)(0{,}264/2) = 348{,}5 \times 10^{-6}$

Además: $V = P/2 = 80/2 = 40$ kN ; $R = 2R'$

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{2R'(79{,}1\times10^{-6})}{(348{,}5\times10^{-6})(40\times10^{3})} = 0{,}3 \Rightarrow R' = 26{,}4 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{R'}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{26{,}4\times10^{3}}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 84 \text{ MPa}}$$

Para la parte (b) tenemos la sección equivalente:



Tenemos:
$I = 109 \times 10^{-6}$ m^4
Además: $Q = A'\ \bar{y}'$
$Q = (3780 \times 10^{-6})(0{,}1153) = 436\times10^{-6}$ m^3
$V = 40$ kN
$R = 2R'$ (2 filas de tornillos)

Luego, el espaciamiento de los tornillos:

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{2R'(109\times10^{-6})}{(40\times10^{3})(436\times10^{-6})} = 0{,}3 \Rightarrow R' = 24 \text{ kN}$$

Luego el esfuerzo en los tornillos:

$$\tau = \frac{R'}{A_{\varnothing}} = \frac{R'}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{24\times10^{3}}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 76{,}4 \text{ MPa}}$$

1020. La viga del problema 1002 soporta una carga uniformemente repartida de 30 kN/m, apoyada sobre un claro de 5 m de longitud. Con los valores $E_a = 200$ GN/m^2 y $E_m = 10$ GN/m^2, calcular la deflexión en el centro.

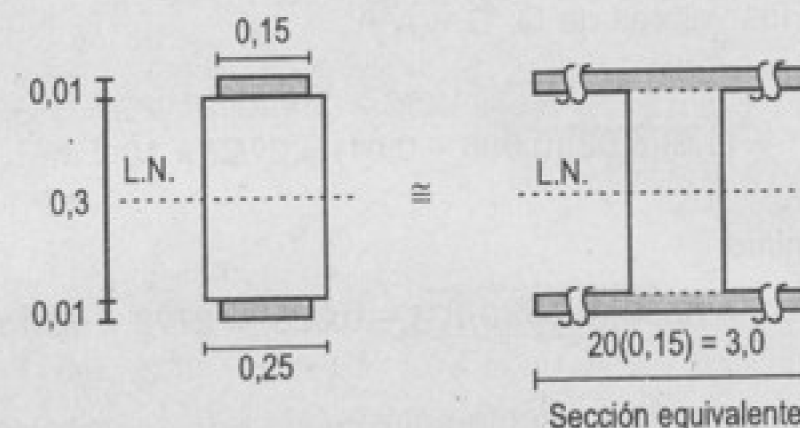
Resolución:

La deflexión para esta viga simplemente apoyada y con una carga uniforme repartida en todo el tramo es:

$$\delta = \frac{5wL^4}{384\,EI} \text{ (verificar)}$$

Del problema 2 tenemos para la sección equivalente de madera: n = 20

$$I = \frac{1}{12}(3)(0{,}32)^3 - \frac{1}{12}(2{,}75)(0{,}3)^3 = 2005 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Luego reemplazando los valores tenemos:

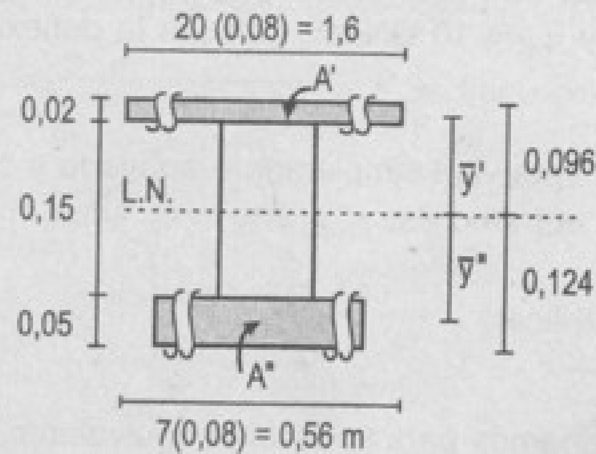
$$\delta = \frac{5(30\times10^{3})(5)^4}{384(10\times10^{9})(2005\times10^{-6})} = 0{,}0122 \Rightarrow \boxed{\delta = 12{,}2 \text{ mm}}$$

1021. En el problema 1016 calcular el flujo de cortante (sec. 5-7) que existe entre el acero y la madera, y entre la madera y el aluminio. Expresar el resultado en función de la fuerza cortante vertical V.

Resolución:

Sabemos que el flujo cortante es: $q = \dfrac{VQ}{I}$

La sección equivalente en madera:



El valor de I ya se calculó en el problema de referencia: $I = 540{,}5 \times 10^{-6}\ m^4$

Calculamos los valores de Q: $Q = A\,\bar{y}$.

Para el acero:

$$Q' = A'\bar{y}' = (1{,}6)(0{,}02)(0{,}096 - 0{,}01) = 2752 \times 10^{-6}\ m^3$$

Para el aluminio:

$$Q'' = A''\ \bar{y}'' = (0{,}56)(0{,}05)(0{,}124 - 0{,}025) = 2772 \times 10^{-6}\ m^3$$

Luego el flujo de corte existente entre:

I. El acero y la madera:

$$q = \frac{V(2752 \times 10^{-6})}{540{,}5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{q = 5{,}09V\ N/m}$$

II. El aluminio y la madera:

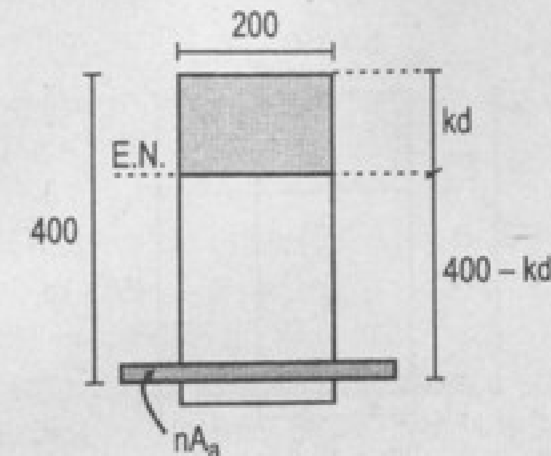
$$q = \frac{V(2772 \times 10^{-6})}{540{,}5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{q = 5{,}12V\ N/m}$$

1022, 1023: problemas ilustrativos.

1024. En una viga de concreto armado, b = 200 mm, d = 400 mm, $A_a = 1400\ mm^2$. Determinar la posición de la línea neutra si (a) n = 6, y (b) n = 10.

Resolución:

Graficamos la sección equivalente:



Para la parte (a): n = 6

Por equilibrio:

$$200kd\left(\frac{kd}{2}\right) = 6 \times 1400\ (400 - kd) \Rightarrow \boxed{kd = 146\ mm}$$

Por tanto:

$$jd = d - \frac{1}{3}kd = 400 - \frac{1}{3}(146) \Rightarrow \boxed{jd = 351\ mm}$$

Para la parte (b): n = 10

Por equilibrio tenemos que:

$$200\ kd\left(\frac{kd}{2}\right) = 10(1400)\ (400 - kd)$$

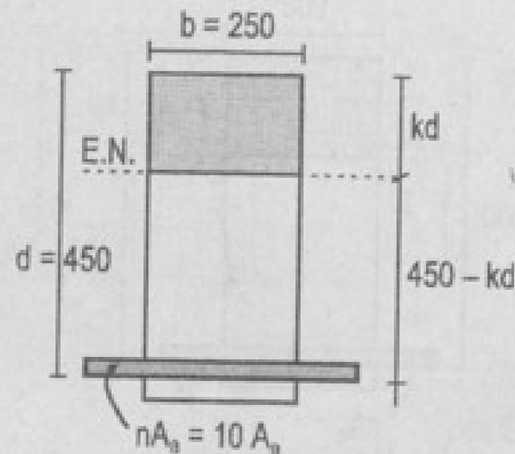
$$(kd)^2 + 140(kd) - 56 \times 10^3 = 0 \Rightarrow \boxed{kd = 177\ mm}$$

Por tanto:

$$jd = d - \left(\frac{1}{3}\right)kd = 400 - \left(\frac{1}{3}\right)(177) \Rightarrow \boxed{jd = 341\ mm}$$

1025. En una viga de concreto armado, b = 250 mm, d = 450 mm y n = 10. Los esfuerzos máximos desarrollados son de 6 MPa en el concreto y de 120 MPa en el acero. Calcular el momento flexionante aplicado y el área requerida de acero.

Resolución:
Dibujamos la sección equivalente:



- Para que el esfuerzo en el concreto alcance su valor máximo:

$$M = \frac{1}{2} f_c (bkd)\ (jd) = \frac{1}{2} (6)\ (250)\ (kd)(jd) \qquad ...(1)$$

- Para que el esfuerzo en el acero alcance su valor máximo:

$$M = f_a\ A_a\ jd = 120\ (A_a)\ jd \qquad ...(2)$$

De (1) y (2): $A_a = 6{,}25(kd)$

Además:

$$250(kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = 10A_a\ (450 - kd)$$

$$125\,(kd)^2 = 10(6{,}25\ kd)(450 - kd) \Rightarrow kd = 150\ mm$$

Entonces:

$$A_a = 6{,}25\ (150) \Rightarrow \boxed{A_a = 938\ mm^2}$$

$$M = \frac{1}{2}(6)(250)(150)\left(450 - \frac{150}{3}\right) = 45 \times 10^6\ N.mm \ \therefore\ \boxed{M = 45\ kN.m}$$

1026. Repetir el problema 1025 si d = 540 mm.

Resolución:
Seguimos el procedimiento del problema anterior.

- Para que el esfuerzo en el concreto alcance su valor máximo:

$$M = \frac{1}{2}(6)\ (250)\ (kd)\ (jd) \qquad ...(1)$$

- Para que el esfuerzo en el acero alcance su valor máximo:

$$M = 120\ (A_a)\ jd \qquad ...(2)$$

Igualando los momentos de (1) y (2): $A_a = 6{,}25(kd)$

Además: $250(kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = 10A_a(540 - kd)$

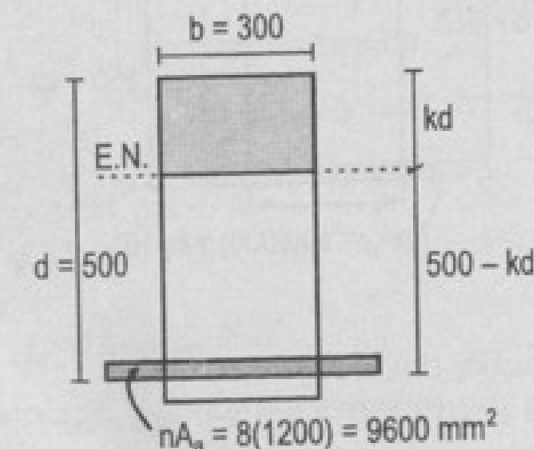
$$125\ (kd)^2 = 10\ [6{,}25\ (kd)]\ (540 - kd)$$

De donde obtenemos: $kd = 180\ mm \Rightarrow \boxed{A_a = 1125\ mm^2}$

$$M = 120(1125)\left(540 - \frac{180}{3}\right) \Rightarrow \boxed{M = 64{,}8\ kN.m}$$

1027. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero en una viga de concreto armado en la que b = 300 mm, d = 500 mm, A_a = 1200 mm² y n = 8, al aplicarle un momento flexionante de 70 kN.m.

Resolución:
Dibujamos la sección equivalente:



Calculamos la ubicación del E.N.:

$$300(kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = 9600\ (500 - kd)$$

$$(kd)^2 + 6{,}4kd - 32\ 000 = 0 \Rightarrow kd = 150\ mm$$

Por tanto:

$$jd = d - \frac{kd}{3} = 500 - \frac{150}{3} = 450 \text{ mm}$$

Calculamos el esfuerzo máximo en el concreto:

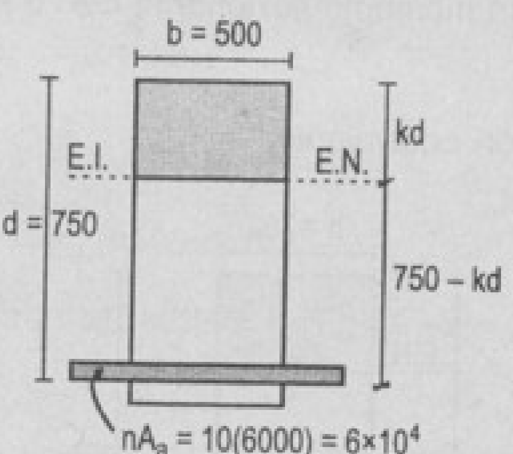
$$f_c = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{2(70\times10^3)}{0{,}3(0{,}15)(0{,}45)} \Rightarrow \boxed{f_c = 6{,}91 \text{ MN/m}^2}$$

Calculamos el esfuerzo máximo en el acero:

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{70\times10^3}{(1200\times10^{-6})(0{,}45)} \Rightarrow \boxed{f_a = 130 \text{ MN/m}^2}$$

1028. En una viga de concreto armado, b = 500 mm, d = 750 mm, A_a = 6000 mm² y n = 10. ¿Qué esfuerzos máximos producirá un momento flexionante de 270 kN.m?

Resolución:
Tenemos la siguiente sección equivalente:



Calculamos la ubicación del E.N.:
$500(kd)(kd/2) = 6 \times 10^4(750 - kd) \Rightarrow kd = 321$ mm

Por tanto:

$$jd = d - \frac{1}{3}kd = 643 \text{ mm}$$

Calculamos los esfuerzos máximos en:

1. El concreto:

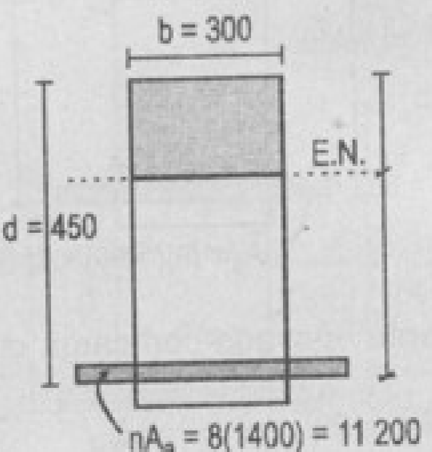
$$f_c = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{2(270\times10^3)}{0{,}5(0{,}321)(0{,}643)} \Rightarrow \boxed{f_c = 5{,}23 \text{ MN/m}^2}$$

2. El acero:

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{270\times10^3}{(6\times10^{-3})(0{,}643)} \Rightarrow \boxed{f_a = 70 \text{ MN/m}^2}$$

1029. Las dimensiones de una viga de concreto armado son b = 300 mm, d = 450 mm, A_a = 1400 mm² y n = 8. Si los esfuerzos admisibles son $f_c \leq 12$ MN/m², y $f_a \leq 140$ MN/m², calcular el momento flexionante máximo que se puede aplicar. ¿Cómo está calculada la viga?

Resolución:



Calculamos la ubicación del E.N.:
$300(kd)(kd/2) = 11\,200(450 - kd) \Rightarrow kd = 150$

Por tanto: $jd = d - \frac{1}{3}kd = 400$ mm

Calculamos el momento flexionante máximo que se puede aplicar, considerando:

I. El esfuerzo permisible del concreto:

$$f_c = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{2M}{0{,}3(0{,}15)(0{,}40)} \leq 12 \times 10^6 \Rightarrow M \leq 108 \text{ kN.m}$$

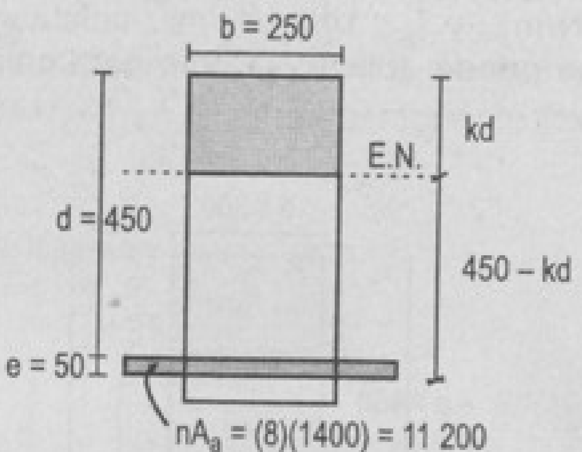
II. El esfuerzo permisible del acero:

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{M}{(1400\times10^{-6})(0,4)} \leq 140 \times 10^6 \Rightarrow M \leq 78,4 \text{ kN.m}$$

$\therefore$ $\boxed{M \leq 78,4 \text{ kN.m}}$ (está subreforzada)

1030. En una viga de concreto armado, b = 250 mm, d = 450 mm, A_a = 1 400 mm² y n = 8. Calcular la carga uniformemente repartida que puede soportar la viga, simplemente apoyada, sobre un claro de 4 m, si $f_c \leq 12$ MPa y $f_a \leq 140$ MPa. Se considera un recubrimiento de armadura e = 50 mm y se incluye el peso propio de la viga. El concreto pesa, aproximadamente, 2400 kg/m³.

Resolución:



Para un viga simplemente apoyada con carga distribuida w:

$$M = \frac{1}{8}w_T L^2 = \frac{1}{8}w_T(4)^2 = 2w_T$$

Calculamos la ubicación del E.N.:
250(kd)(kd/2) = 11 200(450 – kd) $\Rightarrow$ kd = 161

Por tanto: $jd = 450 - \frac{1}{3}(161) = 396$

Calculamos w_T considerando lo siguiente:
- El esfuerzo máximo en el concreto:

$$f_c = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{2(2w_T)}{0,25(0,161)(0,396)} \leq 12 \times 10^6 \Rightarrow w_T = \leq 47\ 817 \text{ N/m}$$

- El esfuerzo máximo en el acero:

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{2w_T}{(1400\times10^{-6})(0,396)} \leq 140 \times 10^6 \Rightarrow w_T \leq 38\ 808 \text{ N/m}$$

Escogemos el menor: w_T = 38 808 N/m

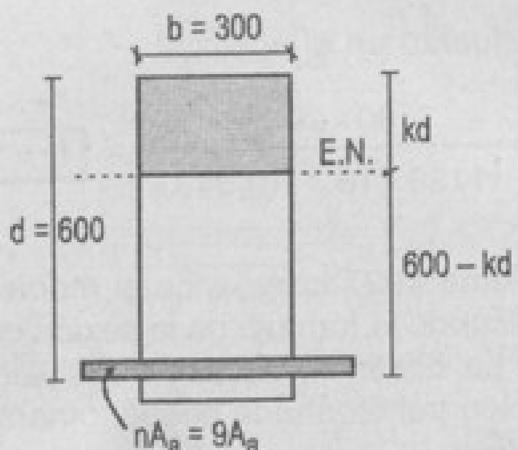
Sabemos que $w_T = w + w_{pp}$

Además: w_{pp} = (0,25)(0,5)(2400)(9,81) = 2943 N/m

$\therefore$ $\boxed{w = w_T - w_{pp} = 35,9 \text{ kN/m}}$

1031. En una viga de concreto armado, b = 300 mm, d = 600 mm y n = 9. Al aplicar un momento flexionante de 80 kN.m, el esfuerzo máximo en el concreto es de 5 MPa. ¿Qué esfuerzo aparecerá en el acero? ¿Cuál será el área de acero requerida?

Resolución:



Calculamos la ubicación del E.N. con la siguiente expresión:

$$M_c = \frac{1}{2}f_c(bkd)\left(d - \frac{1}{3}kd\right) \Rightarrow 80 \times 10^3 = \frac{1}{2}(5 \times 10^6)(0,3)(kd)\left(0,6 - \frac{kd}{3}\right)$$

De donde: kd = 0,20 $\Rightarrow$ jd = 0,533

Calculamos el área de acero:

$$300(200)(200/2) = 9A_a(600 - 200) \Rightarrow \boxed{A_a = 1670 \text{ mm}^2}$$

Calculamos el esfuerzo en el acero:

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{80\times10^3}{(1670\times10^{-6})(0{,}533)} \Rightarrow \boxed{f_a = 90\ \text{MPa}}$$

1032. Resolver el problema anterior con M = 70 kN.m sin variar los otros datos.

Resolución:
Seguimos el procedimiento del problema anterior con M = 70 kN.

Calculamos la ubicación del E.N.:

$$70\times10^3 = \frac{1}{2}(5\times10^6)(0{,}3)(kd)\left(0{,}6-\frac{kd}{3}\right)$$

De donde: kd = 0,171 ⇒ jd = 0,543 m

Calculamos el área de acero:

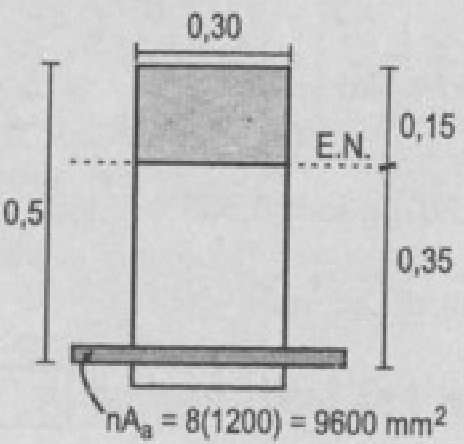
$$300(171)(171/2) = 9A_a(600-171) \Rightarrow \boxed{A_a = 1136\ \text{mm}^2}$$

Calculamos el esfuerzo en el acero:

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{80\times10^3}{(1136\times10^{-6})(0{,}543)} \Rightarrow \boxed{f_a = 130\ \text{MPa}}$$

1033. Resolver el problema 1027 calculando el momento de inercia de la sección equivalente y aplicando la fórmula de la flexión de acuerdo con lo indicado en la sección 10-2. La distancia del área equivalente del concreto a la línea neutra de la sección transformada puede tomarse como su radio de giro con respecto a este eje.

Resolución:



Además se ha calculado el E.N. (ver P. 1027): kd = 150 mm

Calculamos el momento de inercia con respecto al E.N.:

$$I = \frac{1}{3}(0{,}3)(0{,}15)^3 + (9600\times10^{-6})(0{,}35)^2 \Rightarrow I = 1513{,}5\times10^{-6}\ \text{m}^4$$

Calculamos el esfuerzo en el concreto:

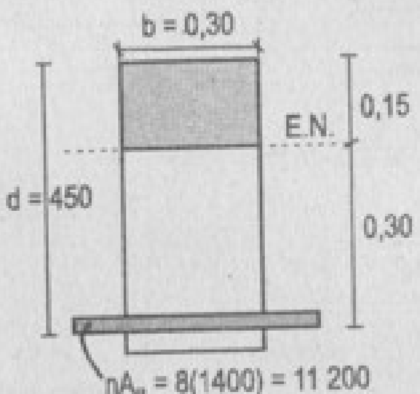
$$\sigma_c = \frac{M_c}{I} = \frac{(70\times10^3)(0{,}15)}{1513{,}5\times10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 6{,}93\ \text{MPa}}$$

Calculamos el esfuerzo en el acero:

$$f_a = \frac{nMc}{I} = \frac{8(70\times10^3)(0{,}35)}{1513{,}5\times10^{-6}} \Rightarrow \boxed{f_a = 129{,}5\ \text{MPa}}$$

1034. Resolver el problema 1029 empleando el procedimiento descrito en el problema 1033.

Resolución:



Calculamos el momento de inercia con respecto al E.N.:

$$I = \frac{1}{3}(0{,}30)(0{,}15)^3 + (11\,200\times10^{-6})(0{,}3)^2 = 1345{,}5\times10^{-6}\ \text{m}^4$$

Calculamos el momento que puede resistir, considerando el esfuerzo admisible del concreto:

$$f_c = \frac{M_c}{I} = \frac{M(0{,}15)}{1345{,}5\times10^{-6}} \le 12\times10^6 \Rightarrow M \le 107{,}6\ \text{kN.m}$$

Considerando el esfuerzo admisible del acero:

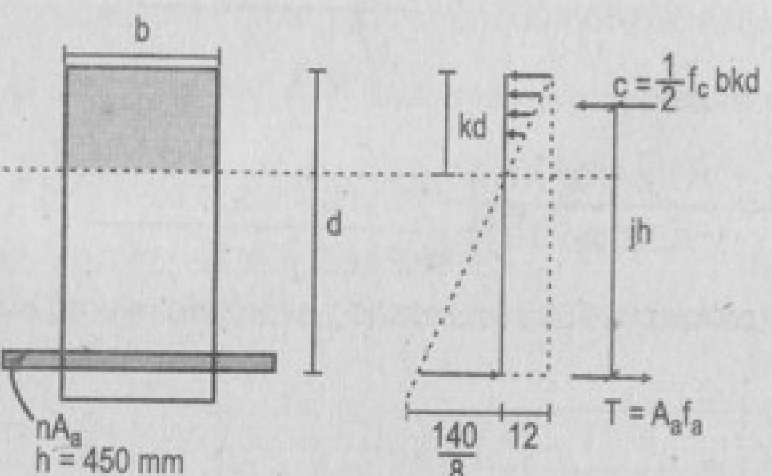
$$f_a = \frac{n\,Ma}{I} = \frac{8(M)(0{,}3)}{1345{,}5\times10^{-6}} \le 140\times10^6 \Rightarrow M \le 78{,}5\ \text{kN.m}$$

$$\therefore\ \boxed{M = 78{,}5\ \text{kN.m}}$$

1035: problema ilustrativo

1036. Se diseña una viga de concreto armado para alcanzar simultáneamente los esfuerzos $f_c = 12$ MPa y $f_a = 140$ MPa. Si n = 8 y h = 450 mm, calcular el brazo de momento del par resistente.

Resolución:
Tenemos el siguiente esquema:



Del gráfico por semejanza tenemos:

$$\frac{kd}{d} = \frac{12}{(140/8)+12} \Rightarrow k = 0{,}407$$

Luego el valor de j es:

$$j = 1-\frac{1}{3}k = 1-\frac{1}{3}(0{,}407) = 0{,}864 \Rightarrow jh = 0{,}864(450) \therefore \boxed{jh = 389\text{ mm}}$$

1037. En una viga de concreto, h = 600 mm y n = 9. Determinar los valores de b y A_a para que pueda soportar un momento flexionante de 80 kN.m con el armado o refuerzo estricto, si $f_c = 9 \times 10^6$ N/m² y $f_a = 140 \times 10^6$ N/m².

Resolución:
Seguimos un procedimiento similar al problema anterior.

Calculamos k:

$$\frac{kd}{d} = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n}+f_c} = \frac{9}{\frac{140}{9}+9} \Rightarrow k = 0{,}367 \Rightarrow j = 1-\frac{1}{3}k = 1-\frac{1}{3}(0{,}367) = 0{,}910$$

Calculamos b, haciendo d = h = 600 mm:

$$M_c = \left(\frac{1}{2}f_c bkd\right)(jd) \Rightarrow 80 \times 10^3 = \frac{1}{2}(9 \times 10^6)(b)(0{,}6^2)(0{,}367)(0{,}910)$$

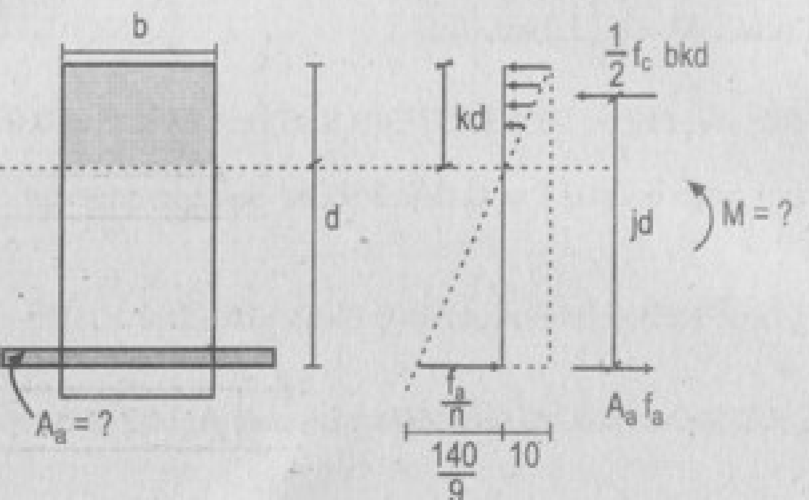
$$b = 0{,}148 \Rightarrow \boxed{b = 148\text{ mm}}$$

Calculamos A_a con $\frac{1}{2}f_c bkd = A_a f_a$:

$$\frac{1}{2}(9 \times 10^6)(0{,}148)(0{,}367)(0{,}6) = A_a(140 \times 10^6) \Rightarrow \boxed{A_a = 1048\text{ mm}^2}$$

1038. En una viga de concreto armado, b = 250 mm, h = 450 mm y n = 9; los esfuerzos admisibles son $f_c = 10$ MPa y $f_a = 140$ MPa. Determinar A_a para armadura estricta y el momento de seguridad.

Resolución:



Calculamos la ubicación del E.N.:

$$k = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n}+f_c} = \frac{10}{\frac{140}{9}+10} = 0{,}391 \Rightarrow j = 1-\frac{1}{3}k = 1-\frac{1}{3}(0{,}391) = 0{,}869$$

Calculamos el momento de seguridad:

$$M = \left(\frac{1}{2}f_c bkd\right)(jd) = \frac{1}{2}(10 \times 10^6)(0{,}25)(0{,}45)^2(0{,}391)(0{,}869)$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 86\text{ kN.m}}$$

Luego calculamos el área de acero:

$$M = (A_a f_a)\,(jd) \Rightarrow A_a\,(140 \times 10^6)(0{,}869)(0{,}45) = 86 \times 10^3$$

$$\Rightarrow \boxed{A_a = 1570\ \text{mm}^2}$$

1039. Diseñar una viga de concreto armado de altura estricta para resistir un momento flexionante de 140 kN.m, considerando h = 1,5b, f_c = 12 MPa y f_a = 160 MPa. Se considerará n = 8.

Resolución:

Calculamos k y j:

$$k = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n} + f_c} = \frac{12}{\frac{160}{8} + 12} = 0{,}375 \Rightarrow j = 1 - \frac{1}{3}k = 1 - \frac{1}{3}(0{,}375) = 0{,}875$$

Sabemos que: $M = \left(\frac{1}{2} f_c bkd\right)(jd)$

$$140 \times 10^3 = \frac{1}{2}(12 \times 10^6)\,(0{,}375)(0{,}875)bd^2 \Rightarrow bd^2 = 0{,}071 \wedge h = 1{,}5\ b$$

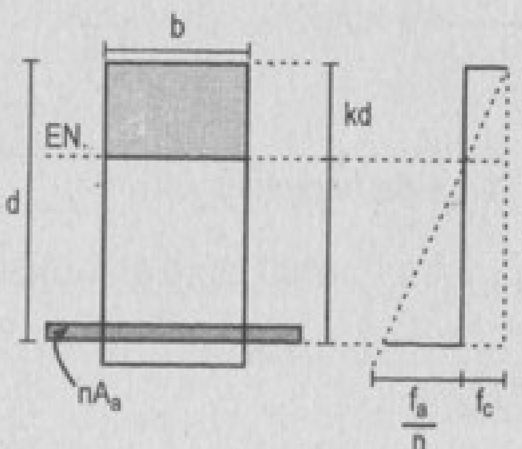
Además: $b(1{,}5b)^2 = 0{,}071 \Rightarrow b = 0{,}316\ \text{m} \Rightarrow \boxed{b = 316\ \text{mm}}$

Luego: $\frac{1}{2}(12 \times 10^6)(0{,}316)(0{,}474)(0{,}375) = A_a(160 \times 10^6)$

$$A_a = 2110 \times 10^6\ \text{m}^2 = 2110\ \text{mm}^2 \Rightarrow \boxed{A_a = 2110\ \text{mm}^2}$$

1040. Resolver el problema anterior si $b = \frac{3}{4}h$.

Resolución:



Calculamos la ubicación del E.N. :

$$k = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n} + f_c} = \frac{12}{\frac{160}{8} + 12} = 0{,}375 \Rightarrow j = 1 - \frac{1}{3}k = 1 - \frac{1}{3}(0{,}375) = 0{,}875$$

El momento actuante:

$$M = 140 \times 10^3 = \frac{1}{2}(12 \times 10^6)(0{,}375)(0{,}875)\ bd^2 \Rightarrow 1\ bd^2 = 0{,}0711$$

Del enunciado $b = \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}d$, por lo tanto: $\left(\frac{3}{4}d\right)(d^2) = 0{,}0711 \Rightarrow d = 0{,}45\ \text{m}$

Reemplazando: $b = \frac{3}{4}(0{,}45) \Rightarrow \boxed{b = 0{,}34\ \text{m}}$

Con los datos ya calculados determinamos:

$$A_a = \frac{1}{f_a}\left(\frac{1}{2} f_c bkd\right)$$

$$A_a = \frac{1}{160 \times 10^6}\left(\frac{1}{2} 12 \times 10^6 \times 0{,}34 \times 0{,}375 \times 0{,}45\right)$$

$$A_a = 2{,}15 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \Rightarrow \boxed{A_a = 2150\ \text{mm}^2}$$

1041. Se diseña una viga simplemente apoyada de 6 m de claro para soportar una carga concentrada de 80 kN en el centro del tramo. Calcular b y A_a si la altura útil h = 600 mm, la armadura es estricta, y los esfuerzos admisibles son f_c = 8 MN/m², f_a = 120 MN/m² y n = 10. Se recubren las armaduras con 50 mm de concreto y se tiene en cuenta el peso propio de la viga, siendo 2400 kg/m³ la densidad (o masa volumétrica). *Indicación:* supóngase un peso inicial por metro de viga y confróntese con el que se obtendrá después de haber determinado las dimensiones de la viga.

Resolución:

El momento flexionante para la viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro del tramo es: $M = \frac{PL}{4} = \frac{80(6)}{4} = 120$ kN.m

Consideramos el peso de la viga por metro de:

$$w = (0,3)(0,6)(2,4)(9,81) = 4,24 \text{ kN/m} \therefore \quad M_w = \frac{1}{8}wL^2 = \frac{1}{8}(4,24)(6)^2 = 19 \text{ kN.m}$$

El momento total es: $M = 120 + 19 = 139$ kN.m

El enunciado indica que es armadura estricta. Calculamos la ubicación del E.N.:

$$k = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n} + f_c} = \frac{8}{\frac{120}{10} + 8} = 0,4 \Rightarrow j = 1 - \frac{1}{3}k = 1 - \frac{1}{3}(0,4) = 0,867$$

Calculamos b, utilizando $M = \frac{1}{2}f_c bkdjd$:

$$b = \frac{2M}{f_c kjd^2} = \frac{2(139\times10^3)}{(8\times10^6)(0,4)(0,867)(0,60)^2} = 0,278 \therefore \boxed{b = 278 \text{ m}}$$

Determinamos el área de acero A_a:

$$A_a = \frac{1}{f_a}\left(\frac{1}{2}f_c bkd\right) = \frac{1}{120\times10^6}\left(\frac{1}{2}\times8\times10^6\times0,278\times0,4\times0,6\right)$$

$$A_a = 2,22 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \Rightarrow \boxed{A_a = 2220 \text{ mm}^2}$$

Nota: en este problema se usó $d = h = 0,6$ m ; debió ser $d = 0,55$ m.

1042. Una viga de concreto armado de 6 m de longitud y perfectamente empotrada en sus extremos ha de soportar una carga uniformemente repartida de 20 kN/m, además de su peso propio. Con h = 600 mm, diseñar una viga de altura estricta, con f_c = 6 MPa y f_a = 120 MPa, siendo n = 10. Téngase en cuenta también un recubrimiento de 50 mm sobre las armaduras. La masa unitaria del concreto es 2400 kg/m³. Léase la indicación del problema anterior.

Resolución:

El momento máximo es: $M = \frac{wL^2}{12}$; donde $w = w' + w_{pp}$

Consideramos: $w_{pp} = (0,2)(0,6)(2,4)(9,81) = 2,8 \therefore w = 20 + 3 = 23$ kN/m

Reemplazando: $M = \frac{23(6)^2}{12} = 69$ kN.m

Calculamos la ubicación del eje neutro sabiendo que es una viga de altura estricta:

$$k = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n} + f_c} = \frac{6}{\frac{120}{10} + 6} = 0,333 \Rightarrow j = 1 - \frac{1}{3}k = 0,889$$

Calculamos b con: $M = \frac{1}{2}f_c bkdjd$

$$b = \frac{2M}{f_c kjd^2} = \frac{2(69\times10^3)}{6\times10^6\times0,333\times0,889\times0,6^2} = 0,216$$

Si hacemos una corrección a w_{pp}:

$$w_{pp} = (0,216)(0,6)(2,4)(9,81) = 3,05 \quad \therefore \quad w = 20 + 3,05 = 23,05$$

Reemplazando: $M = \frac{23,05(6)^2}{12} = 69,15$ kN.m

Recalculamos b:

$$b = \frac{2(69,15\times10^3)}{6\times10^6\times0,333\times0,889\times0,6^2} = 0,216 \Rightarrow \boxed{b = 216 \text{ mm}} \text{ (no varía)}$$

Calculamos el área del refuerzo:

$$A_a = \frac{1}{f_a}\left(\frac{1}{2}f_c bkd\right) = \frac{1}{120\times10^6}\left(\frac{1}{2}\times6\times10^6\times0,216\times0,333\times0,6\right)$$

$$A_a = 1,08 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \Rightarrow \boxed{A_a = 1080 \text{ mm}^2}$$

1043. Diseñar una viga de concreto armado para soportar una carga repartida de 80 kN/m sobre un tramo de 4 m simplemente apoyada. Emplear f_c = 12 MN/m², f_a = 140 MN/m² y n = 8. Tómese el recubrimiento de 50 mm sobre las armaduras e inclúyase el peso propio de la viga, con una densidad del concreto de 2400 kg/m³. Considerar el valor de D = 200 mm. Emplee la indicación del problema 1041.

Resolución:

En una viga simplemente apoyada con carga uniforme: $M = \frac{wL^2}{8}$

Donde: $w = w' + w_{pp}$

Un primer tanteo:

$$w_{pp} = (0,2)(0,6)(2,4)(9,81) = 2,83 \simeq 3 \;\therefore\; w = 80 + 3 = 83 \text{ kN/m}$$

Reemplazando: $M = \dfrac{83(4)^2}{8} = 166$ kN.m

Considerando una viga de altura estricta y calculamos la posición del E.N.:

$$k \doteq \frac{f_c}{\frac{f_a}{n}+f_c} = \frac{12}{\frac{140}{8}+12} = 0,406 \Rightarrow j = 1 - \frac{1}{3}k = 1 - \frac{1}{3}(0,406) = 0,865$$

Calculamos h, hacemos h = d: $h = \sqrt{\dfrac{2M}{f_c k j b}} = \sqrt{\dfrac{2(166\times10^3)}{12\times10^6\times0,406\times0,865\times0,2}}$

$h = 0,63$ m $\Rightarrow$ $\boxed{h = 630 \text{ mm}}$

Por lo tanto: $w_{pp} = 3$ kN/m

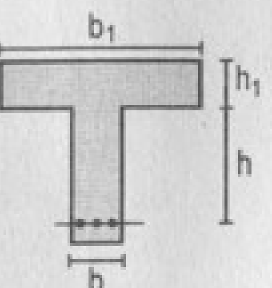
Calculamos el área del refuerzo:

$$A_a = \frac{1}{f_a}\left(\frac{1}{2}f_c bkd\right) = \frac{1}{140\times10^6}\left(\frac{1}{2}\times12\times10^6\times0,2\times0,406\times0,63\right)$$

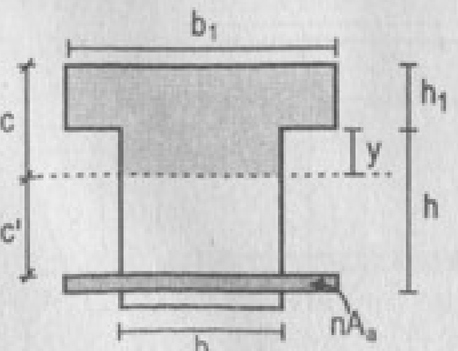
$A_a = 2,19 \times 10^{-3}$ m^2 $\Rightarrow$ $\boxed{A_a = 2190 \text{ mm}^2}$

1044: problema ilustrativo

1045. En la viga en T de concreto armado, de la figura, $b_1 = 500$ mm $h_1 = 150$ mm, $b = 250$ mm, $h = 500$ mm, $A_a = 3000$ mm^2 y $n = 10$. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero si el momento flexionante aplicado es 140 kN.m.



Resolución:



Calculamos la ubicación del E.N. para lo cual hacemos equilibrio:

$$\Sigma ay = 0: (b_1h_1)(h_1/2 + y) + (by)(y/2) - nA_a(h - y) = 0$$

Reemplazando valores:

$$(500)(150)(150/2 + y) + (250y)(y/2) - 3 \times 10^4 (500 - y) = 0$$

Haciendo operaciones:

$$y^2 + 840y - 75\,000 = 0 \Rightarrow y = 81,4 \text{ mm}$$

Calculamos el momento de inercia:

$$I = \frac{1}{3}(b_1)(h_1 + y)^3 - \frac{1}{3}(b_1 - b)(y)^3 + nA_a(h - y)^2$$

$$I = \frac{1}{3}(500)(231,4)^3 - \frac{1}{3}(250)(81,4)^3 + 3 \times 10^4 (418,6)^2$$

$$I = 7277 \times10^6 \text{ mm}^4 = 7277 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

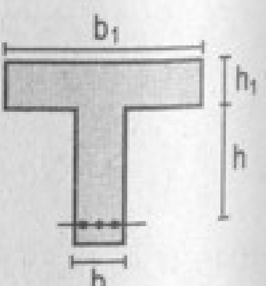
Calculamos el esfuerzo en el concreto:

$$f_c = \frac{Mc}{I} = \frac{(140\times10^3)(231,4\times10^{-3})}{7277\times10^{-6}} \Rightarrow \boxed{f_c = 4,45 \text{ MPa}}$$

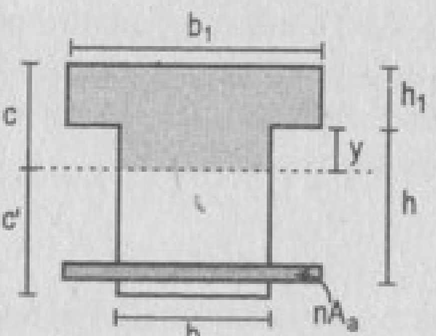
Calculamos el esfuerzo en el acero:

$$f_a = \frac{nMc'}{I} = \frac{10(140\times10^3)(418,6\times10^{-3})}{7277\times10^{-6}} \Rightarrow \boxed{f_a = 80,5 \text{ MPa}}$$

1046. Las dimensiones de la viga en T de concreto armado de la figura son $b_1 = 750$ mm, $h_1 = 100$ mm, $b = 300$ mm y $h = 450$ mm. Si $n = 8$ y $A_a = 3300$ mm^2, calcular el momento flexionante máximo que se puede aplicar sin exceder $f_c = 12$ MN/m^2 y $f_a = 140$ MN/m^2.



Resolución:



Calculamos la ubicación del E.N., para esto tomamos momentos:

$\Sigma ay = 0$: $(b_1h_1)(y + h_1/2) + (by)(y/2) - n\,A_a(h - y) = 0$

Reemplazando valores:

$(750)(100)(y + 50) + 300\,y^2/2 - 8 \times 3300\,(450 - y) = 0$

Haciendo operaciones: $y^2 + 676y - 54\,200 = 0 \Rightarrow y = 72{,}4$ mm

Calculamos el momento de inercia:

$$I = \frac{1}{3}(b_1)(h_1 + y)^3 - \frac{1}{3}(b_1 - b)(y^3) + nA_a(h - y)^2$$

$$I = \frac{1}{3}(750)(172{,}4)^3 - \frac{1}{3}(450)(72{,}4)^3 + 8(3300)(377{,}6)^2$$

$I = 4988 \times 10^6$ mm^4 $= 4988 \times 10^{-6}$ m^4

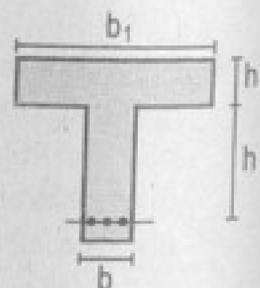
Calculamos el momento que se puede aplicar:

$$f_c = \frac{Mc}{I} = \frac{M(172{,}4\times10^{-3})}{4988\times10^{-6}} \le 12 \times 10^6 \Rightarrow M \le 347 \text{ kN.m}$$

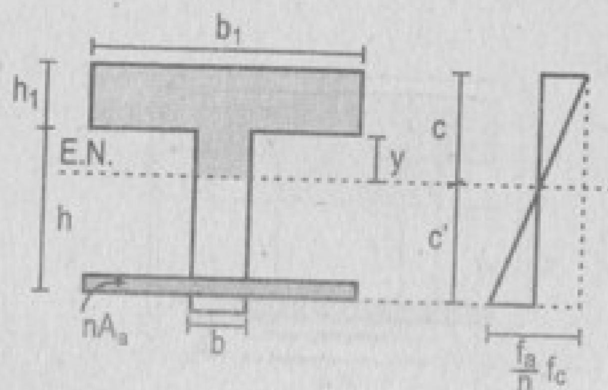
$$f_a = \frac{nMc'}{I} = \frac{8M(377{,}6\times10^{-3})}{4988\times10^{-6}} \le 140 \times 10^6 \Rightarrow M \le 231 \text{ kN.m}$$

Escogemos el valor menor: $\boxed{M = 231 \text{ kN.m}}$

1047. En la viga de concreto armado de la figura las dimensiones son b_1 = 900 mm, h_1 = 80 mm, b = 300 mm, h = 520 mm y n = 9. Determinar A_a y el momento máximo que puede resistir con armadura estricta si f_c = 9 MPa y f_a = 160 MPa.



Resolución:



Calculamos la posición del E.N. considerando armadura estricta. Por semejanza en el gráfico de la derecha:

$$\frac{80+y}{80+520} = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n}+f_c} = \frac{9}{\frac{160}{9}+9} \Rightarrow y = 121{,}7 \text{ mm}$$

Para calcular el área del acero tomamos momentos en el E.N.:

$$\Sigma(ay) = 0: (b_1h_1)\left(y + \frac{h_1}{2}\right) + (by)(y/2) - nA_a(h - y) = 0$$

Reemplazando valores y operando:

$$A_a = \frac{(900)(80)(121{,}7+40)+(300)(121{,}7)^2/2}{9(520-121{,}7)} \Rightarrow \boxed{A_a = 3868 \text{ mm}^2}$$

Antes de calcular el momento que puede resistir, calculamos I:

$$I = \frac{1}{3}(b_1)(h_1 + y)^3 - \frac{1}{3}(b_1 - b)(y)^3 + nA_a(h - y)^2$$

$$I = \frac{1}{3}(900)(201{,}7)^3 - \frac{1}{3}(600)(121{,}7)^3 + 9(3868)(398{,}3)^2$$

$I = 7624 \times 10^6$ mm^4 $\Rightarrow I = 7624 \times 10^{-6}$ m^4

Calculamos M considerando f_c = 9 MPa:

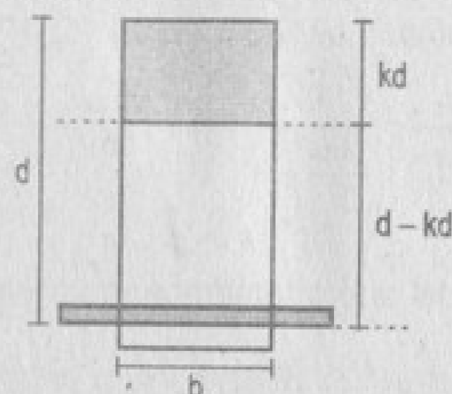
$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(9\times10^6)(7624\times10^{-6})}{201{,}7\times10^{-3}} \Rightarrow \boxed{M = 340 \text{ kN.m}}$$

Calculamos M considerando el esfuerzo admisible del acero:

$$M = \frac{(f_a/n)I}{c'} = \frac{(160/9)(7624)}{398{,}3\times10^{-3}} \Rightarrow \boxed{M = 340 \text{ kN.m}}$$

1048. La viga de concreto armado del problema 1028 está sometida a una fuerza cortante vertical de 120 kN. Calcular el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo de adherencia si los refuerzos consisten en 6 varillas de 20 mm.

Resolución:



Para V = 120 kN

I. Calculamos el esfuerzo cortante máximo:

$$\tau_{máx} = \frac{V}{jhb} = \frac{120 \times 10^3}{(0{,}857)(0{,}75)(0{,}5)} = 373 \times 10^3 \text{ N/m}^2 \Rightarrow \tau_{máx} = 373 \text{ kPa}$$

II. Calculamos el esfuerzo de adherencia: $\tau = \dfrac{V}{jd\Sigma_o}$

Para las 6 varillas de 20 $\Sigma_0 = 6(4\times 20) = 480$ mm

$$\tau = \frac{120 \times 10^3}{(0{,}857)(0{,}75)(0{,}48)} = 389 \text{ kPa} \quad \therefore \quad \boxed{t_{máx} = 373 \text{ kPa}}$$

1049. Determinar la fuerza cortante vertical que puede ser soportada por la viga del problema 1027 si el refuerzo consta de 4 varillas de 10. Supóngase que el esfuerzo cortante admisible es de 350 kN/m² y el esfuerzo de adherencia admisible, de 550 kN/m².

Resolución:

Calculamos el corte considerando el $\tau_{máx}$:

$$\tau_{máx} = \frac{V}{jhb} \Rightarrow V = (\tau_{máx})jhd \Rightarrow V = (350 \times 10^3)(0{,}9)(0{,}5)(0{,}3)$$

V = 47 kN

Considerando τ de adherencia:

$\Sigma_0 = 4(4\times10) = 160$ mm

$V = \tau\, jd\, \Sigma_o = (550)(0{,}9)(0{,}5)(0{,}16)$

V = 39,6 kN $\quad \therefore \quad \boxed{V_{máx} = 39{,}6 \text{ kN}}$

CAPÍTULO 11

COLUMNAS

1101. Problema ilustrativo.

1102. Una pieza de madera escuadrada de 50 ×100 mm se emplea como columna con los extremos empotrados. Calcular la longitud mínima para que pueda aplicarse la fórmula de Euler si E = 10 GPa y el límite de proporcionalidad es de 30 MPa. ¿Qué carga axial podrá soportar con un factor de seguridad igual a 2, si la longitud es de 2,50 m?

Resolución:

Dadas las dimensiones de la sección recta, calculamos el radio de giro menor:

$$I = \frac{1}{12}(0{,}1)(0{,}05)^3 = 1{,}042 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = (0{,}1)(0{,}05) = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Entonces: $r = \sqrt{\dfrac{I}{A}} = \sqrt{\dfrac{1{,}042\times10^{-6}}{5\times10^{-3}}} = 0{,}0144$ m

Para calcular la longitud usamos la expresión:

$$\sigma = \frac{E\pi^2}{(L'/r)^2}, \text{ pero } L' = \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2L' = 2\pi r\sqrt{\frac{E}{\sigma}} = 2\pi(0{,}0144)\sqrt{\frac{10\times10^9}{30\times10^6}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 1{,}65 \text{ m}}$$

Para calcular P_{adm} tenemos lo siguiente: L = 2,5 m

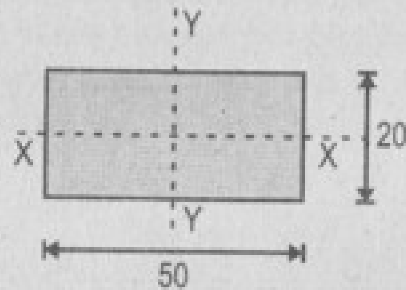
$$P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2} = \frac{(10\times10^9)(1{,}042\times10^6)\pi^2}{(0{,}5\times2{,}5)^2} \Rightarrow P_{cr} = 65{,}8 \text{ kN}$$

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{F_s} = \frac{65{,}8}{2} \Rightarrow \boxed{P_{adm} = 32{,}9 \text{ kN}}$$

1103. Un tornapuntas de aluminio tiene una sección rectangular de 20 × 50 mm. Un perno que atraviesa cada extremo lo asegura de manera que actúa como columna doblemente articulada con respecto a un eje perpendicular a la dimensión de 50 mm y como empotrada, respecto a un eje normal a la de 20 mm. Determinar la carga axial de seguridad con un factor igual a 2,5, siendo E = 70 GPa y la longitud de 2 m.

Resolución:

Tenemos la sección de 20 × 50 mm, calculamos los momentos de inercia.



$$I_x = \frac{1}{12}(0{,}05)(0{,}02)^3 = 33{,}333 \times 10^{-9}\ m^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(0{,}02)(0{,}05)^3 = 208{,}333 \times 10^{-9}\ m^4$$

Calculamos las cargas críticas:

En el eje X (doblemente empotrado)

$(L_e) = L/2 = 2/2 = 1$ m

$$P_{cr} = \frac{EI_x\pi^2}{L_e^2} = \frac{(70\times10^9)(33{,}333\times10^{-9})\pi^2}{(1)^2} = 23{,}03\ kN$$

En el eje Y (doblemente articulado)

$(L_e) = L = 2$ m

$$P_{cr} = \frac{EI_y\pi^2}{L_e^2} = \frac{(70\times10^9)(208{,}333\times10^{-9})\pi^2}{(2)^2} = 35{,}98\ kN$$

De los dos valores tomamos el menor: $P_{cr} = 23{,}03$ kN

Luego la carga de seguridad con un factor de seguridad de 2,5 es.

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{F_s} = \frac{23{,}03}{2{,}5} \Rightarrow \boxed{P_{adm} = 9{,}2\ kN}$$

1104. Una barra de aluminio de sección cuadrada y 3 m de longitud soporta una carga de 40 kN. Si los extremos están articulados con rótulas, determinar el lado de la sección, con valor de E = 70 GPa.

Resolución:

Tenemos una sección cuadrada de lado b, con 3 m de longitud, $P_{cr} = 40$ kN y extremos articulados.

Ampliamos la expresión de carga crítica:

$$I = \frac{P_{cr}L^2}{E\pi^2} = \frac{(40\times10^3)(3)^2}{(70\times10^9)(\pi)^2} = \frac{b^4}{12}$$

De donde obtenemos: $\boxed{b = 0{,}05\ m = 50\ mm}$

1105. Repetir el problema anterior si la barra fue de madera con E = 10 GPa.

Resolución:

Tenemos los siguientes datos:

L = 3 m $\quad P_{cr} = 40$ kN $\quad$ E = 10 GPa

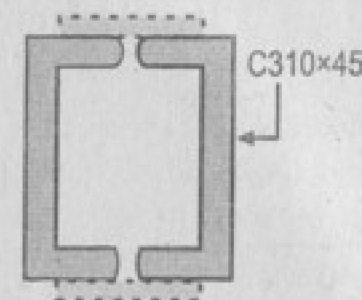
Luego aplicamos la expresión anterior:

$$I = \frac{P_{cr}L^2}{E\pi^2} = \frac{(40\times10^3)(3)^2}{(10\times10^9)(\pi)^2} = \frac{b^4}{12},\ \text{de donde: } \boxed{b = 0{,}081\ m = 81\ mm}$$

1106. Dos perfiles C310 × 45 se unen mediante placa en celosía de manera que el momento de inercia sea el mismo con respecto a los dos ejes principales de la sección compuesta así formada. Determinar la longitud mínima de esta columna, que se supone articulada en sus extremos, con E = 200 GPa y límite de proporcionalidad de 240 MPa para poder aplicar la fórmula de Euler. ¿Qué carga podría soportar con una longitud de 12 m y un factor de seguridad de 2,5?

Resolución:

Tenemos la sección:



Sección transversal

$I_c = 67{,}3 \times 10^6$ mm⁴ (tabla)

$r_x = 109$ mm

$I_x = 2I_c$

$I_x = 134{,}6 \times 10^6\ mm^4$

(Igual para ambos ejes)

Además: $L_e = L$; $E = 200$ GPa; $G = 240$ MPa

Usamos la expresión:

$$L = \pi r_x \sqrt{\frac{E}{\sigma}} = \pi(109\times10^{-3})\sqrt{\frac{200\times10^9}{240\times10^6}} \Rightarrow \boxed{L = 9{,}89 \text{ m}}$$

Para calcular la carga que puede soportar para una longitud de 12 m y $F_S = 2{,}5$ calculamos primero la carga crítica de Euler.

$$P_{cr} = \frac{IE\pi^2}{L^2} = \frac{(134{,}6\times10^{-6})(200\times10^9)\pi^2}{(12)^2} = 1845 \text{ kN}$$

Luego: $P_{adm} = P_{cr}/F_s \Rightarrow P_{adm} = \dfrac{1845}{2{,}5} \quad \therefore \quad \boxed{P_{adm} = 738 \text{ kN}}$

1107. Repetir el problema 1106 si un extremo está empotrado y el otro articulado.

Resolución:

Como datos tenemos: $\sigma_x = 109$ mm, $I_x = 134{,}6 \times 10^6$ mm^4, $\sigma = 240$ MPa, $A = 5690$ mm^2, $E = 200$ GPa

La longitud efectiva para las condiciones es: $L_e = 0{,}7L$

Luego utilizando la expresión:

$$0{,}7L = \pi r_x \sqrt{\frac{E}{\sigma}} = 9{,}89 \text{ (prob. anterior)} \Rightarrow \boxed{L = 14{,}13 \text{ m}}$$

Para L = 12 m:

$$P = \sigma A = (240 \times 10^6)(5690 \times 10^{-6}) = 1365{,}6 \text{ kN}$$

Luego: $P_{adm} = \dfrac{P}{F_s} = \dfrac{1365{,}6}{2{,}5} \Rightarrow \boxed{P_{adm} = 546 \text{ kN}}$

1108. Escoger el perfil W más ligero para una columna de 8 m de longitud con extremos empotrados que ha de soportar una carga de 270 kN con un coeficiente de seguridad de 2,5. El límite de proporcionalidad es de 200 MPa y E = 200 GPa.

Resolución:

Tenemos una carga crítica de Euler de 270 kN. Además:

$L_e = L/2 = 8/2 = 4$ m (doble empotrado)
$F_s = 2{,}5$
$E = 200$ GPa

Donde la carga de trabajo es 2,5(270) = 675

$$I \geq \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(675\times10^3)(4)^2}{(200\times10^9)\pi^2} = 5{,}47 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \geq 5{,}47 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$r \leq \frac{L}{100} = \frac{4000}{100} = 40 \text{ mm}$$

Escogemos W200 × 36 $\begin{cases} I = 7{,}64 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ r = 40{,}9 \text{ mm} \end{cases}$

Considerando el límite de proporcionalidad:

$$A \geq \frac{(675\times10^3)}{200\times10^6} = 3375 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \Rightarrow A \geq 3375 \text{ mm}^2$$

$r \geq 40$ mm

Escogemos un W200 × 36 $\begin{cases} A = 4580 \text{ mm}^2 \\ r = 40{,}9 \text{ mm} \end{cases}$

∴ **seleccionamos un perfil W200 × 36**

1109. Elegir un perfil W para una columna de 12 m doblemente empotrada que ha de soportar una carga axial de 700 kN, con un factor de seguridad de 2,0. Supóngase que el límite de proporcionalidad es de 200 MPa y E = 200 GPa.

Resolución:

La carga de trabajo, multiplicada por el factor de seguridad 2, da una carga crítica de 1400 kN, aplicando la fórmula de Euler y despejando I se obtiene:

$$I \geq \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1400\times10^3)(12\times0,5)^2}{200\times10^9\ \pi^2} = 25,5\times10^{-6}\ m^4 = 25,5\times10^6\ mm^4$$

Además:

$$\frac{L}{r} \geq 100 \ \Rightarrow\ r \leq \frac{L}{100} = \frac{6000}{100} = 60\ mm$$

También considerando el límite de proporcionalidad:

$$\sigma_{PL} = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\sigma_{PL}} = \frac{1400\times10^3}{200\times10^6} = 7\times10^{-3}\ m^2 = 7000\ mm^3$$

Escogemos de la tabla B-2:

W200 × 86, donde: $I = 31,4 \times 10^6\ mm^4 \geq 25,5 \times 10^6\ mm^4$

$r = 53,3\ mm \leq 60\ mm$

$A = 11\,100\ mm^2 \geq 7000\ mm^2$

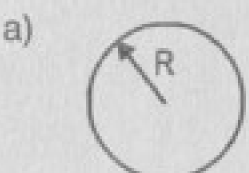
1110 y 1111: problemas ilustrativos

1112. Determinar la relación de esbeltez de una columna de 4 m con extremos empotrados si su sección es (a) una circunferencia de 50 mm de radio y (b) un cuadrado de 40 mm de lado. Use el concepto de longitud efectiva.

Resolución:

La relación de esbeltez es L/r. Tenemos una longitud de 0,5L, igual a 0,5 (4 m) = 2 m para la sección:

a)

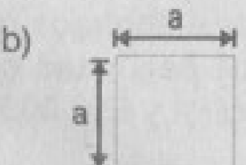


$R = 50\ mm$

$r = 0,5R = 0,5(50) = 25\ mm$

$\therefore\ L/r = 2000/25 \Rightarrow \boxed{L/r = 80}$

b)



$a = 40\ mm$

$r = 0,29a = 0,29(40) = 11,6\ mm$

$\therefore\ L/r = 2000/11,6 \Rightarrow \boxed{L/r = 173}$

1113. Usando especificaciones de la AISC, determinar la longitud máxima de un perfil W360 × 122 si se va usar como columna con extremos articulados para soportar una carga de 1200 kN, usando $\sigma_{pc} = 450$ MPa.

Resolución:

Para el perfil W360 × 122, tenemos:

$A = 15\,500\ mm^2$ (área) $\quad r_y = 63$ mm (radio de giro menor)

Además como datos:

$L_e = L$ (extremos articulados) ; $P = 1200$ kN ; $\sigma_{pc} = 450$ MPa

Calculamos la relación de esbeltez C_c:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{450\times10^6}} = 94$$

Asumimos lo siguiente:

Si $L_e/r > C_c \quad \Rightarrow \quad L_e = L > (63)(94) = 5922$ mm

Entonces: $\sigma_T = \dfrac{P}{A} = \dfrac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} \quad \Rightarrow \quad L_e = r\left(\sqrt{\dfrac{12\pi^2 EA}{23P}}\right)$

Reemplazando:

$$L_e = 63\left(\sqrt{\frac{12\pi^2(200\times10^9)(15\,500\times10^{-6})}{23(1200\times10^3)}}\right) = 7245\ mm$$

$L_e = 7245 > 5922 \qquad \therefore \qquad \boxed{L = 7,25\ m}$

1114. Aplicando las especificaciones de la AISC, determinar la máxima longitud que puede tener una columna formada con un perfil W250 × 167 para soportar una carga de 1600 kN, con extremos articulados. Use $\sigma_{pc} = 380$ MPa.

Resolución:

Para el perfil W250 × 167 de la tabla tenemos lo siguiente:

$A = 21\,300\ mm^2 \qquad r_y = 68,1$ mm

Además:

$L_e = L$ (extremos articulados) $\qquad P = 1600$ kN $\qquad \sigma_{pc} = 380$ MPc

Calculamos la relación de esbeltez C_c:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2\left(200\times10^9\right)}{380\times10^6}} = 102$$

Asumimos lo siguiente:

Si: $L_e/r > C_c \quad \Rightarrow \quad L_e = L > (68{,}1)(102) = 6950$

Entonces: $\sigma_T = \dfrac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} \quad \Rightarrow \quad L_e = r\left(\sqrt{\dfrac{12\pi^2 EA}{23P}}\right)$

Reemplazando:

$$L_e = 681\sqrt{\frac{12\pi^2\left(200\times10^9\right)\left(21\,300\times10^{-6}\right)}{23\left(1600\times10^3\right)}} = 7980 \text{ mm} \; > 6950$$

$\therefore \quad \boxed{L = 8 \text{ m}}$

1115. Calcular el coeficiente de seguridad que debería emplearse en la fórmula de Euler para que diera la misma capacidad de carga, para el acero, dada por el límite superior para miembros primarios por la aplicación de: (a) la fórmula lineal dada por la ecuación (11-8); (b) la ecuación (11-9) de Rankine-Gordon.

Resolución:

Calculamos el coeficiente de seguridad para los siguientes casos.

a) Usando la fórmula lineal: $\dfrac{P}{A} = 110 - 0{,}483\dfrac{L}{r}$

Para elementos primarios $L/r = 120$

$$\therefore \quad \frac{P}{A} = 110 - 0{,}483\,(120) = 52{,}04 \text{ MPa}$$

Para el acero, aplicando Euler:

$$\frac{P}{A} = \frac{E\pi^2}{(L/r)^2} = \frac{200\times10^9\,\pi^2}{(120)^2} = 137{,}08 \text{ MPa}$$

$$\therefore \quad F_S = \frac{137{,}08}{52{,}04} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_S = 2{,}63}$$

b) Usando la expresión de Rankine-Gordon:

$$\frac{P}{A} = \frac{124}{1 + \dfrac{1}{18\times10^3}(120)^2} = 68{,}88 \text{ MPa}$$

$$\therefore \quad F_S = \frac{137{,}08}{68{,}88} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_S = 1{,}99}$$

1116. Un perfil W360 × 134 se usa como columna con extremos articulados. Usando las especificaciones de la AISC, determinar la carga máxima que puede aplicársele si (a) L = 9 m y (b) L = 15 m, usando σ_{pc} = 290 MPa en ambos casos.

Resolución:

Para determinar la carga máxima usando las especificaciones de la AISC para el perfil W360 × 134:

A = 17 100 mm^2 (área) ; r_y = 94 mm (radio menor) ; σ_{pc} = 290 MPa

De donde tenemos el límite de esbeltez:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2\left(200\times10^9\right)}{290\times10^6}} = 117$$

a) Si $L_e = L$ = 9 m (extremos articulados)

$$\frac{L_e}{r} = \frac{9000}{94} = 96 \; < \; C_c = 117$$

El esfuerzo de trabajo está dado por:

$$\sigma_T = \left\{1 - \frac{(L_e/r)^2}{2\,C_c^{\,2}}\right\}\frac{\sigma_{pc}}{F_s} \qquad \ldots(\alpha)$$

Donde: $F_s = \dfrac{5}{3} + \dfrac{3(L_e/r)}{8C_c} - \dfrac{(L_e/r)^3}{8C_c^{\,2}} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{3(96)}{8(117)} - \dfrac{(96)^3}{8(117)^3} = 1{,}9$

Luego reemplazando valores en (α):

$$\sigma_T = \left\{1 - \frac{(96)^2}{2(117)^2}\right\}\frac{290}{1{,}9} = 102{,}0 \text{ MPa}$$

La carga admisible es: $P = \sigma A$

$$P = (102{,}0 \times 10^6)(17\ 100 \times 10^{-6}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 1740 \text{ kN}}$$

b) Si $L_e = L = 15$ m

$$\frac{L_e}{r} = \frac{15\ 000}{94} = 160 > C_c = 117$$

El esfuerzo de trabajo está dado por:

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(160)^2} = 40{,}2 \text{ MPa}$$

Luego la carga admisible es $P = \sigma A$:

$$P = (40{,}2 \times 10^6)(17\ 100 \times 10^{-6}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 687 \text{ kN}}$$

1117. Un perfil W200 × 100 se emplea como columna de 9 m con sus extremos empotrados. (a) Empleando las especificaciones de la AISC, calcular la carga de seguridad que puede aplicarse si la longitud efectiva es tres cuartos de la real. (b) Determinar la carga de seguridad si la columna estuviera también sujeta lateralmente en su punto medio. Use $\sigma_{pc} = 380$ MPa.

Resolución:

Para el perfil W200 × 100: $\begin{cases} A = 12\ 700 \text{ mm}^2 \\ r_x = 94{,}5 \text{ mm} \\ r_y = 53{,}8 \text{ mm} \end{cases}$

L = 9 m (extremos empotrados)

a) Calculamos $C_c = \sqrt{\dfrac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}}$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{380\times10^6}} = 102$$

Además:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{\frac{3}{4}(9000)}{53{,}8} = 125 > C_c = 102$$

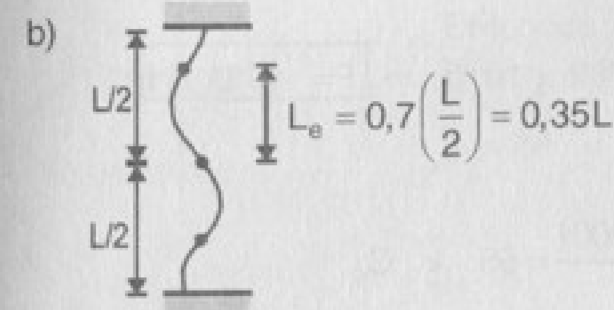
Entonces el esfuerzo de trabajo σ_T, está dado por:

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(125)^2} = 65{,}9 \text{ MPa}$$

Y la carga de seguridad es $P = \sigma A$

$P = (65{,}9 \times 10^6)(12\ 700 \times 10^{-6}) = 837$ kN

b)



Del gráfico:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{0{,}35(9000)}{53{,}8} = 58{,}55 < C_c$$

De donde el esfuerzo de trabajo es:

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{FS}$$

Pero: $$FS = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(58{,}55)}{8(102)} - \frac{(58{,}55)^3}{8(102)^3} = 1{,}858$$

Entonces $$\sigma_T = \left[1 - \frac{(58{,}55)^2}{2(102)^2}\right]\frac{380\times10^6}{1{,}858} = 170{,}8 \text{ MPa}$$

y la carga de seguridad es: $P = \sigma A$

Por tanto: $P = (170{,}8 \times 10^6)(12\ 700 \times 10^{-6}) = 2200$ kN $\Rightarrow \boxed{P = 2200 \text{ kN}}$

1118. Repetir el problema 1117 suponiendo que la longitud de la columna sea de 14 m con un perfil W310 × 500.

Resolución:

Para el perfil W310 × 500 $\begin{cases} A = 63\ 700 \text{ mm}^2 \\ r_x = 163 \text{ mm} \\ r_y = 88 \text{ mm} \end{cases}$

L = 14 m

a) Sabemos que $C_c = 102$

Además: $\frac{L_e}{r} = \frac{\frac{3}{4}(14\,000)}{88} = 119 \;>\; C_c = 102$

Entonces el esfuerzo de trabajo σ_T, está dado por:

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(119)^2} = 72{,}7 \text{ MPa}$$

Y la carga de seguridad es $P = \sigma A$

Por tanto: $P = (72{,}7 \times 10^6)(63\,700 \times 10^{-6}) \Rightarrow$ **P= 4631 kN**

b) Tenemos:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{0{,}35(14\,000)}{88} = 55 \;<\; C_c$$

Entonces:

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{FS}$$

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(L_e/r)}{C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^{\,3}} = 5/3 + \frac{3}{8}\frac{(55)}{(102)} - \frac{(55)^3}{8(102)^3} = 1{,}85$$

Luego:

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(55)^2}{2(102)^2}\right]\frac{380\times10^6}{1{,}85} = 175{,}5 \text{ MPa}$$

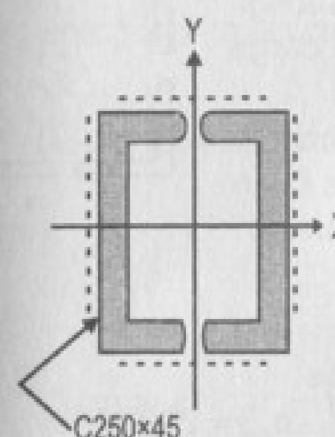
Y la carga de seguridad es $P = \sigma A$

Por tanto: $P=(175{,}5 \times 10^6)\,(63\,700 \times 10^{-6}) \Rightarrow$ **P = 11 180 kN**

1119. Una columna de acero de 10 m de longitud se construye con dos perfiles C250 × 45 unidos mediante celosía, de manera que la sección compuesta tiene igual momento de inercia con respecto a los dos ejes principales. Determinar la carga de seguridad aplicando las especificaciones de la AISC, con σ_{pc} = 380 MPa.

Resolución:

Para la sección compuesta tenemos lo siguiente:



$r_x' = 86{,}9$ mm, $A' = 5670 \text{ mm}^2$ } Para el C250 × 45 (tabla)

Entonces: $r_x' = r_x = 86{,}9$ mm, $A = 2A' = 11\,340 \text{ mm}^2$ } Toda la sección

Además: $L_e = L = 10$ m $\quad \sigma_{pc} = 380$ MPa

Usando las expresiones de esbeltez y reemplazando los datos tenemos:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = 102$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{10(1000)}{86{,}9} = 115$$

$$\frac{L_e}{r} > C_c$$

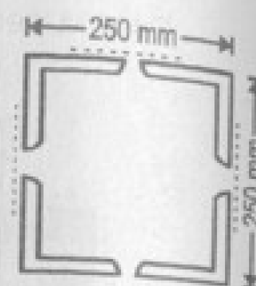
El esfuerzo de trabajo es:

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(115)^2} = 77{,}87 \text{ MPa}$$

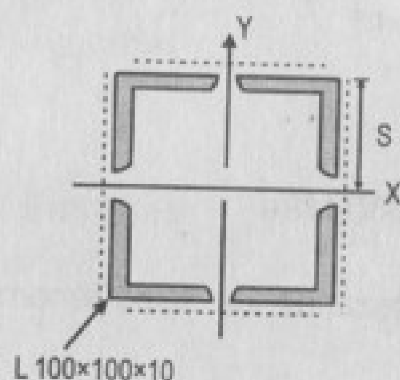
Así, la carga admisible para esta sección es:

$P = \sigma_T A = (77{,}87 \times 10^6)\,(11\,340 \times 10^{-6}) \quad \therefore$ **P = 883 kN**

1120. Cuatro ángulos de 100 × 100 × 10 mm se unen mediante placas en celosía para formar una sección compuesta, como se indica en la figura. Aplicando las especificaciones de la AISC, con σ_{pc} = 290 MPa, determinar la longitud máxima que puede tener si ha de soportar una carga de 500 kN.
¿Cuál debe ser la longitud libre entre ángulos, de manera que su esbeltez sea, como máximo, igual a las tres cuartas partes de la correspondiente a la sección compuesta?

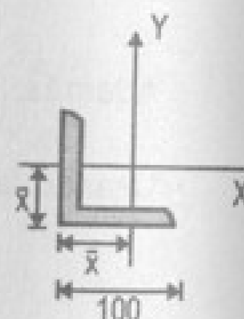


Resolución:



Tenemos los datos:
P = 500 kN σ_{pc} = 290 MPa
L = ?

Para el ángulo: (de tabla)
A' = 1920 mm²
r' = 30,4 mm
I' = 177 × 10⁶ mm⁶
$\bar{x}$' = 28,2 mm



Para la sección compuesta:

$$I = \Sigma(I_i + A_i d_i^2) \quad y \quad d_i = s - \bar{x} = 125 - 28{,}2$$

$$d_i = 96{,}8 \text{ mm}$$

$$I = 4(1{,}77 \times 10^6 + \overbrace{1920 \times 96{,}8^2}^{17{,}99\times10^6}) = 4(19{,}76 \times 10^6)$$

$$A = \Sigma A_i = 4A' = 4(1920) = 7680 \text{ mm}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4\times19{,}76\times10^6}{4(1920)}} = 101 \text{ mm}$$

La relación de esbeltez límite es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{290\times10^6}} = 117$$

Asumimos:
i) $L = L_e$ (extremos articulados) ii) $L_e/r > C_c$

Entonces, aplicando: $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} \Rightarrow \frac{L_e}{r} = \sqrt{\frac{12\pi^2 E}{23(P/A)}}$

Reemplazando valores obtenemos:

$$\frac{L_e}{r} = \sqrt{\frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(500\times10^3/7680\times10^{-6})}} = 125{,}8$$

Cumple ii) $L_e/r = 125{,}8 > C_c = 117$:

$$L = L_e = 125{,}8(101) \Rightarrow \boxed{L = 12{,}7 \text{ m}}$$

Para obtener la separación libre entre ángulos:

$$\frac{L'}{r'} = \frac{3}{4}\left(\frac{L_e}{r}\right) = \frac{3}{4}(125{,}8) = 94{,}35$$

De donde: L' = 94,35(30,4) = 2,8 m

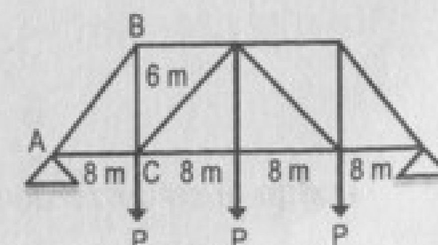
Verificamos que el esfuerzo $\sigma_T > \sigma_{aplicado}$:

$$F_s = 5/3 + 3(L_e/r)/8C_c - (L'/r')^3/8C_c^3 = 1{,}9$$

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L'/r')^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_s} \Rightarrow \sigma_T = \left[1 - \frac{(94{,}35)^2}{2(117)^2}\right]\frac{290\times10^6}{1{,}9} = 103 \text{ MPa}$$

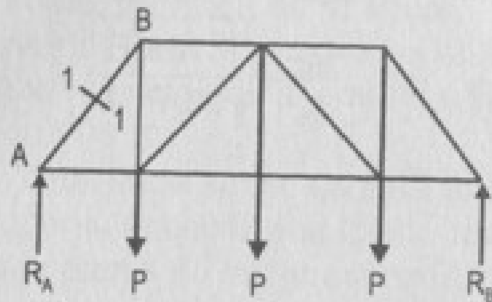
$$\sigma_{aplicado} = \frac{P}{A} = \frac{500\times10^3}{7680\times10^{-6}} = 65 < \sigma_T$$

1121. En la estructura de un puente, representada en la figura, la barra AB está formada por dos perfiles C230 × 30 unidos mediante celosías, de manera que la sección resultante tenga igual momento de inercia respecto de los ejes de simetría. Si la carga de seguridad P viene dada por la resistencia de la barra AB, determinarla mediante las especificaciones AISC con σ_{pc} = 290 MPa.



Resolución:

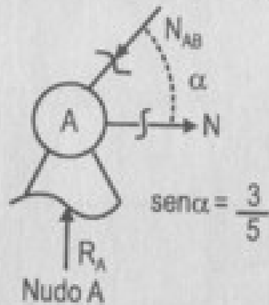
Debemos calcular P. Primeramente calculamos la fuerza axial en la barra AB.



Por ser simétrico:

$R_A = R_B = 3P/2$

Equilibrio en el nudo (A):

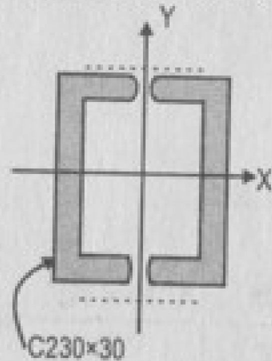


$$\Sigma F_V = 0: R_A - N_{AB}\text{sen}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_{AB} = \frac{5}{3}R_A = \frac{5}{3}\left(\frac{3P}{2}\right)$$

$$\therefore\ N_{AB} = 2{,}5P$$

Para la sección transversal:



$r = r_x' = 81{,}9$ mm

$A = 2A' = 2(3800) = 7600\ \text{mm}^2$

Además: $L_e = L = 10$ m

$\sigma_{pc} = 290$ MPa

Calculamos la relación de esbeltez:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{pc}}} = 117$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{10(10^3)}{81{,}9} = 122{,}1$$

$$\left.\right\}\ \frac{L_e}{r} > C_c$$

Luego el esfuerzo de trabajo está dado por:

$$\sigma_T = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{12\pi^2E}{23(L_e/r)^2} \Rightarrow \frac{2{,}5P}{7600\times10^{-6}} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(122{,}1)^2} \therefore \boxed{P = 210\ \text{kN}}$$

1122. Determinar una sección W que pueda trabajar como columna de 4 m soportando una carga de 420 kN. Aplicar las especificaciones de la AISC, con $\sigma_{pc} = 250$ MPa.

Resolución:

Usaremos tanteos.

Tenemos lo siguiente:

$L_e = 4$ m P = 420 kN $\sigma_{pc} = 250$ MPa

Para el acero con 250 MPa la relación de esbeltez límite es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{250\times10^6}} = 126$$

Primer ensayo:

Para $L_e/r = 0$, $F_S = 5/3$ y $\sigma_T = \sigma_{pc}/F_s = \dfrac{250}{5/3} = 150$

Suponiendo un esfuerzo inicial de 80%: 0,80(150) = 120 MPa

De donde obtenemos un área requerida de:

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{420\times10^3}{120\times10^6} = 3{,}5\times10^{-3}\ \text{m}^2 = 3500\ \text{mm}^2$$

De la tabla B-2, seleccionamos W200 × 31 con A = 4000 mm² y r = 32 mm:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{4\times10^3}{32} = 125 < 126$$

El esfuerzo de trabajo:

$F_s = 5/3 + [3(L_e/r)] / [8C_c] - (L_e/r)^3 / 8C_c^3]$

$= 5/3 + [3(125)] / [8(126)] - (125)^3 /[8(126)^3] = 1{,}92$

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_s} = \left[1 - \frac{(125)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1{,}92} \Rightarrow \sigma_T = 66{,}1\ \text{MPa}$$

Por lo tanto la carga admisible es:

$P = \sigma A = (66{,}1\times10^6)(3500\times10^{-6})$

$P = \sigma A = 231\ 350$ N = 231 kN < 420 kN (el perfil se rechaza)

Segundo ensayo:

De la tabla B-2 seleccionamos: W200 × 36 con A = 4580 mm^2 y r = 40,9.

Para esta sección tenemos una relación de esbeltez de:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{4\times10^3}{40,9} = 98 < 126$$

Calculamos el esfuerzo de trabajo:

F_S = 5/3 + [3(98)] / [8(126)] – (98)^3 / [8(126)^3] = 1,9

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(98)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1,9} = 91,78 \text{ MPa}$$

Con una carga admisible de: $P = \sigma_T A$

P = (91,78 × 10^6) (4580 × 10^{-6}) = 420 352

∴ P = 420,35 kN > 420 kN

El perfil W200 × 36 tiene una capacidad de carga ligeramente mayor al aplicado.

⇒ **w200×36 P = 420,35 kN**

1123. Aplicando las especificaciones de la AISC, determinar el perfil W más ligero para soportar una carga de 700 kN con una longitud efectiva de 5,5 m, suponiendo σ_{pc} = 250 MPa.

Resolución:

El procedimiento para determinar el perfil W, será el de prueba-error.

P = 700 kN $\quad L_e$ = 5,5 m $\quad \sigma_{pc}$ = 250 MPa

Calculamos la relación de esbeltez límite: $C_c = \sqrt{\dfrac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = 126$

Primer ensayo:

Para $L_e/r = 0$ ⇒ $F_S = 5/3$ y $\sigma_T = \dfrac{\sigma_{pc}}{F_S} = \dfrac{250}{5/3} = 150$

Considerando un esfuerzo inicial de 80%:

0,80(150) = 120 MPa

Para lo cual requerimos de un área:

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{700\times10^3}{120\times10^6} = 5,83 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 5833 \text{ mm}^2$$

De la tabla B-2, seleccionamos W200 × 52 con A = 6600 mm^2 y r = 51,8 mm.

De donde: $\dfrac{L_e}{r} = \dfrac{5,5\times10^3}{51,8} = 106 < 126$

Calculamos el esfuerzo del trabajo:

F_S = 5/3 + [3(106) / [8(126)] – (126)^3 / [8(126)^3] = 1,9

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \left[1 - \frac{(106)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1,9} = 85 \text{ MPa}$$

Con una carga admisible de: $P = \sigma_T A$

P = (85 × 10^6) (6600 × 10^{-6})

P = 561 000 = 561 kN < 700 kN (esta sección no aprueba)

Segundo ensayo:

De la tabla B-2, seleccionamos los siguientes perfiles:

W200 × 59	P = 651 kN
W250 × 67	**P = 708 kN**
W310 × 67	P = 674 kN

Escogemos un W250 × 67, con A = 8550 mm^2 y r = 51 mm.

1124. Repetir el problema anterior con una carga de 690 kN y σ_{pc} = 345 MPa.

Resolución:

Para este caso tenemos:

P = 690 kN $\quad L_e$ = 5,5 m $\quad \sigma_{pc}$ = 345 MPa

La relación de esbeltez límite es: $C_c = \sqrt{\dfrac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\dfrac{2\pi^2(200\times10^9)}{345\times10^6}} = 107$

Considerando los siguientes resultados del problema anterior, seleccionamos un perfil W200 × 59 con A = 7660 mm^2 y r = 51,9.

De donde la relación de esbeltez es: $\dfrac{L_e}{r} = \dfrac{5,5\times10^3}{51,9} = 106 < 107$

Calculamos el esfuerzo de trabajo $F_S = 1{,}92$

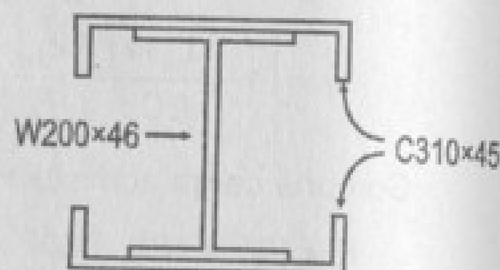
$$\sigma_T = \left[1-\frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \left[1-\frac{(106)^2}{2(107)^2}\right]\frac{345}{1{,}92} = 91{,}5 \text{ MPa}$$

Que presenta una carga admisible: $P = \sigma A$

$$P = (91{,}5 \times 10^6)(7660 \times 10^{-6} = 700\ 890) \Rightarrow \boxed{P = 700 \text{ kN}}$$

Esta sección presenta mayor carga admisible que la carga a soportar.

1125. Una columna de acero, con extremos articulados, de 10 m de altura se construye con un perfil W200 × 46 y dos C310 × 45 soldados entre sí como se indica en la figura. Determinar la carga axial de seguridad aplicando las especificaciones de la AISC con $\sigma_{pc} = 250$ MN/m².



Resolución:

Empezaremos calculando las propiedades de la sección compuesta a partir de los perfiles.

Para el C310 × 45:

$A' = 5690$ mm² $\qquad I' = 67{,}3 \times 10^6$ mm⁴

Para el W200 × 46:

$A'' = 5860$ mm² $\qquad I'' = 15{,}3 \times 10^6$ mm⁴

Para toda la sección:

$$A = 2A' + A'' = 2(5690) + 5860 = 17\ 240 \text{ mm}^2$$

$$I = 2I' + I'' = 149{,}9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{149{,}9\times10^6}{17\ 240}} = 93{,}2 \text{ mm}$$

Además: $L_e = L = 10$ m (ext. articulados)

De donde: $C_c = 126$ (para $\sigma_{pc} = 250$ MPa)

$L_e / r = 10 \times 10^3 / 93{,}2 = 107$

Como $L_e / r < C_c$, entonces el esfuerzo de trabajo está dado por:

$$F_S = \frac{5}{3} + \frac{3(107)}{8(126)} - \frac{(107)^3}{8(126)^3} = 1{,}91$$

$$\sigma_T = \left[1-\frac{(107)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1{,}91} = 83{,}6 \text{ MPa}$$

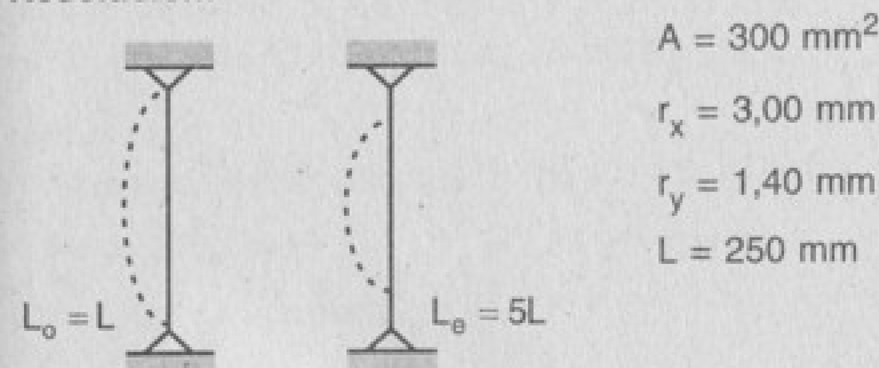
Para toda la sección la carga de trabajo es:

$$P = \sigma A = (83{,}6 \times 10^6)(17\ 240 \times 10^{-6}) = 1\ 441\ 264$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 1441 \text{ kN}}$$

1126. La biela de una máquina tiene una sección recta con las siguientes propiedades: área = 300 mm², $r_x = 3{,}00$ mm, $r_y = 1{,}40$ mm. Los pasadores de unión a la manivela y a la cruceta hacen que la biela trabaje como columna articulada con respecto al eje X y como empotrada con respecto al eje Y. Teniendo en cuenta la longitud efectiva, determinar la carga de seguridad si la longitud real es de 250 mm, aplicando la ecuación (11-9) de Rankine-Gordon.

Resolución:



$A = 300$ mm²

$r_x = 3{,}00$ mm

$r_y = 1{,}40$ mm

$L = 250$ mm

Pandeo con respecto al eje X: $L_e = L = 250$ mm

Con una relación de esbeltez de: $\frac{L_e}{r_x} = \frac{250}{3{,}00} = 83{,}33$

$$\text{El esfuerzo medio es: } \sigma = \frac{P}{A} = \frac{124}{1+\frac{1}{18000}(83{,}33)^2} = 89{,}48 \text{ MPa}$$

De donde: $P = \sigma A = (89{,}48 \times 10^6)(300 \times 10^{-6}) = 26\ 844$ N

Pandeo con respecto al eje Y:

$L_e = 0,5L = 0,5(250) = 125$ mm

Con una relación de esbeltez de: $\frac{L_e}{r_y} = \frac{125}{1,4} = 89,28$ MPa

El esfuerzo medio es: $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{124}{1 + \frac{1}{18000}(89,28)^2} = 85,94$ MPa

Con una carga de: $P = \sigma A = (85,94 \times 10^6)(300 \times 10^{-6}) = 25\,782$ N

El menor valor de la carga es: $\boxed{P = 25,8 \text{ kN}}$

1127. Obtener una fórmula parabólica de la forma general $P/A = \sigma - C(L/r)^2$ que sea aplicable a las columnas de aleación de aluminio con extremos articulados. Supóngase que la fórmula parabólica tiene que ser tangente a la fórmula de Euler con un factor de seguridad igual a 2, $\sigma = 110$ MPa y $E = 70$ GPa. *Indicación:* en las dos fórmulas, igualar los valores de las cargas unitarias y de las derivadas de estas con respecto a la esbeltez.

Resolución:

Sabemos que: $\frac{P}{A} = \sigma - C(L/r)^2 \quad ...(I) \quad \Rightarrow \left(\frac{P}{A}\right)' = -2C(L/r) \quad ...(\alpha)$

Por Euler: $\frac{P}{A} = \frac{E\pi^2}{(L/r)^2}$

De donde el esfuerzo de trabajo es:

$$\frac{P}{A} = \frac{1}{F.S.}\frac{E\pi^2}{(L/r)^2} \quad ...(II) \quad \Rightarrow \left(\frac{P}{A}\right)' = \frac{-2E\pi^2}{(F.S.)(L/r)^3} \quad ...(\beta)$$

De (α) y (β): $\left(\frac{L}{r}\right)^4 = \frac{E\pi^2}{(F.S.)C}$

Igualando (I) y (II) $\sigma - C(L/r)^2 = \frac{E\pi^2}{(F.S.)(L/r)^2} \Rightarrow (L/r)^2\sigma - C(L/r)^4 = \frac{E\pi^2}{(F.S.)}$

$$(L/r)^2\sigma - C\left(\frac{E\pi^2}{F.S(C)}\right) = \frac{E\pi^2}{F.S.} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{r} = \sqrt{\frac{2\pi E}{\sigma(F.S.)}}$$

Calculamos el valor de la esbeltez (límite) donde la tangente de las dos curvas son iguales:

$$\frac{L}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{(\sigma)(F.S.)}} = \sqrt{\frac{2(\pi^2)(70\times10^7)}{(110\times10^6)(2)}} = 79,3 \quad \therefore \quad \frac{L}{r} < 79,3$$

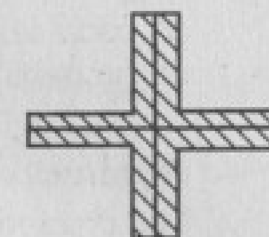
Igualamos los esfuerzos en este límite para calcular C:

$$110\times10^6 - C(79,3)^2 = \frac{(70\times10^9)\pi^2}{2(79,3)^2}$$

De donde: $C = 8757 \approx 8760$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{P}{A} = (110\times10^6) - 8760\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad ; \text{ para } \frac{L}{r} < 79,3$$

1128. Cuatro ángulos de 100 × 100 × 13 mm se remachan adosados como indica la figura. Determinar la carga de seguridad si se utilizan como columna de 4 m de extremos articulados. Aplicar las especificaciones de la AISC con $\sigma_{pc} = 250$ MPa.



Resolución:

Propiedades del ángulo 100 × 100 × 13:

$A^L = 2430$ mm² $\quad I^L = 2,24 \times 10^6$ mm⁴ $\quad x^L = 29,8$ mm

Para toda la sección:

$A = \Sigma A_i^L = 4A^L = 9720$ mm²

$$I = \Sigma\left[I_i + A_i^L(\bar{x}_i^L)^2\right] = 4\left[I^L + A^L(\bar{x}^L)^2\right]$$

$$I = 4[2,24 \times 10^6 + \underbrace{2430\,(29,8)^2}_{2,16\times10^6}] = 17,6 \times 10^6 \text{ m}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{17,6\times10^6}{9720}} = 42,55$$

Además: $L_e = 4$ m y $\sigma_{pc} = 250$ MPa

Calculamos la relación de esbeltez: $C_C = 126$ (para $\sigma_{pc} = 250$ MPa)

$L_e/r = 4 \times 10^3/42,55 = 94$

Podemos ver que $L_e/r < C_c$, entonces el esfuerzo de trabajo es:

$$F_S = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8\,C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = 1,89$$

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \left[1 - \frac{(94)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{189} = 95,5$$

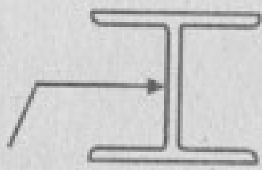
Para esta sección la carga de seguridades:

$P = \sigma A = (95,5 \times 10^6)(9720 \times 10^{-6}) = 928$ kN $\therefore$ $\boxed{P = 928 \text{ kN}}$

1129. Determinar la carga axial de seguridad que pueda aplicarse a una columna de aleación de aluminio 2014-T6 si su longitud es (a) 1 m y (b) 3 m. Supóngase, en cada caso, que las propiedades geométricas del perfil son idénticas a las de un perfil de acero S310 × 52.

Resolución:

Las propiedades geométricas son las del perfil S310 × 52.



$$\left.\begin{array}{l} A = 6650 \text{ mm}^3 \\ r = 25 \text{ mm} \end{array}\right\} \text{Tabla B - 3}$$

Las especificaciones para la aleación de aluminio del tipo 2014-T6 son:

$\sigma_T = 193$ MPa $\qquad L/r < 12$

$\sigma_T = 212 - 1,59\dfrac{L}{r} \qquad 12 < L/r < 55$

$\sigma_T = \dfrac{372 \times 10^3}{(L/r)^2} \qquad L/r > 55$

a) Para L = 1 m tenemos una relación de esbeltez de:

$$\frac{L}{r} = \frac{1 \times 10^3}{25} = 40 \quad \Rightarrow \quad 12 < \frac{L}{r} < 55$$

Luego el esfuerzo es: $\sigma_T = 212 - 1,59\ (40) = 148$ MPa

Esto da una carga axial de seguridad:

$P = \sigma A = (148 \times 10^6)\ (6650 \times 10^{-6}) = 984\ 200 \Rightarrow$ $\boxed{P = 984 \text{ kN}}$

b) Para L = 3 m, presenta una relación de esbeltez de:

$$\frac{L}{r} = \frac{3 \times 10^3}{25} = 120 > 55$$

Entonces, el esfuerzo es: $\sigma_T = \dfrac{372 \times 10^3}{(120)^2} = 25,83$ MPa

Luego, la carga axial de seguridad es:

$P = \sigma A = (25,83 \times 10^6)(6650 \times 10^{-6}) = 171\ 769 \Rightarrow$ $\boxed{P = 172 \text{ kN}}$

1130. Repetir el problema 1129 suponiendo que las propiedades geométricas del perfil son idénticas a las de un perfil de acero S250 × 52.

Resolución:

Para este caso las propiedades geométricas corresponden al perfil S250 × 52.

$$\left.\begin{array}{l} A = 6660 \text{ mm}^2 \\ r = 23,1 \text{ mm} \end{array}\right\} \text{Tabla B-3}$$

Las especificaciones para la aleación de aluminio del tipo 2014-T6 son:

$$\sigma_T = 212 - 1,59\left(\frac{L}{r}\right);\ 12 < \left(\frac{L}{r}\right) < 55$$

$$\sigma_T = \frac{372 \times 10^3}{(L/r)^2};\ \frac{L}{r} > 55$$

a) Para L = 1 m, la relación de esbeltez es:

$$\frac{L}{r} = \frac{1 \times 10^3}{23,1} = 43,29, \text{ de donde } \sigma_T = 212 - 1,59\ (43,29) = 143 \text{ MPa}$$

Esto da una carga axial de seguridad:

$P = \sigma A = (143 \times 10^6)(6660 \times 10^{-6}) = 952\ 380$ N $\Rightarrow$ $\boxed{P = 952 \text{ kN}}$

b) Para L = 3 m, la relación de esbeltez es: $\frac{L}{r}=\frac{3\times10^3}{23,1}=129,87>55$

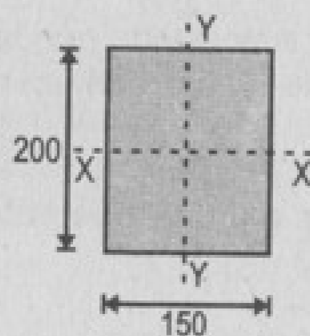
De donde: $\sigma_T=\frac{372\times10^3}{(129,87)^2}=22$ MPa

Luego, la carga axial de seguridad es:

$P=\sigma A=(22\times10^6)(6660\times10^{-6})=146\ 520$ N $\Rightarrow$ $\boxed{P=146,5\text{ kN}}$

1131, Determinar la carga axial de seguridad de una columna de roble de sección rectangular de 150 x 200 mm si su longitud es (a) 2 m y (b) 4 m, empleando E = 11,5 GPa.

Resolución:



$A=(150)(200)=30\ 000\text{ mm}^2$ $\qquad I_y=\frac{1}{12}(200)(150)^3=56,25\times10^6$

$r_y=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{56,25\times10^6}{30\ 000}}=43,3$ $\qquad r=\frac{d}{\sqrt{12}}=\frac{150}{\sqrt{12}}=43,3$

Para columnas de madera N.L.M.A. se recomienda la fórmula de Euler en la siguiente forma: $\sigma_T=\frac{3,619\ E}{(L/r)^2}$

a) Para L = 2 m: $\sigma_T=\frac{3,619\,(11,5\times10^9)}{(2\times10^3/43,3)^2}=19,5$ MPa

La carga axial de seguridad es:

$P=\sigma A=(19,5\times10^6)(30\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ $\boxed{P=585\text{ kN}}$

b) Cuando L = 4 m:

$\sigma_T=\frac{3,619\,(11,5\times10^9)}{(4\times10^3/43,3)^2}=4,87$ MPa

Entonces la carga axial de seguridad es:

$P=\sigma A=(4,87\times10^6)(30\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ $\boxed{P=146\text{ kN}}$

1132. Repetir el problema 1131 para una columna de pino de sección rectangular de 50 x 200 mm para la cual E = 11,2 GPa.

Resolución:

La dimensión mínima es d = 50.

El radio de giro vale $r=d/\sqrt{12}$.

Entonces: $r=50/\sqrt{12}=14,4$ mm y $A=50\times200=10\ 000\text{ mm}^2$

Aplicando la expresión recomendada por N. L. M. A. para calcular el esfuerzo, tenemos para:

a) L = 2 m: $\sigma_T=\frac{3,619E}{(L/r)^2}=\frac{3,619(11,2\times10^9)}{(2\times10^3/14,4)^2}=2,1$ MPa

De donde: $P=\sigma A=(2,1\times10^6)(10\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ $\boxed{P=21\text{ MPa}}$

b) L = 4 m: $\sigma_T=\frac{3,619(11,2\times10^9)}{(4\times10^3/14,4)^2}=0,53$ MPa

De donde: $P=\sigma A$

$P=(0,53\times10^6)(10\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ $\boxed{P=53\text{ kN}}$

1133. Problema ilustrativo.

En los problemas siguientes usar el planteamiento del máximo esfuerzo y las especificaciones de la AISC para columnas, a menos que se indique otra cosa.

1134. Una perfil W360 x 122 se emplea como columna de 10 m de longitud efectiva. Determinar la carga máxima que puede soportar con una excentricidad de 300 mm. ¿Dónde se debe situar la carga, sobre el eje X o sobre el Y? Supóngase $\sigma_{pc}=290$ MPa.

Resolución:

La tabla B-2 da las propiedades da un perfil W360 × 122 como:

$A = 15\ 500\ mm^2$ $\quad S_x = 2010 \times 10^3\ mm^3$ $\quad r = 63\ mm$

La relación de esbeltez $L_e/r = 10 \times 10^3 / 63 = 158{,}7$

Para $\sigma_{pc} = 290$ MPa, la relación de esbeltez límite es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{290\times10^6}} = 117$$

Ya que $L_e/r > C_c$, el esfuerzo de trabajo es:

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(158{,}7)^2} = 40{,}89 \text{ MPa}$$

Usando el enfoque de máximo esfuerzo:

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \Rightarrow 40{,}89 \times 10^6 = \frac{P}{15\ 500\times10^{-6}} + \frac{0{,}3P}{2010\times10^{-6}}$$

De donde: $P = 191 \times 10^3 \Rightarrow \boxed{P = 191 \text{ kN}}$

Esta carga está situada sobre el eje Y.

1135. Repetir el problema anterior si la longitud es de 4,5 m.

Resolución:

De la tabla B-2, el perfil W360 × 122 tiene las propiedades:

$A = 15\ 500\ mm^2$ $\quad S_x = 2010 \times 10^3\ mm^3$ $\quad r = 63\ mm$

La relación de esbeltez $L_e/r = 4{,}5 \times 10^3/63 = 71{,}4$

Para $\sigma_{pc} = 290$ MPa, la relación de esbeltez crítica es: $C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = 117$

De donde $L_e/r < C_c$, el esfuerzo de trabajo es como sigue:

$$F_S = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8\,C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8\,C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(71{,}4)}{8(117)} - \frac{(71{,}4)^3}{8(117)^3} = 1{,}87$$

$$\text{Entonces: } \sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2\,C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \left[1 - \frac{(71{,}4)^2}{2(117)^2}\right]\frac{290}{187} = 126{,}2 \text{ MPa}$$

Usando el enfoque de máximo esfuerzo:

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \Rightarrow 126{,}2 \times 10^6 = \frac{P}{15\ 500\times10^{-6}} + \frac{0{,}3\ P}{2010\times10^{-6}}$$

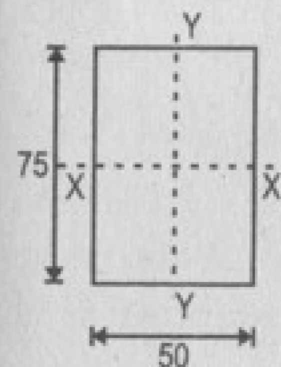
De donde: $P = 590 \times 10^3$ N $\Rightarrow \boxed{P = 590 \text{ kN}}$

Aplicado sobre el eje Y.

1136. Una barra prismática de acero de 50 × 75 mm tiene una longitud de 1,5 m. Calcular la carga máxima que puede soportar con una excentricidad de 120 mm con respecto a los ejes geométricos. La barra soporta también una carga axial de 50 kN. Suponga $\sigma_{pc} = 250\ MN/m^2$.

Resolución:

Para la sección prismática tenemos:



$A = (50)(75) = 3750\ mm^2$

$r = d/\sqrt{12} = 50/\sqrt{12} = 14{,}4$ mm

$S_x = (50)(75)^2/6 = 46\ 875\ mm^3$

$L_e = 1{,}5$ m

Tiene una relación de esbeltez de $L_e/r = 1{,}5 \times 10^3/14{,}4 = 104$.

Para $\sigma_{pc} = 250$ MPa, la relación de esbeltez crítica es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{250\times10^6}} = 126$$

Ya que $L_e/r < C_c$, el esfuerzo de trabajo se determina como sigue:

$$F_S = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(104)}{8(126)} - \frac{(104)^3}{8(126)^3} = 1{,}9$$

De donde: $\sigma_T = \left[1-\frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \left[1-\frac{(104)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1,9} = 86,7$ MPa

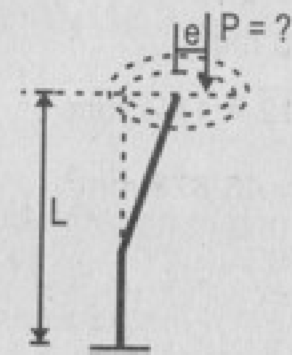
Usando el enfoque de máximo esfuerzo consideramos que la columna actúa como un miembro corto sometido a compresión y cargado excéntricamente.

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A}+\frac{M}{S}$$

$$86,7\times10^6 = \frac{(50\times10^3+P)}{3750\times10^{-6}}+\frac{0,12P}{46,875\times10^{-6}} \Rightarrow \boxed{P = 25,9\ \text{kN}}$$

1137. Un tubo de acero de 2,5 m de longitud, empotrado en su extremo inferior y libre en el superior, soporta un gran cartel cuyo centro de gravedad dista 0,60 m del eje del tubo. Determinar su peso máximo si el diámetro exterior del tubo es de 140 mm, su sección, de 2800 mm² y su momento de inercia de $6,32\times10^6$ mm⁴. Use σ_{pc} = 250 MN/m².

Resolución:



Empotrado

L = 2,5 m y e = 0,6 m
D = 140 mm
A = 2800 mm²
$I = 6,32\times10^6$ mm⁴
σ_{pc} = 250 MPa
L_e = 2L = 5 m (un extremo libre)
$S = I/(D/2) = 90,2\times10^3$ mm³

El radio de giro es: $r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{6,32\times10^6}{2800}} = 47,5$

Tiene una relación de esbeltez de: $\frac{L_e}{r} = \frac{5\times10^3}{47,5} = 105$

Para σ_{pc} = 250 MPa, la relación de esbeltez límite es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{250\times10^6}} = 126$$

Ya que $L_e/r < C_c$, el esfuerzo de trabajo se calcula como sigue:

$$F_S = \frac{5}{3}+\frac{3(L_e/r)}{8C_c}-\frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3}+\frac{3(105)}{8(126)}-\frac{105^3}{8(126)^3} = 1,9$$

De donde:

$$\sigma_T = \left[1-\frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \left[1-\frac{(105)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1,9} = 85,9$$

Calculamos la carga P, usando el criterio de máximo esfuerzo: $\sigma = \frac{\Sigma P}{A}+\frac{M}{S}$

$$85,9\times10^6 = \frac{P}{2800\times10^{-6}}+\frac{0,6P}{90,2\times10^{-6}} \Rightarrow \boxed{P = 12,25\ \text{kN}}$$

1138. Un perfil W360 × 134 se emplea como columna de 6 m de longitud. Soporta una carga axial de 260 kN y otra excéntrica de 220 kN sobre el eje de menor momento de inercia. Determinar la excentricidad máxima admisible de la carga, con σ_{pc} = 250 MPa.

Resolución:

De la tabla B-2, el perfil W360 × 134 tiene las siguientes propiedades geométricas:

A = 17 100 mm² r_y = 94 mm $S_x = 2330\times10^3$ mm³

Además: L = 6 m; P_o = 260 kN y P = 220 kN

Tiene una relación de esbeltez de: $\frac{L_e}{r} = \frac{6\times10^3}{84} = 63,8$

Para σ_{pc} = 250 MPa, la relación de esbeltez crítica es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{24^2(200\times10^9)}{250\times10^6}} = 126$$

Como $L_e/r < C_c$, entonces el esfuerzo de trabajo es:

$$F_S = \frac{5}{3}+\frac{3(L_e/r)}{8C_c}-\frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3}+\frac{3(63,8)}{8(126)}-\frac{(63,8)^3}{8(126)^3} = 1,84$$

$$\sigma_T = \{1-[(63,8)^2/2(126)^2]\}\frac{250}{1,84} = 118 \text{ MPa}$$

Usando el enfoque de máximo esfuerzo: $\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}$

$$118 \times 10^6 = \frac{260\times10^3 + 220\times10^3}{17\,100\times10^{-6}} + \frac{e(220\times10^3)}{2330\times10^{-6}}$$

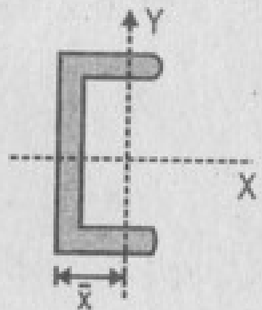
De donde: e = 0,952 m $\Rightarrow$ $\boxed{e = 952 \text{ mm}}$

Esta es la excentricidad máxima.

1139. Un canal C310 × 45 se usa como columna articulada en sus extremos, de 2,2 m de longitud. ¿A qué distancia del centro puede aplicarse una carga de 50 kN sobre el eje X? Suponga que σ_{pc} = 380 MPa y que el esfuerzo de tensión está limitado a 140 MN/m^2. ¿Sobre qué lado del eje Y ha de aplicarse la carga?

Resolución:

De la tabla B-4, las propiedades geométricas del perfil C310 × 45:



A = 5690 mm^2
r_y = 19,3 mm
S_y = 33,6 × 10^3 mm^3
I_y = 2,12 × 10^6 mm^4; $\bar{x}$ = 17 mm
L_e = 2,2 m
P = 50 kN
e = ?
S = I_y / $\bar{x}$ = 124,7 × 10^3 mm^3

La relación de esbeltez es L_e/r = 2200 / 19,3 = 114

Para σ_{pc} = 380 MPa, la relación de esbeltez límite es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{380\times10^6}} = 102$$

Ya que $L_e/r > C_c$, el esfuerzo de trabajo se determina como sigue:

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(114)^2} = 79 \text{ MPa}$$

Usando el criterio de máximo esfuerzo: $\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}$

$$79 \times 10^6 = \frac{50\times10^3}{5690\times10^{-6}} + \frac{e(50\times10^3)}{124,7\times10^{-6}} \Rightarrow e = 0,195 \text{ m}$$

Considerando el límite del esfuerzo de tensión:

$$140 \times 10^6 = -\frac{50\times10^3}{3920\times10^{-6}} + \frac{e(50\times10^3)}{28,2\times10^{-6}} \Rightarrow e = 0,0999\text{m} = 100 \text{ mm}$$

Escogemos el menor: $\therefore$ $\boxed{e = 100 \text{ mm}}$

Colocado a la izquierda del eje Y.

1140. Repetir el problema 1139 usando un canal C310 × 31.

Resolución:

De la tabla B-4, las propiedades geométricas del perfil C310 × 31 son:

A = 3920 mm^2	r_y = 20,1 mm
S_y = 28,2 × 10^3 mm^3	I_y = 1,59 × 10^6 mm^4
$\bar{x}$ = 17,5 mm	S' = $I_y/\bar{x}$ = 90,8 × 10^3 mm^3
L_e = 2,2 m	P = 50 kN
e = ?	

La relación de esbeltez es: L_e/r = 2200 / 20,1 = 109,5

Para σ_{pc} = 380 MPa, la relación de esbeltez crítica es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{380\times10^6}} = 102$$

Ya que $L_e/r > C_c$, el esfuerzo de trabajo se determina como sigue:

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(109,5)^2} = 85,8 \text{ MPa}$$

Usando el criterio de máximo esfuerzo: $\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}$

$$85{,}8 \times 10^6 = \frac{50\times10^3}{3920\times10^{-6}} + \frac{e\left(50\times10^3\right)}{90{,}8\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad e = 0{,}132 \text{ m}$$

Considerando el límite del esfuerzo de tensión:

$$140 \times 10^6 = -\frac{50\times10^3}{3920\times10^{-6}} + \frac{e\left(50\times10^3\right)}{28{,}2\times10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad e = 0{,}086 \text{ m}$$

Por lo tanto, la excentricidad es el menor: $\boxed{e = 86 \text{ mm}}$

Colocado a la izquierda del eje Y.

1141. Un perfil W360 × 134 va emplearse como columna con una longitud de 9 m. La columna soporta una carga axial de 260 kN y una excentricidad de 360 kN, que actúa sobre el eje Y. Determinar la excentricidad máxima de la carga de 360 kN usando el método del máximo esfuerzo y la fórmula lineal de la ecuación (11-8).

Resolución:

De la tabla B-2, las propiedades del perfil W360 × 134 son:

$A = 17\,100 \text{ mm}^2$ $\quad S_x = 2330 \times 10^3 \text{ mm}^3$ $\quad r_y = 94 \text{ mm}$

Además: L = 9 m

Se tiene una relación de esbeltez de: $\frac{L}{r} = \frac{9000}{94} = 95{,}7 \quad \Rightarrow \quad 30 < \frac{L}{r} < 120$

Podemos aplicar la fórmula lineal:

$$\sigma_T = 110 - 0{,}483\left(\frac{L}{r}\right) = 110 - 0{,}483\,(95{,}7) \;=\; 63{,}7 \text{ MPa}$$

Para calcular la excentricidad usamos el criterio del máximo esfuerzo:

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \quad \Rightarrow \quad 63{,}7 \times 10^6 = \frac{260\times10^3 + 360\times10^3}{17\,100\times10^{-6}} + \frac{e\left(360\times10^3\right)}{2330\times10^{-6}}$$

De donde: e = 0,178 m $\Rightarrow$ $\boxed{e = 178 \text{ mm}}$

1142. Repetir el problema 1141 usando un perfil W60 × 347.

Resolución:

De la tabla B-2, las propiedades geométricas del perfil W360 × 347 son:

$A = 44\,200 \text{ mm}^2$ $\quad S_x = 6140 \times 10^3 \text{ mm}^3$ $\quad r_y = 104 \text{ mm}$

Además: L = 9 m

Para esta sección la relación de esbeltez es:

$$\frac{L}{r} = \frac{9000}{104} = 86{,}5 \quad \Rightarrow \quad 30 < \frac{L}{r} < 120$$

Entonces podemos aplicar la fórmula lineal:

$$\sigma_T = 110 - 0{,}483(86{,}5) = 68{,}22 \text{ MPa}$$

Para calcular la excentricidad usamos el criterio del máximo esfuerzo:

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \quad \Rightarrow \quad 68{,}22 \times 10^6 = \frac{260\times10^3 + 360\times10^3}{44\,200\times10^{-6}} + \frac{e\left(360\times10^3\right)}{6140\times10^{-6}}$$

De donde: e = 0,924 m $\Rightarrow$ $\boxed{e = 924 \text{ mm}}$

CAPÍTULO 12

UNIONES REMACHADAS Y SOLDADAS

A menos que se diga lo contrario, se considerarán como los esfuerzos admisibles los valores $\tau = 60$ MPa, $\sigma_V = 130$ MPa y $\sigma_t = 80$ MPa.

1201. Problema ilustrativo.

1202. La unión longitudinal de una caldera cilíndrica, de placa de 14 mm, tiene una resistencia de 350 kN en la longitud de 400 mm. La eficacia de las uniones circunferenciales es del 45% y el esfuerzo admisible a tensión es de 80 MPa. Determinar el máximo diámetro de la caldera si la presión interior de trabajo es de 1,4 MPa.

Resolución:

Sabemos: $2P = pDL$, de donde: $\frac{2P}{pL} = D$ (Longitud)

Reemplazando: $D = \frac{2\times350\times10^3}{1{,}4\times10^6\times400\times10^{-3}} \Rightarrow \boxed{D = 1{,}25\text{ m}}$

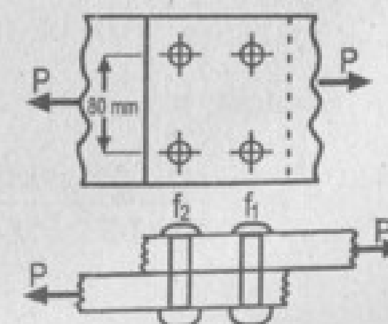
1203. Una unión por solape de dos filas de remaches constituye la unión circunferencial de una caldera cilíndrica de 1,50 m de diámetro. El paso de los remaches es de 80 mm, el diámetro de los orificios es de 17,5 mm y el espesor de la placa, de 12 mm. Determinar la resistencia de la unión por sección tipo, la eficacia y la máxima presión interior admisible.

Resolución:

En la figura siguiente:

$D = 1{,}50$ m; $\phi_{orificio} = 17{,}5$ mm

$e = 12$ mm



Cálculo previo:

Corte simple: $P_s = \frac{\pi d^2}{4}\times\tau$

$$P_s = \pi\times\frac{(17{,}5\times10^{-3})^2\times60\times10^6}{4} = 14{,}4317 \text{ kN} \Rightarrow P_s = 14{,}4317 \text{ kN}$$

Contacto con remache: P_b

$P_b = ed\sigma_b = 12 \times 10^{-3} \times 17{,}5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 27{,}3$ kN

a) Capacidad con remache: (fila 1) P_r

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila 1: } 1 \times 14{,}4317 = 14{,}4317 \text{ kN}\\ \text{Fila 2: } 1 \times 14{,}4317 = 14{,}4317 \text{ kN}\end{array}\right\} P_r = 2 \times 14{,}4317 = 28{,}8633825 \text{ kN}$$

b) Capacidad de placas:

Fila 1: $P_1 = (80 - 2 \times 17{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 60$ kN

Fila 2: $P_2 = 60 + 14{,}4317 \Rightarrow P_2 = 74{,}4317$ kN

Elegimos el menor de P_r, P_1 y P_2:

Luego: $\boxed{P = 28{,}8633825 \text{ kN}}$ es la resistencia de la unión.

La máxima presión en junta circunferencial es:

$4P = pDL$

$p = \frac{4P}{DL}$; D = 1,5 m; P = 28,86 kN; L = 80 mm

$$p = \frac{4\times28{,}8633825\times10^3}{1{,}5\times80\times10^{-3}} \Rightarrow p = 0{,}96211275 \text{ MPa} \Rightarrow \boxed{p = 962{,}11275 \text{ kPa}}$$

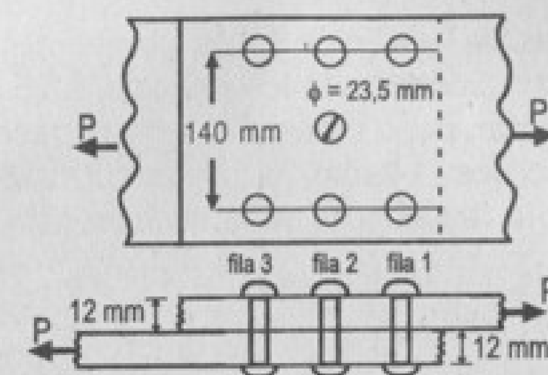
(máxima presión tanque)

Eficacia: n

$$n = \frac{28{,}8633825\times10^3}{80\times10^{-3}\times12\times10^{-3}\times80\times10^6} \Rightarrow \boxed{n = 36{,}93\%}$$

1204. La costura longitudinal de una caldera es una unión por solape de 3 filas de remaches, con el paso de las filas extremas igual a 140 mm y, el de la intermedia de 70 mm. El diámetro de los orificios es de 23,5 mm y el espesor de la placa de 12 mm. Determinar la resistencia de la sección tipo y su eficacia.

Resolución:



Cálculos previos: por remache

Corte simple: $P_s = \frac{\pi(23{,}5\times10^{-3})^2}{4}\times 60 \times 10^6$

$P_s = 26{,}02416814$ kN

Contacto: $P_b = ed\sigma_b$

$P_b = 23{,}5 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 12 \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 36{,}667$ kN

a) Capacidad de remaches: P_r

Fila 1: 26,02416814 kN; Fila 2: 2 × 26,024 kN; Fila 3: 26,02416 kN

Luego: $P_r = 4 \times 26{,}0241681 \Rightarrow P_r = 104{,}0966726$ kN

b) Capacidad de placas

Fila 1: $P_1 = (140 - 23{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_1 = 111{,}840$ kN

Fila 2: $P_2 = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 26{,}024\times10^3$

$P_2 = 115{,}340$ kN

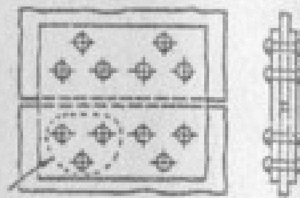
Fila 3: innecesario $P_3 > P_1$

La resistencia es el menor de P_r, P_1, P_2 y P_3 ⇒ $\boxed{P = 104{,}09667\ kN}$ (resistencia)

Eficacia: n

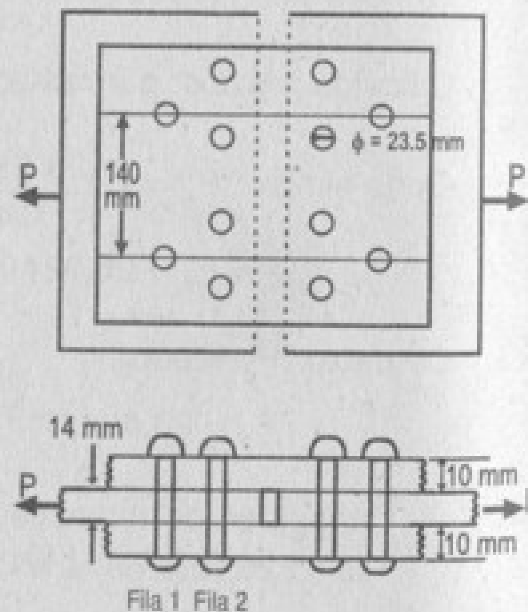
$$n = \frac{104{,}09667 \times 10^3}{140 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \times 100 = 77{,}453\% \Rightarrow \boxed{n = 77{,}453\%}$$

1205. Las características de una unión doble a tope, tal como la de la figura son: diámetro de los orificios, 23,5 mm; paso mayor, 140 mm; paso menor, 70 mm; espesor de las placas principales, 14 mm, y de los cubrejuntas, 10 mm. Calcular la resistencia de la sección tipo y su eficacia.



Resolución:

ϕ = 23,5 mm; e = 14 mm; e' = 10 mn



Previos cálculos: por remache.

Corte doble: $P_s = 2 \times \frac{\pi d^2}{4} \times \tau$

$$P_s = \pi \times \frac{(23{,}5 \times 10^{-3})^2}{2} \times 60 \times 10^6$$

$\Rightarrow P_s = 52{,}04833$ kN

Contacto con placa: P_b

$$P_b = (14 \times 10^{-3})(23{,}5 \times 10^{-3}) \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 42{,}77\ kN$$

Contacto con cubrejuntas: P_b'

$P_b' = (10 \times 10^{-3})\ (23{,}5 \times 10^{-3}) \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 30{,}55$ kN

a) Capacidad de remaches.
   Fila 1: contacto con placa 42,77 kN
   Fila 2: contacto con placa 2 × 42,77 = 85,54 kN
   Luego: $P_r = 128{,}31$ kN

b) Capacidad de placa y cubrejuntas.

   Placa principal
   Fila 1: $P_1 = (140 - 23{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 130{,}48$ kN
   Fila 2: $P_2 = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 42{,}77$ kN ⇒ $P_2 = 146{,}93$ kN

   Cubrejuntas fila 2, crítica
   $P_C = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 74{,}4$ kN

Dos cubrejuntas: 2 × 74,4 = 148,8 kN ⇒ $P_{Ctotal} = 148{,}8$ kN

Tomamos mínimo de: P_r, P_1, P_2 y P_C

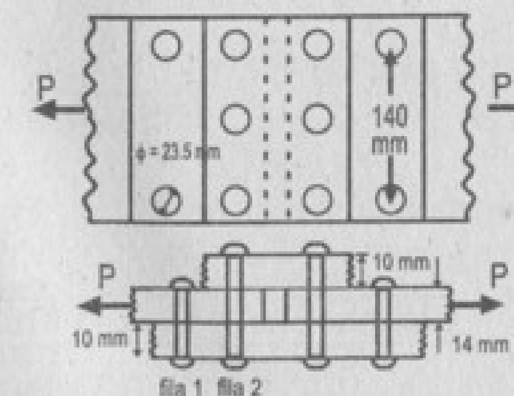
$\boxed{\text{Resistencia} = 128{,}31\ kN}$ (mínimo)

Eficacia: n

$$n = \frac{128{,}31 \times 10^3}{140 \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \times 100\% \Rightarrow \boxed{n = 81{,}83\%}$$

1206. Una unión remachada doble a tope, a presión, en la que el cubrejuntas superior abarca únicamente las filas interiores de remaches, mientras que el inferior abarca todas, tiene las siguientes características: diámetro de los orificios, 23,5 mm; espesor de las placas principales, 14 mm; espesor de los cubrejuntas, 10 mm. Paso menor, 70 mm y paso mayor, 140 mm. Determinar la resistencia de la sección tipo y la eficacia de la unión.

Resolución:



Cálculos previos: por remache

Cortes simple: $P_s = \frac{\pi\times(23{,}5\times10^{-3})^2}{4}\times60\times10^6 \Rightarrow P_s = 26{,}02417$ kN

Corte doble: $P_s = 2 \times 26{,}02417 = 52{,}0483$ kN

Contacto con placa: P_b

$P_b = (14 \times 10^{-3})(23{,}5 \times 10^{-3})(130 \times 10^6) \Rightarrow P_b = 42{,}77$ kN

Contacto con cubrejuntas: P_b'

$P_b' = (10\times10^{-3})(23{,}5\times10^{-3})(130\times10^6) = 30{,}55$ kN

a) Capacidad de (placas) remaches (P_r).
Fila 1: mínimo corte simple: 26,02416 kN
Fila 2: contacto con placa: $2 \times 42{,}77 = 85{,}54$ kN
$P_r = 26{,}024 + 85{,}54 \Rightarrow \boxed{P_r = 111{,}5641681 \text{ kN}}$

b) Capacidad de placas y cubrejuntas.
Placa
Fila 1: $P_1 = (140 - 23{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 130{,}480$ kN
Fila 2: $P_2 = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 26{,}02416814\times10^3$
$P_2 = 130{,}184$ kN

Cubrejunta: en fila 2.
$P_C = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 74{,}4$ kN

El cubrejuntas superior trasmite a los remaches:
$2 \times 26{,}024 < 74{,}4$ kN

Remaches: $2 \times 26{,}024 < 74{,}4$ kN
Luego: $P_C = 2 \times 26{,}024 + 74{,}4 \Rightarrow P_C = 126{,}4483$ kN

Para la resistencia elegimos el menor de: P_r, P_1, P_2, P_C

$\Rightarrow \boxed{\text{Resistencia} = 111{,}5641681 \text{ kN}}$

Eficacia: n

$$n = \frac{111{,}5641681\times10^3}{140\times10^{-3}\times14\times10^{-3}\times80\times10^6}\times100\% \Rightarrow \boxed{n = 71{,}151674\%}$$

1207. Si los cubrejuntas del problema anterior fueran de 8 mm, determinar la forma de ruptura y la eficacia de la unión.

Resolución:
Cálculo previo: de lo anterior, solo varía $P_b' = 24{,}44$ kN

a) Capacidad de remaches: P_r
Fila 1: contacto con cubrejuntas 24,44 kN
Fila 2: contacto con placa $42{,}77 \times 2 = 85{,}54$ kN
$P_r = 24{,}44 + 2 \times 42{,}77 \Rightarrow P_r = 109{,}98$ kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas.
Placas
Fila 1: $P_1 = 130{,}48$ kN (anterior)
Fila 2: $P_2 = 104{,}16 + 24{,}44 = 128{,}6$ kN

Cubrejuntas: en fila 2
$P_C = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 59{,}52$ kN

El cubrejuntas superior trasmite corte simple a dos remaches.
$2 \times 26{,}024$ kN $= 52{,}05$ kN

Como: $52{,}05$ kN $< 59{,}62$ kN
Entonces la capacidad total del tensión en cubrejuntas es:
$P_C = 52{,}05 + 59{,}52 \Rightarrow P_C = 111{,}57$ kN

Resistencia: P tomamos el mínimo de P_r, P_1, P_2 y P_C

Resistencia: $\boxed{P = 109{,}98 \text{ kN}}$ (el mínimo)

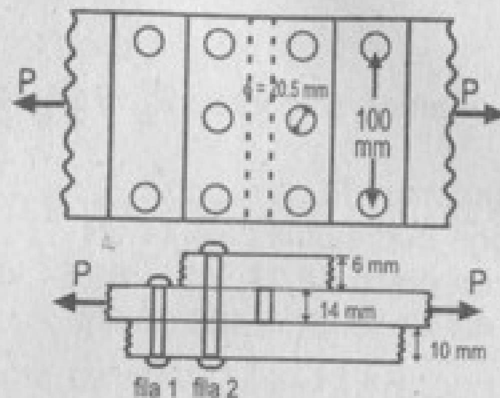
Eficacia: n

$$n = \frac{109{,}98\times10^3}{140\times10^{-3}\times14\times10^{-3}\times80\times10^6}\times100\% \Rightarrow \boxed{n = 70{,}14\%}$$

Baja en 1 punto la eficacia porcentual.

1208. En una unión remachada a tope, de dos filas y de tipo a presión, en la que el cubrejuntas superior abarca solo a las filas interiores y el inferior a todas, el espesor de la placa es de 14 mm, el del cubrejuntas superior es de 6 mm y el del inferior, de 10 mm. El diámetro de los orificios es de 20,5 mm, el paso mayor es de 100 mm y el menor, de 50 mm. Calcular la resistencia de la sección tipo.

Resolución:



Cálculos previos: por remache

Corte simple: $P_s = \dfrac{\pi\times(20{,}5\times10^{-3})^2}{4}\times60\times10^6 \Rightarrow P_s = 19{,}8038$ kN

Corte doble: $2 \times 19{,}8038$ kN $= 39{,}6076$ kN

Contacto con placa: $P_b = 14 \times 10^{-3} \times 20{,}5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6$

$P_b = 37{,}31$ kN

Contacto con cubrejuntas: P_b' (interior)

$P_b' = 10 \times 10^{-3} \times 20{,}5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 26{,}65$ kN

Contacto con cubrejuntas exterior P_b''

$P_b'' = 6 \times 10^{-3} \times 20{,}5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b'' = 15{,}99$ kN

a) Capacidad de remaches: P_r

Fila 1: mínimo es: 19,8038 kN

Fila 2: el mínimo es: $37{,}31 \times 2 = 74{,}62$ kN

Luego: $P_r = 19{,}8038 + 74{,}62 \Rightarrow P_r = 94{,}4238$ kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas.

Placas

Fila 1: $P_1 = (100 - 20{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_1 = 89{,}04$ kN

Fila 2: $P_2 = (100 - 2 \times 20{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 19{,}8038\times10^3$

$P_2 = 85{,}8838$ kN

Cubrejuntas: fila 2

Exterior: $P_{Ce} = (100 - 2 \times 20{,}5) \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_{Ce} = 28{,}32$ kN

Interior: $P_{Ci} = (100 - 2 \times 20{,}5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_{Ci} = 47{,}2$ kN

El exterior transmite corte simple en dos remaches $2 \times 19{,}8038 = 39{,}6076$ kN

Tomamos el menor de $P_{Ce} = 28{,}32$ kN y 39,6076 kN

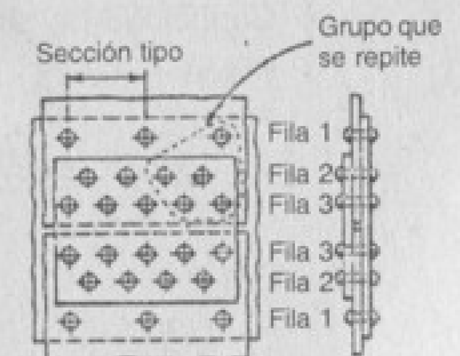
Luego: $P_C = 28{,}32 + 47{,}2 \Rightarrow P_C = 75{,}52$ kN

Que significa colapso por tracción del exterior en la segunda fila y colapso a cubrejuntas inferior en la segunda fila.

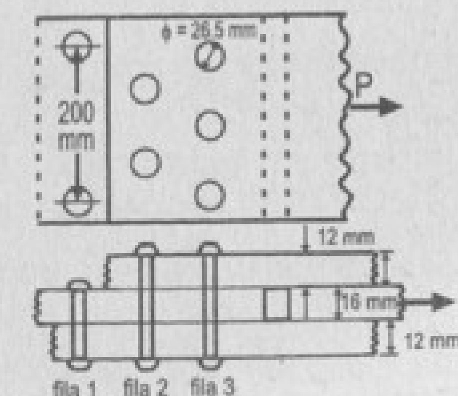
Tomamos el mínimo de P_r, P_1, P_2 y P_C

Resistencia = 75,52 kN (mínimo)

1209. Una unión remachada triple a tope, como la representada en la figura, tiene un paso mayor de 200 mm y un paso menor de 100 mm. El diámetro de los orificios es de 26,5 mm; el espesor de las placas principales, de 16 mm y el de los cubrejuntas, de 12 mm. Hallar la resistencia de la sección tipo y su eficacia.



Resolución:



Cálculo previo: por remache

Corte simple: $P_s = \frac{\pi(26{,}5\times10^{-3})^2\times60\times10^6}{4} \Rightarrow P_s = 33{,}09275$ kN

Corte doble: $P_s = 2\times33{,}09275 = 66{,}1855$ kN

Contacto con placa: P_b
$P_b = 16\times10^{-3}\times26{,}5\times10^{-3}\times130\times10^6 \Rightarrow P_b = 55{,}12$ kN

Contacto con cubrejuntas: P_b''
$P_b'' = 12\times10^{-3}\times26{,}5\times10^{-3}\times130\times10^6 \Rightarrow P_b'' = 41{,}34$ kN

a) Capacidad de remaches: P_r

Fila 1: mínimo; 33,09275 kN
Fila 2: mínimo; 2 × 55,12 = 110,24 kN
Fila 3: mínimo; 110,24 kN
Luego: $P_r = 33{,}09275 + 110{,}24 + 110{,}24 \Rightarrow P_r = 253{,}5727$ kN

b) Capacidad de placas por cubrejuntas
Placa
Fila 1:
$P_1 = (200-26{,}5)\times10^{-3}\times16\times10^{-3}\times80\times10^6 \Rightarrow P_1 = 222{,}080$ kN

Fila 2:
$P_2 = (200-2\times26{,}5)\times10^{-3}\times16\times10^{-3}\times80\times10^6 + 33{,}09275\text{ kN}\times10^3$
$\Rightarrow P_2 = 221{,}2527$ kN

Fila 3:
$P_3 > P_2$ (el mismo # de remaches)
$P_3 = P_2$ + absorbe fila 2

Cubrejuntas: en fila 3
$P_C = (200-2\times26{,}5)\times10^{-3}\times12\times10^{-3}\times80\times10^6 \Rightarrow P_C = 141{,}12$ kN

Pero el cubrejuntas exterior trasmite: 33,092 × 4 = 132,371 kN

Luego:
$P_C = 132{,}371 + 141{,}12 \Rightarrow P_C = 273{,}491$ kN

Tomamos el menor de P_r, P_1, P_2, P_3 y P_C

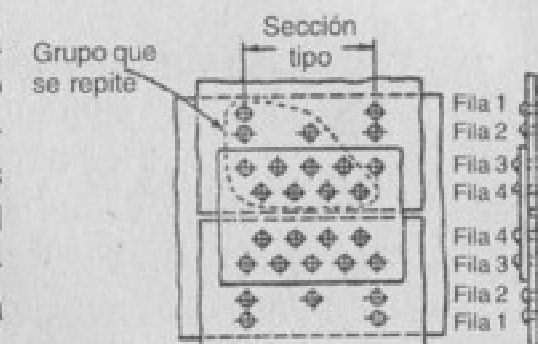
Más crítico: $P_2 = 221{,}2527$ kN

Luego: P = 221,2527517 kN

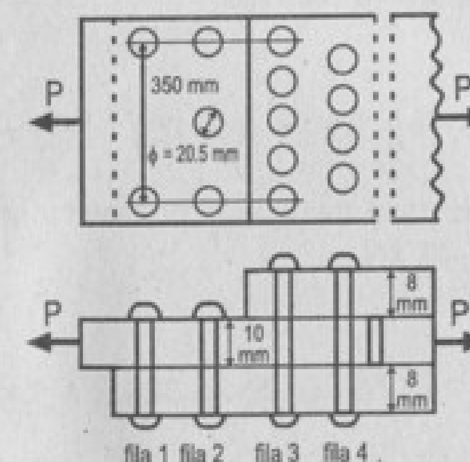
Eficacia: n

$$n = \frac{221{,}25\times10^3}{200\times10^{-3}\times16\times10^{-3}\times80\times10^6} = \boxed{86{,}426\%}$$

1210. Una unión cuádruple a tope, análoga a la representada en la figura, tiene un paso mayor de 350 mm. El diámetro de los orificios es de 20,5 mm; el espesor de las placas principales, de 10 mm y el cubrejuntas, de 8 mm. Calcular la resistencia de la sección tipo y la eficacia de la unión.



Resolución:



Cálculos previos: por remache

Corte simple: $P_s = \pi\frac{(20{,}5\times10^{-3})^2}{4}\times60\times10^6 \Rightarrow P_s = 19{,}8038$ kN

Corte doble: $2 \times 19{,}8038 = 39{,}6076$ kN

Contacto con placa: $(10 \times 10^{-3})(20{,}5 \times 10^{-3}) \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 26{,}25$ kN

Contacto con cubrejuntas P_b'

$P_b' = 8 \times 10^{-3} \times 20{,}5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 21{,}32$ kN

a) Capacidad de remaches.
Fila 1: mínimo: 19,8038 kN
Fila 2: mínimo: 39,6076 kN
Fila 3: $26{,}65 \times 4 = 106{,}6$ kN, contacto con placa principal
Fila 4: $26{,}65 \times 4 = 106{,}6$ kN
$P_r = 19{,}8038 + 39{,}60763 + 106{,}6 \Rightarrow P_r = 272{,}6114$ kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas.
Placa
Fila 1:
$P_1 = (350 - 20{,}5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 263{,}6$ kN

Fila 2:
$(350 - 2 \times 20{,}5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 19{,}8038 \times 10^3 \Rightarrow P_2 = 267{,}0038$ kN

Fila 3:
$P_3 = (350 - 4 \times 20{,}5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 19{,}8038 \times 3 \times 10^3$
$P_3 = 273{,}8114$ kN

Fila 4:
$P_4 > P_3$ el mismo # de remaches

Cubrejuntas: en fila 4
$P_C = (350 - 4 \times 20{,}5) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 171{,}52$ kN

Comparamos con lo que transmite por corte simple:
$8 \times 19{,}8038 = 158{,}43$ kN
$158{,}43 \text{ kN} < 171{,}52 \text{ kN}$

Luego: $P_C = 158{,}43 + 171{,}52 \Rightarrow P_C = 329{,}9504$ kN

Resistencia: el mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3 y P_C $\Rightarrow \boxed{\text{Resistencia} = 263{,}6 \text{ kN}}$

Eficacia: n

$$n = \frac{263{,}6 \times 10^3}{350 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \Rightarrow \boxed{n = 94{,}14\%}$$

1211. Una unión cuádruple a tope, como la representada en la figura, tiene un paso mayor de 430 mm, el diámetro de los orificios es de 32,5 mm y el espesor de las placas principales, de 20 mm. El espesor de cada cubrejuntas es de 14 mm. Calcular la resistencia de la sección tipo, con un coeficiente de seguridad de 4, en función de los esfuerzos de ruptura, $\tau = 300$ MPa, a cortante simple, y de 520 MPa a cortante doble; $\tau_b = 660$ MPa y $\sigma_t = 400$ MPa. Si esta unión es la longitudinal de una caldera cilíndrica que soporta una presión interior de 1,8 MPa y las uniones circunferenciales tienen una eficacia de 50%. ¿Cuál será el máximo diámetro admisible?

Resolución:

En la figura del problema anterior considerar:
Polo mayor: 430 mm; $\phi_{orificio}$: 32,5
Espesor cubrejuntas: 14 mm
Espesor placa: 20 mm

Esfuerzos ruptura:
$\tau = 300$ MPa corte simple
$\tau = 520$ MPa corte doble
$\tau_b = 660$ MPa ; $\sigma_t = 400$ MPa
f·s = 4

Permisibles son:
$\tau = 75$ MPa simple corte
$\tau = 130$ MPa doble corte
$\sigma_b = 165$ MPa contacto
$\sigma_t = 100$ MPa tracción

Presión interna: $p = 1{,}8$ MPa

Cálculos previos: por remache

Corte simple: $P_s = \dfrac{\pi(32{,}5 \times 10^{-3})^2}{4} \times 75 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 62{,}218$ kN

Corte doble: $P_s = \dfrac{\pi(32{,}5 \times 10^{-3})^2}{2} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 215{,}69$ kN

Contacto con placa:
$P_b = 20 \times 10^{-3} \times 32{,}5 \times 10^{-3} \times 165 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 107{,}25$ kN

Contacto con cubrejunta:
$P_b' = 14 \times 10^{-3} \times 32{,}5 \times 10^{-3} \times 165 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 75{,}075$ kN

a) Capacidad de remaches: P_r
Fila 1: mínimo; 62,218 kN
Fila 2: mínimo; $2 \times 62{,}218 = 124{,}436$ kN
Fila 3: mínimo; $4 \times 107{,}25 = 429$ kN
Fila 4: análogo al anterior; 429 kN

Luego: $P_r = 62{,}21826 + 124{,}43 + 429{,}4 + 429 \Rightarrow P_r = 1044{,}65$ kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas

Placa

Fila 1:

$P_1 = (430 - 32{,}5) \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 795$ kN

Fila 2:

$P_2 = (430 - 2 \times 32{,}5) \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 + 62{,}2182 \times 10^3$

$\Rightarrow P_2 = 792{,}21$ kN

Fila 3:

$P_3 = (430 - 4 \times 32{,}5) \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 + 62{,}218 \times 10^3 + 124{,}4365 \times 10^3$

$\Rightarrow P_3 = 786{,}65$ kN

Fila 4:

$P_4 > P_3$ el mismo # de remaches.

La fila 3 trabaja a favor de fila 4.

Cubrejuntas

Peligro de falla en fila 4.

$P_C = (430 - 4 \times 32{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 420$ kN

La tapa exterior trasmite 8 cortes simples del doble.

$$\frac{8 \times 215{,}689}{2} = 862{,}75$$

Se toma el menor que es 420 kN.

Luego como son dos cubrejuntas: $P_C = 2 \times 420 = 840$ kN

Luego la resistencia es el mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3 y P_C

Luego: P = 786,657 kN

Diámetro del caldero: $D = \dfrac{2P}{pL}$

$$D = \frac{2 \times 786{,}6547 \times 10^3}{1{,}8 \times 10^6 \times 430 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{D = 2{,}032699483}$$

1212. Problema ilustrativo.

Calcular el esfuerzo cortante máximo, la presión de contacto y el esfuerzo de tensión desarrollado en las siguientes uniones remachadas bajo la acción de las cargas indicadas.

1213. Unión doble, a traslape, del problema 1203. Carga = 350 kN por metro de longitud.

Resolución:

350 ⟶ 1000 mm

x ⟶ 80 mm

x = 28 kN; en cada remache 14 kN

Cálculos previos: por remache

Esfuerzo corte τ

$$\tau = \frac{14 \times 10^3}{\dfrac{\pi (17{,}5 \times 10^{-3})^2}{4}}; \quad \boxed{\tau = 58{,}2052 \text{ MPa}} \text{ cortante crítico}$$

Esfuerzo de contacto σ_b

$$\sigma_b = \frac{14 \times 10^3}{12 \times 17{,}5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 66{,}67 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo tensión:

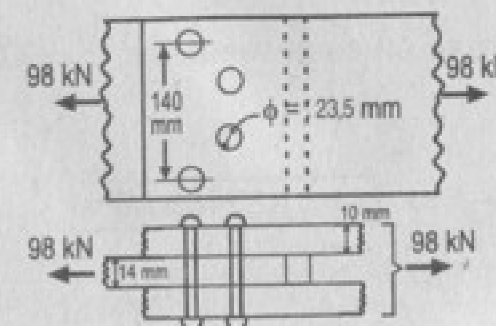
$$\text{Fila 1: } \sigma_t = \frac{28 \times 10^3}{(80 - 17{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_t = 37{,}33 \text{ MPa}$$

$$\text{Fila 2: } \sigma_t = \frac{(28 - 14) \times 10^3}{(80 - 17{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_t = 18{,}67 \text{ MPa}$$

1214. Unión a tope del problema 1205. Carga = 700 kN por metro de longitud.

Resolución:

En figura adjunta



Cada sección recibe: $\frac{1}{6}\times 98$ kN, osea: $\frac{49}{3}$ kN

Esfuerzo corte: $\tau = \dfrac{\left(\frac{49}{3}\right)\times 10^3}{\pi\dfrac{(23{,}5\times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau = 37{,}6573 \text{ MPa}}$

Esfuerzo contacto en placa:

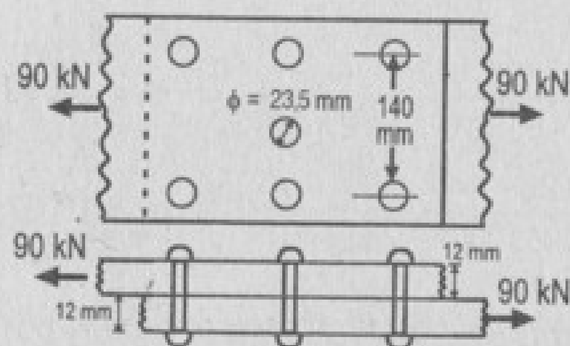
$$\sigma_b = \frac{\left(\frac{98}{3}\right)\times 10^3}{(14\times 10^{-3})(23{,}5\times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 99{,}29078 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo tracción:

Placa: $\dfrac{98\times 10^3}{(140-23{,}5)\times 10^{-3}\times 14\times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_t = 60{,}0858 \text{ MPa}}$

1215. Unión triple del problema 1204. Carga de la sección tipo = 90 kN.

Resolución:
En figura siguiente:



90 se reparte en 4 cargas en cada remache: $\frac{1}{4}\times 90$ kN = 22,5 kN

Corte esfuerzo:

$$\tau = \frac{22{,}5\times 10^3}{\pi\times\dfrac{(23{,}5\times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau = 51{,}87485 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo contacto: σ_b

$$\sigma_b = \frac{22{,}5\times 10^3}{(23{,}5\times 10^{-3})(12\times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 79{,}787 \text{ MPa}}$$

Tensión en placa: σ_t

Fila 1:

$$\sigma_{t_1} = \frac{90\times 10^3}{(140-23{,}5)\times 10^{-3}\times 12\times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_1} = 64{,}377 \text{ MPa}$$

Fila 2:

$$\sigma_{t_2} = \frac{(90-22{,}5)\times 10^3}{(140-2\times 23{,}5)\times 10^{-3}\times 12\times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 59{,}21052 \text{ kPa}$$

Fila 3:

$$\sigma_{t_3} = \frac{(90-3\times 22{,}5)\times 10^3}{(140-23{,}5)\times 10^{-3}\times 12\times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_3} = 16{,}094 \text{ MPa}$$

Tomando el mayor $\boxed{\sigma_t = 64{,}37 \text{ MPa}}$ (crítico)

1216. Unión doble, a tope, del problema 1206. Carga de la sección tipo = 90 kN.

Resolución:
Con carga de 90 kN
Como 5 áreas soportan 90 kN, entonces carga en cada área:

$\frac{1}{5}\times 90$ kN = 18 kN

Corte máximo: τ

$$\tau = \frac{18\times 10^3}{\dfrac{\pi(23{,}5\times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau = 41{,}499 \text{ MN/m}^2}$$

Contacto con placa: σ_b

$$\sigma_b = \frac{36\times 10^3}{(23{,}5\times 10^{-3})(14\times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 109{,}4225 \text{ MN/m}^2}$$

En cubrejuntas actúa 18 kN, pero el espesor mayor es 2 × 10 = 20 mm.

Esfuerzo tensión placa: σ_t
Fila 1:

$$\sigma_{t_1} = \frac{90\times10^3}{(140-23{,}5)\times10^{-3}\times14\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_1} = 55{,}181 \text{ MNm}^2$$

Fila 2:

$$\sigma_{t_2} = \frac{72\times10^3\times10^6}{(140-2\times23{,}5)\times14} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 55{,}3 \text{ MN/m}^2$$

Cubrejuntas exterior:

$$\sigma_{t_c} = \frac{54\times10^3}{(140-2\times23{,}5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_c} = 58{,}064 \text{ MN/m}^2$$

El mayor: $\boxed{\sigma_t = 58{,}064 \text{ MN/m}^2}$

1217. Unión triple, a tope, del problema 1209. Carga de la sección tipo = 200 kN.

Resolución:

En figura del problema 1209 considera carga en sección tipo P = 200 kN

Corte máximo: τ

$$\tau = \frac{200\times10^3}{9\times\pi\times\frac{(26{,}5\times10^{-3})^2}{4}}; \text{ en 9 áreas } \frac{1}{9}\ 200 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{\tau = 40{,}291 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo contacto placa σ_b :

En 4 remaches actúan: $200 - \frac{200}{9}$ kN; o sea: $\frac{400}{9}$ kN

$$\sigma_b = \frac{400\times10^3}{9\times(16\times10^{-3})\times26{,}5\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_b = 104{,}82 \text{ MN/m}^2$$

Tensión en placas y cubrejuntas

Placas
Fila 1:

$$\sigma_{t_1} = \frac{200\times10^3}{(200-26{,}5)\times10^{-3}\times16\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_1} = 72{,}046 \text{ MPa}$$

Fila 2:

$$\sigma_{t_2} = \frac{1600\times10^3\times10^6}{9\times(200-2\times26{,}5)\times16} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 75{,}585 \text{ MPa}$$

Fila 3: $\sigma_{t_3} < \sigma_{t_2}$ mismo # remaches

Cubrejuntas:
En fila 3, crítica:

Carga: $\frac{5\times200}{9}$ kN $\Rightarrow \sigma_C = \frac{1000\times10^3\times10^6}{9\times(200-2\times26{,}5)\times12} \Rightarrow \sigma_C = 62{,}988$ MPa

Luego: $\boxed{\sigma_{tmáx} = 75{,}58 \text{ MPa}}$

En la segunda fila de placa principal.

1218. Unión cuádruple, a tope, del problema 1210. Carga de la sección tipo = 220 kN.

Resolución:
En figura del problema 1210
Carga en sección: 220 kN
Áreas en sección: 1 + 2 + 8 + 8 = 19 m²

Carga en cada área: $\frac{220}{19}$ kN

Corte máximo: $(\sigma)\ \tau_{máx}$

$$\tau_{máx} = \frac{220\times10^3}{19\times\pi\frac{(20{,}5\times10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 35{,}081 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo contacto con placa: σ_b

$\frac{16}{19}\times220$; en 8 remaches

Cada remache absorbe: $\frac{440}{19}$ kN

$$\sigma_b = \frac{440\times10^3}{19\times10\times10^{-3}\times20{,}5\times10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 112{,}965 \text{ MPa}}$$

Tensión en placas y cubrejuntas

Placas

Fila 1:

$$\sigma_{t_1} = \frac{220\times10^3}{(350-20{,}5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_1} = 66{,}76783 \text{ MPa}$$

Fila 2:

$$\sigma_{t_2} = \frac{18\times220\times10^3}{19\times(350-2\times20{,}5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 67{,}45 \text{ MPa}$$

Fila 3:

$$\sigma_{t_3} = \frac{16\times220\times10^3}{19\times(350-4\times20{,}5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_3} = 69{,}128 \text{ MPa}$$

Fila 4:

$$\sigma_{t_4} = \frac{8\times220\times10^3}{19(350-4\times20{,}5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_4} = 34{,}564 \text{ MPa}$$

Cubrejuntas crítica

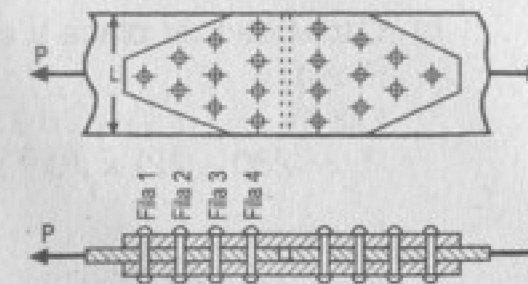
$$\sigma_C = \frac{11\times220\times10^3}{19(350-4\times20{,}5)\times10^{-3}\times8\times10^{-3}}$$

$\sigma_C = 59{,}4069$ MPa

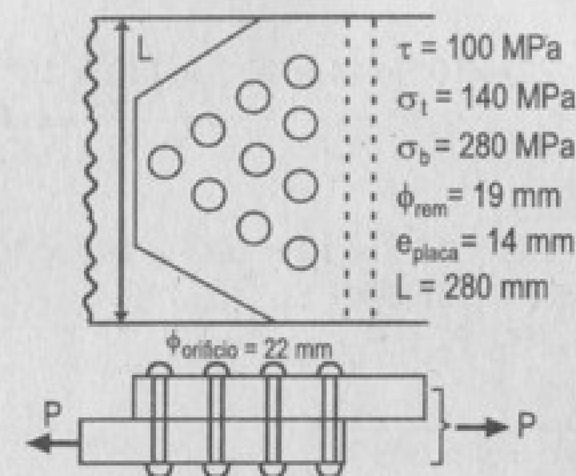
Valor crítico: placa principal en fila 3 $\boxed{\sigma_{t_3} = 69{,}128 \text{ MPa}}$

1219. Problema ilustrativo

1220. Determinar la carga de seguridad de la unión a tope de la figura si los esfuerzos admisibles son $\tau = 100$ MN/m^2 $\sigma_t = 140$ MN/m^2 y $\sigma_b = 280$ MN/m^2. Emplear remaches de 19 mm. El espesor de las placas por unir es de 14 mm y su ancho, 280 mm. El espesor e' de los cubrejuntas es de 10 mm.



***Resolución*:**
En la figura siguiente:



Cálculo previo:

Corte doble: $P_s = \frac{2\pi(19\times10^{-3})^2}{4}\times 100\times10^6 \Rightarrow P_s = 56{,}7$ kN

Contacto placa: $P_b = 14\times10^{-3}\times19\times10^{-3}\times280\times10^6 \Rightarrow P_b = 74{,}48$ kN

Contacto con cubrejuntas: P_b'
$P_b' = 10\times10^{-3}\times19\times10^{-3}\times280\times10^6 \Rightarrow P_b' = 53{,}2$ kN

a) Capacidad de remaches
Fila 1: 56,7 kN
Fila 2: 2 × 56,7 kN
Fila 3: 3 × 56,7 kN
Fila 4: 4 × 56,7 kN
$P_r = 10\times56{,}7957474 \Rightarrow P_r = 567{,}057$ kN

b) Capacidad de placa y cubrejunta
Placa:
Fila 1:
$P_1 = (280 - 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 505{,}68$ kN

Fila 2:
$P_2 = (280 - 2 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 56{,}7 \times 10^3 \Rightarrow P_2 = 519{,}26$ kN

Fila 3:
$P_3 = (280 - 3 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 3 \times 56{,}7 \times 10^3$
$\Rightarrow P_3 = 589{,}557$ kN

Fila 4:
$P_4 = (280 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-6} \times 140 \times 10^6 + 6 \times 56{,}7 \times 10^3$
$\Rightarrow P_4 = 716{,}5545$ kN

Cubrejunta en fila 4:
$P_C = (280 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 268{,}8$ kN
$P_{Ctotal} = 2 \times 268{,}8 = 537{,}6$ kN
Menor de P_r, P_1, P_2, P_3 y $P_{C\ total}$

$\boxed{\text{Carga seguridad} = 505{,}68 \text{ kN}}$

1221. En el problema ilustrativo 1219, determinar los nuevos esfuerzos cortantes, de contacto y de tensión, si se quita el remache de la fila 1 y la carga es de 260 kN. Calcular también el ancho mínimo de los cubrejuntas en las filas 2 y 3 si el esfuerzo de tensión está limitado a 100 MPa.

Resolución:
Carga: P = 280 kN
Utilizar figura del ejemplo 1219 del libro sin fila 1.

280 kN se reparten en 18 áreas

Luego cada área $\frac{1}{8} \times 280$ kN

Corte crítico: τ

$$\tau = \frac{280 \times 10^3}{\frac{18 \times (19 \times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{t = 54{,}86 \text{ MPa}} \text{ (cortante crítico)}$$

Esfuerzo de contacto en placa: σ_b

$$\sigma_b = \frac{280 \times 10^3}{9 \times 14 \times 10^{-3} \times 19 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 116{,}959 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo tensión placa principal
Fila 1:

$$\sigma_{t_1} = \frac{280 \times 10^3}{(250 - 2 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{t_1} = 97{,}087 \text{ MPa}}$$

Fila 2:

$$\sigma_{t_2} = \frac{7 \times 280 \times 10^3}{9(250 - 3 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{t_2} = 84{,}541 \text{ MPa}}$$

Fila 3:

$$\sigma_{t_3} = \frac{4 \times 280 \times 10^3}{9 \times (250 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{t_3} = 54{,}8696 \text{ MPa}}$$

Tensión en cubrejuntas
En fila 3:

$$\sigma_c = \frac{190 \times 10^3}{(250 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_C = 108{,}0247 \text{ MPa}}$$

Tensión crítica: σ_t

$\sigma_t = \boxed{\sigma_c = 108{,}0247 \text{ MPa}}$ (en cubrejunta en la fila 3)

Cálculo de ancho en fila 2 de cubrejuntas

$$\frac{2}{9} \times 280 \times 10^3 = [L - 2 \times 22 \times 10^{-3}]\,(2 \times 8 \times 10^{-3}) \times (100 \times 10^6)$$

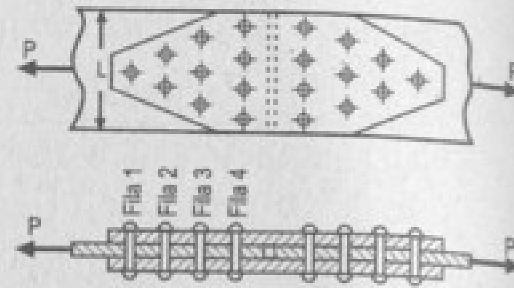
Luego: $L = 0{,}08228$ m $\Rightarrow$ $\boxed{L = 82{,}888 \text{ mm}}$ (ancho de la fila 2)

En fila 3 ancho cubrejuntas

$$\frac{5}{9}(280) \times 10^3 = (L - 3 \times 22 \times 10^{-3})\ 1600 \times 10^3$$

$L = 0{,}16322$ m $\Rightarrow$ $\boxed{L = 163{,}22 \text{ mm}}$

1222. Si no existiera la fila 4 en la figura, calcular la carga de seguridad y la eficacia de la junta con los esfuerzos admisibles siguientes: τ = 90 MPa; σ_t = 120 MPa; y σ_c = 190 MPa. Los remaches son de 25 mm, L = 230 mm, e = 14 mm y e' = 10 mm.



Resolución:

Considerar cargas admisibles

τ = 90 MPa ; σ_c = 190 MPa $\quad \sigma_t$ = 120 MPa

$\phi_{remache}$ = 25 mm $\quad \phi_{agujero}$ = 28 mm

L = 230 mm ; e = 14 mm (placa)

e' = 10 mm (cubrejunta)

Cálculos previos:

Corte doble: $P_s = \dfrac{\pi(25\times10^{-3})^2}{2} \times 90 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 88{,}3573$ kN

Contacto con placa: σ_b

$P_b = 14 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 190 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 66{,}5$ kN

Contacto con cubrejuntas σ_b'

$P_b' = 10 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 190 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 47{,}5$ kN

a) Capacidad de remaches
   Fila 1: 66,5
   Fila 2: 2 × 66,5
   Fila 3: 3 × 66,5
   $P_r = 6 \times 66{,}5 = 399$ kN

b) Capacidad de placa y cubrejuntas
   Placa
   Fila 1:
   $P_1 = (230 - 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 339{,}36$ kN

   Fila 2:
   $P_2 = (230 - 2 \times 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 + 66{,}5 \times 10^3$
   $P_2 = 358{,}82$ kN

Fila 3:
$P_3 = (230 - 3 \times 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 + 66{,}5 \times 10^3 + 133 \times 10^3$
$P_3 = 444{,}78$ kN

Cubrejuntas:
$P_c = (230 - 3 \times 28) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 \Rightarrow P_c = 175{,}2$ kN/cara

Resistencia de corte de remaches es:

$$\frac{88{,}35}{2}\times 6 = 264{,}96 \text{ kN}$$

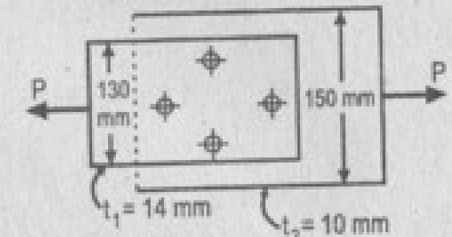
En el cubrejuntas es:
$P_c = 2 \times 175{,}2 = 350$ kN, no actúa; luego: $P_c = 529{,}92$ kN

Tomando como carga de seguridad el mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3 y P_c

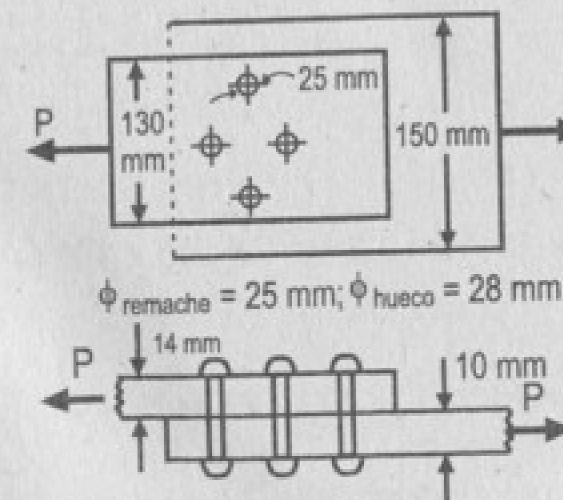
$$\boxed{P_{seguridad} = P_1 = 339{,}36 \text{ kN}}$$

$$n = \frac{339{,}36\times10^3\times100\%}{14\times10^{-3}\times230\times10^{-3}\times120\times10^6} \Rightarrow \boxed{n = 87{,}826\%} \text{ (eficacia)}$$

1223. Se unen dos placas mediante cuatro remaches, por solape, como se indica en la figura. Los remaches son de 25 mm. Determinar la carga P admisible si los esfuerzos de trabajo son τ = 70 MN/m², σ_t = 100 MN/m² y σ_b = 140 MN/m².



Resolución:



Esfuerzos admisibles:

τ = 70 MPa ; σ_t = 100 MPa ; σ_b = 140 MPa

Cálculos previos:

Corte simple: $P_s = \frac{\pi \times (25 \times 10^{-3})^2}{4} \times 70 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 34{,}36$ kN

Contacto con superior placa:

$P_b = 14 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 49{,}0$ kN

Contacto con placa inferior:

$P_b' = 10 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 35$ kN

a) Capacidad de remaches: P_r

Fila 1: 34,36 kN
Fila 2: 2 × 34,36
Fila 3: 34,36 kN
P_r = 137,445 kN

b) Capacidad de placas

Placa superior

Fila 1:
$P_1 = (130 - 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 142{,}8$ kN

Fila 2:
$P_2 = (130 - 2 \times 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 + 34{,}36 \times 10^3$
$P_2 = 103{,}60 + 34{,}36 \Rightarrow P_2 = 137{,}96$ kN

Fila 3: $P_3 > P_1$

Placa inferior

Fila 3: P_4
$P_4 = (150 - 28) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 \Rightarrow P_4 = 122{,}00$ kN

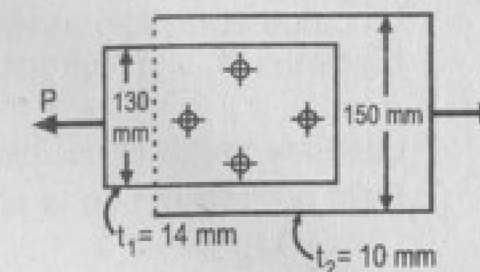
Fila 2: P_5
$P_5 = (150 - 2 \times 28) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 + 34{,}36 \times 10^3 \Rightarrow P_5 = 128{,}36$ kN

Fila 1: $P_6 > P_4$; igual # remaches

Finalmente, la carga admisible es el mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3, P_4, y P_5, P_6

$P = P_4 = 122$ kN; **P = 122 kN (carga admisible)**

1224. Repetir el problema 1223 si los esfuerzos admisibles son $\tau = 100$ MN/m², $\sigma_t = 140$ MN/m² y $\sigma_b = 220$ MN/m².



Resolución:

Cálculos previos:

Corte simple: $P_s = \frac{\pi (25 \times 10^{-3})^2}{4} \times 100 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 49{,}08738$ kN

Contacto en placa superior: P_b
$P_b = 14 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 220 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 77{,}0$ kN

Contacto con placa inferior: P_b'
$P_b' = 10 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 220 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 55$ kN

a) Capacidad de remaches

Fila 1: 49,087 kN (mínimo)
Fila 2: 2 × 49,087 kN
Fila 3: 49,087 kN
P_r = 196,3495 kN (la suma de lo anterior)

b) Capacidad de placas

Placa superior

Fila 1:
$P_1 = (130 - 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 199{,}92$ kN

Fila 2:
$P_2 = (130 - 2 \times 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 49{,}087 \times 10^3$
$P_2 = 194{,}127$ kN

Fila 3: $P_3 > P_1$; igual número de remaches

Placa inferior

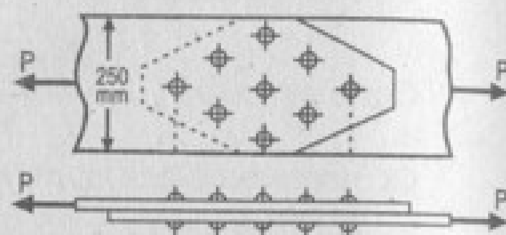
Fila 3: P_4
$P_4 = (150 - 28) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_4 = 170{,}8$ kN

Fila 3: P_5
$P_5 = (150 - 2 \times 28) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 49{,}087 \times 10^3$
$P_5 = 180{,}687$ kN

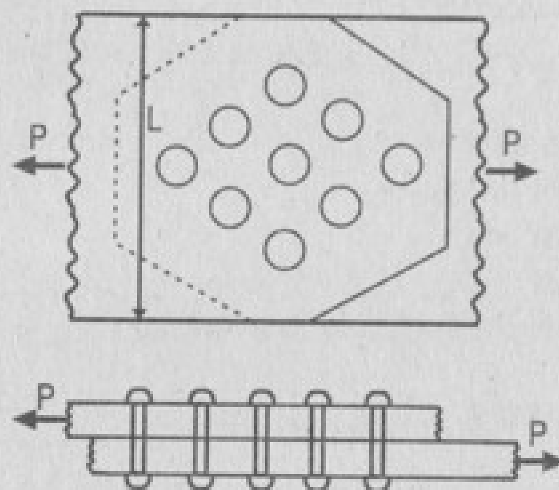
Fila 1: $P_6 > P_4$
La carga admisible la elegimos del mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6
Elegimos $P_4 = 170{,}8$ kN

Luego la carga admisible es $P = P_4 = 170{,}8$ kN
Falla por tensión en la placa inferior en la fila 3.

1225. Determinar la carga de seguridad del empalme a solape en el tirante de la figura si los remaches son de 19 mm y el espesor de las piezas por unir es de 8 mm. Los esfuerzos admisibles son: $\tau = 95$ MPa, $\sigma_t = 140$ MPa y $\sigma_b = 220$ MPa .



Resolución:



$\phi_{remache} = 19$ mm; $\phi_{hueco} = 22$ mm
$e_{placa} = 8$ mm ; L = 250 mm

Cargas admisibles:
$\tau = 95$ MPa ; $\sigma_b = 220$ MPa; $\sigma_t = 140$ MPa

Cálculos previos:

Corte simple: $P_s = \dfrac{\pi(19\times10^{-3})^2}{4} \times 95\times10^6 = 29{,}93$ kN

Contacto placa:
$P_b = 8 \times 10^{-3} \times 19 \times 10^{-3} \times 220 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 33{,}44$ kN

a) Capacidad remaches
Fila 1: 29,93 kN
Fila 2: 2 × 29,93 kN
Fila 3: 3 × 29,93 kN
Fila 4: 2 × 29,93 kN
Fila 5: 29,93 kN
$P_r = 9 \times 29{,}93523$ kN $= 269{,}41707$ kN

b) Capacidad de tensión de placas:
Fila 1: P_1
$P_1 = (250 - 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 255{,}36$ kN

Fila 2: P_2
$P_2 = (250 - 2 \times 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 29{,}935 \times 10^3 \Rightarrow P_2 = 260{,}65$ kN

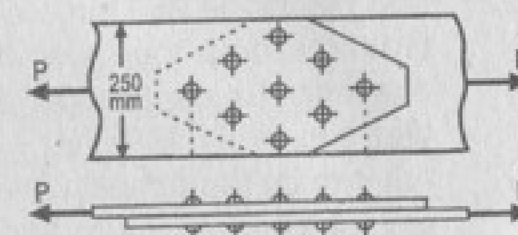
Fila 3: P_3
$P_3 = (250 - 3 \times 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 3 \times 29{,}935 \times 10^3$
$P_3 = 295{,}88$ kN

Fila 4: $P_4 > P_2$; Fila 5: $P_5 > P_1$

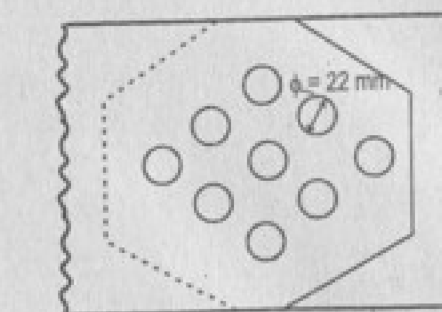
La carga de seguridad se obtiene con la capacidad menor de P_r, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

Luego: carga seguridad = 255,36 kN

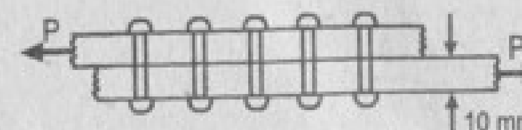
1226. Repetir el problema 1225 si los esfuerzos admisibles son los mismos, los remaches, de 22 mm y las placas por unir, de 10 mm.



Resolución:



Remaches: $\phi = 22$ mm
Placas: e = 10 mm
Agujeros: $\phi = 25$ mm



Esfuerzos admisibles: τ = 95 MPa; σ_t = 140 MPa; σ_b = 220 MPa
Cálculo previo:

Corte simple: $P_c = \frac{\pi}{4}(22 \times 10^{-3})^2 \times 95 \times 10^6 = 36{,}1126$ kN

Contacto: $P_b = (22 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-3})(220 \times 10^6) \Rightarrow P_b = 48{,}04$ kN

a) Capacidad de remaches: son 9 remaches:
$P_r = 9 \times 36{,}1126075 = 325{,}013$ kN

b) Capacidad de placas: se toma por fila:
Fila 1: $P_{t_1} = (250 - 25) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_{t_1} = 315$ kN

Fila 2: $P_{t_2} = (250 - 2 \times 25) \times 10^{-3} \times 140 \times 10 \times 10^3 + 36{,}1126075 \times 10^3$
$P_{t_2} = 316{,}1126$ kN

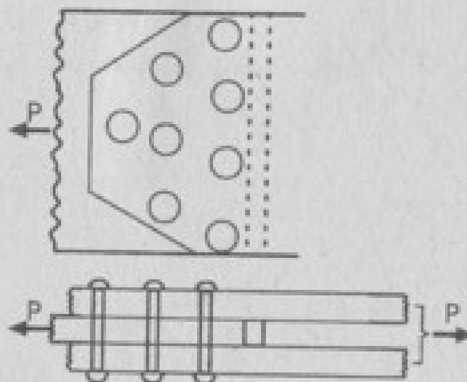
Fila 3: $P_{t_3} = (250 - 3 \times 25) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^3 \times 140 \times 10^6 + 3 \times 36{,}1126075 \times 10^3$
$P_{t_3} = 353{,}3378$ kN

Fila 4: $P_4 > P_3$; $P_5 > P_4$
Luego la carga de seguridad será el menor de P_r, P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5

De lo anterior: $\boxed{P = P_1 = 315 \text{ kN}}$; carga seguridad.

1227. Dos placas de 250 mm de ancho y 20 mm de espesor se empalman mediante una unión a tope, con dos cubrejuntas, mediante remaches de 22 mm de diámetro. La carga axial de tensión es de 400 kN. Si los esfuerzos admisibles son τ = 70 MPa, σ_t = 100 MPa y σ_b = 130 MPa, determinar (a) el menor número de remaches; (b) el mínimo número de filas y la mejor distribución de los roblones en cada fila; (c) el mínimo espesor en cada cubrejuntas, de acuerdo con la distribución del apartado (b).

Resolución:



a) Cálculos del # remaches:

Corte doble por remache: $\frac{2\pi}{4}(22 \times 10^{-3})^2 \times 70 \times 10^6$

$P_{\text{corte doble}} = 53{,}21857955$ kN

$\# \text{ remaches} = \frac{400 \text{ kN}}{53{,}21857955 \text{ kN}} = 7{,}5161$ remaches

$\boxed{\# \text{ remaches} = 8 \text{ remaches}}$

b) Número de filas mínimo: en primera fila tenemos:
$400 \times 10^3 (250 - 25\text{ k}) \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3} \leq 100 \times 10^6$
De donde: k ≤ 2; no falle por tracción

$\boxed{\# \text{ filas: 3 filas (mínimo)}}$

c) Espesor mínimo: en el cubrejuntas superior que soporta 200 kN; se tiene;

$$\frac{200 \times 10^3}{(250 - 4 \times 25) \times 10^{-3} \times e \times 10^{-3}} \leq 100 \times 10^6 \Rightarrow e \geq 13{,}33 \text{ mm}$$

Chequeo por aplastamiento:

$$\frac{22{,}222 \times 10^3}{(e \times 10^{-3})(22 \times 10^{-3})} \leq 130 \times 10^6 \Rightarrow e \geq 7{,}77$$

Luego tomamos: $\boxed{e \geq 13{,}33 \text{ mm}}$; cumple ambas restricciones.

1228. Resolver el problema 1227 con remaches de 19 mm y esfuerzos admisibles de τ = 110 MPa, σ_t = 140 MPa y σ_b = 220 MPa.

Resolución:
(a) Cálculo del # remaches:

Corte doble por remache: $\frac{2\pi}{4}(19 \times 10^{-3})^2 \times 110 \times 10^6$

$P_{\text{c doble}} = 62{,}37632214$ kN

$\# \text{ remaches} = \frac{400 \text{ kN}}{62{,}376322 \text{ kN}} = 6{,}41$

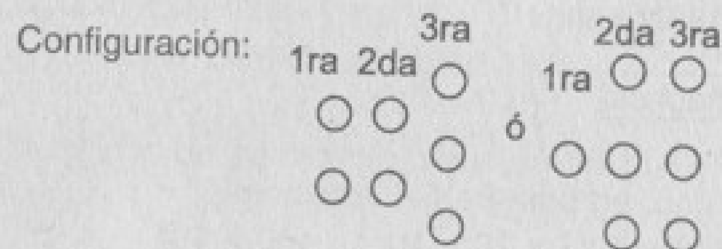
$\boxed{\# \text{ remaches} = 7 \text{ remaches}}$

b) Cálculo del # de filas:

En primera fila: $\dfrac{400\times10^3}{(250-22\,k)\times10^{-3}\times20\times10^{-3}} \le 140\times10^6$

Luego: $k \le 4$; tomamos 1 ó 2 en primera fila.
Luego: 3 filas como mínimo.

Configuración:



Ambas dan **3 filas y 7 remaches**

c) Cálculo del espesor de cubrejuntas
Se chequea falla por tracción del cubrejuntas superior sometido a 200 kN y con 3 remaches en tercera fila.

$$\frac{200\times10^3}{(250-3\times22)\times10^{-3}\times e\times10^{-3}} \le 140\times10^6 \Rightarrow e \ge 7{,}764 \text{ mm}$$

e = 7,764 mm; espesor mínimo de cubrejuntas

Chequeo por aplastamiento

$$\frac{(200/7)\times10^3}{(e\times10^{-3})(19\times10^{-3})} \le 220\times10^6 \Rightarrow e \ge 6{,}83 \text{ mm, más conservador.}$$

Tomamos: **e = 7,764 mm**; valor mínimo de espesor de cubrejuntas.

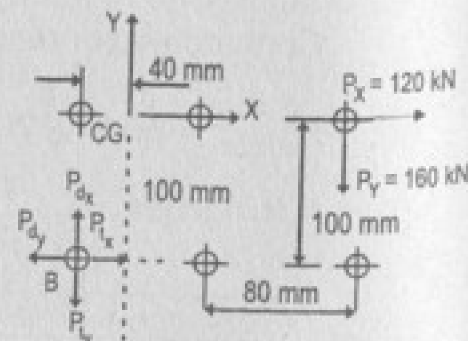
1229. Problema ilustrativo.

1230. Calcular la carga resultante en el remache menos cargado del problema 1229.

Resolución:

Consideramos el remache interior central izquierdo el de menor carga: es el remache B:
En este remache B, tenemos:

$$P_{d_x} = \frac{120 \text{ kN}}{12} = 10 \text{ kN} \leftarrow$$



$$P_{d_y} = \frac{160 \text{ kN}}{12} = 13{,}33 \text{ kN} \uparrow$$

$M_t = (160 \times 10^3 \text{ N})(120 \times 10^{-3})$ m
$M_t = 19\,200$ kN·mm = 19,2 kN·m (en CG)
$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 6 \times 40^2 + 6 \times 120^2 + 8 \times 100^2 = 0{,}176 \text{ m}^2 = 176\,000 \text{ mm}^2$

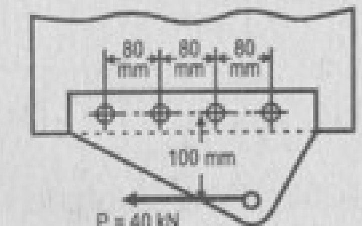
$$P_{t_x} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\, y = \frac{19{,}2 \text{ kN·m}}{0{,}176 \text{ m}^2} \times 100\times10^{-3}\text{m} = 10{,}91 \text{ kN} \rightarrow$$

$$P_{t_y} = \frac{19{,}2 \text{ kN·m}}{0{,}176 \text{ m}^2} \times 40\times10^{-3}\text{m} = 4{,}3636 \text{ kN} \downarrow$$

Luego en el remache B: $P_r = \sqrt{(10{,}91-10)^2 + (13{,}33-4{,}3636)^2}$

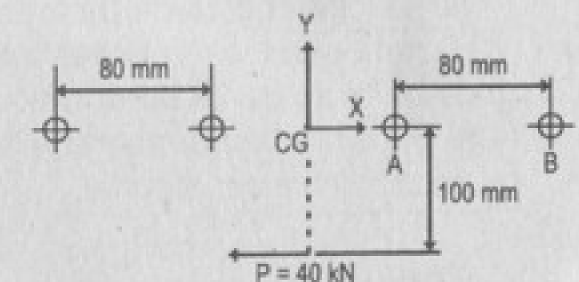
P_r = 9,057 kN; mínimo valor de carga en remache B.

1231. Una placa de amarre se cose al borde de una placa fija mediante cuatro remaches de 22 mm dispuestos como indica la figura y se somete a la acción de la fuerza P. Determinar el máximo y mínimo esfuerzos cortantes en los remaches.



Resolución:

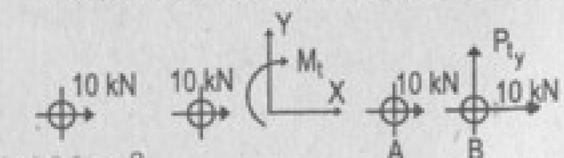
En figura adjunta
Momento en el centro de gravedad es;
$M_t = 40 \text{ kN} \times 100 \times 10^{-3}$ m
M_t = 4 kN·m
La carga constante es:



$$P_{d_x} = \frac{40 \text{ kN}}{4} = 10 \text{ kN} \rightarrow$$

$$P_{d_y} = 0$$

Trasladando fuerzas tenemos:



Luego: $\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 2 \times 40^2 + 2 \times 120^2 = 0{,}032 \text{ m}^2$

Tomamos punto crítico en el remache extremo derecho remache B:

Donde: $P_{t_y} = \dfrac{4 \text{ kN·m}}{0{,}032 \text{ m}^2} \times 120 \times 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow P_{t_y} = 15 \text{ kN} \uparrow$

El otro componente: $P_{t_x} = 0$

La carga en B es: $P_r = \sqrt{(10\ kN)^2 + (15\ kN)^2} \Rightarrow P_r = 18{,}02775638\ kN$

Luego: $\tau_{máx} = \dfrac{18{,}0277 \times 10^3}{\dfrac{\pi \times (22 \times 10^{-3})^2}{4}}$

De donde: $\boxed{\tau_{máx} = 47{,}4249015\ MPa}$

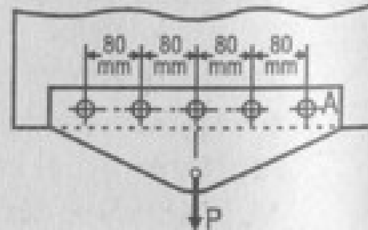
El esfuerzo mínimo será en el remache A:

$P_{d_x} = 10\ kN \rightarrow$; $P_{d_y} = 0 \Rightarrow P_{d_y} = \dfrac{4\ kN \cdot m}{0{,}032\ m^2} \times 40 \times 10^{-3} m = 5\ kN \uparrow$

Luego: $P_{r\ mín} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11{,}18033989\ kN$; $\tau_{mín} = \dfrac{11{,}18033989 \times 10^3\ N}{\dfrac{\pi (22 \times 10^{-3})^2\ m^2}{4}}$

De donde: $\boxed{\tau_{mín} = 29{,}41167535\ MPa}$ en el remache A.

1232. En la unión de la placa de amarre a un bastidor, que representa la figura, cada remache tiene 300 mm² de sección. La carga de trabajo había sido calculada para que los remaches trabajaran con un esfuerzo cortante de 70 MPa. Calcular el esfuerzo cortante máximo si el remache A no se colocó bien y no transmite carga alguna.



Resolución:

Cálculo de P inicial:

$P_r = \tau A_r = 70 \times 10^6\ N/m^2 \times 300 \times 10^{-6}\ m^2$

$P_r = 21\ kN$

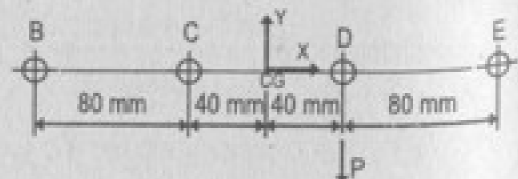
Como se tenía 5 remaches

$P = 5P_r = 5 \times 21 = 105\ kN$

Cálculo de cortante máximo:

El momento $M_t = (105\ kN)(40 \times 10^{-3}\ m)$

$M_t = 4{,}2\ kN \cdot m$; en el centro gravedad.



Luego: $\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 2 \times 40^2 + 2 \times 120^2 = 0{,}032\ m^2$

Para todos los remaches B, C, D y E, remache crítico es E:

Carga constante: $P_{d_y} = \dfrac{105\ kN}{4} = 26{,}25\ kN$; $P_{d_x} = 0$

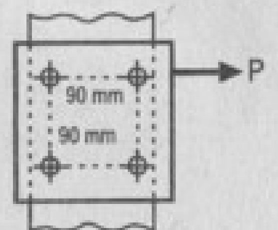
Carga variable:

$P_{t_y} = \dfrac{4{,}2\ kN.m}{0{,}032\ m^2} \times 120 \times 10^{-3}\ m \Rightarrow P_{t_y} = 15{,}75\ kN$; $P_{t_x} = 0$

Luego carga en remache E: $P_r = P_{d_y} + P_{t_y} = 26{,}25 + 15{,}75 \Rightarrow P_r = 42\ kN$

De donde: $\tau_{máx} = \dfrac{42\ kN}{300\ mm^2} = \dfrac{42 \times 10^3\ N}{300 \times 10^{-6} m^2} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 140\ MPa}$

1233. Si la carga máxima admisible en los remaches de la conexión representada en la figura es de 15 kN, determinar el valor de seguridad de P.



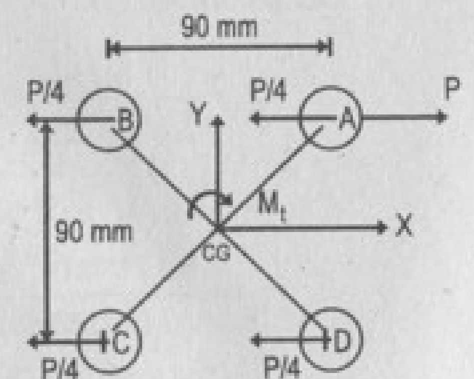
Resolución:

Calcular P:

$M_t = 45P$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 4 \times 45^2 + 4 \times 45^2 = 16\ 200\ mm^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 0{,}0162\ m^2$; para todos los remaches.



Se toma el remache A como el crítico o de carga máxima:

$P_{d_x} = P/4 \leftarrow$; $P_{d_y} = 0$; carga constante.

Carga variable: $P_{t_x} = \dfrac{45P \times 10^{-3} m}{0{,}0162\ m^2} \times 45 \times 10^{-3} m$

$P_{t_x} = \dfrac{P}{8} \leftarrow$; $P_{t_y} = \dfrac{P}{8} \uparrow$

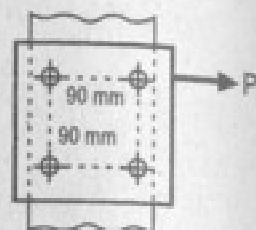
Luego: $P_{r_{máx}} = \sqrt{(P_{d_x} + P_{t_x})^2 + (P_{d_y} + P_{t_y})^2} \Rightarrow P_{r_{máx}} = \sqrt{\left(\dfrac{P}{8} + \dfrac{P}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{P}{8}\right)^2}$

$P_{r_{máx}} = \dfrac{P\sqrt{10}}{8}$

Como $P_{r_{máx}} = 15$ kN, por dato:

$$\frac{P\sqrt{10}}{8} = 15 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{P = 37{,}94733192 \text{ kN}}$$

1234. Repetir el problema 1233 si el remache de la esquina superior izquierda ha sido mal colocado y no soporta carga alguna.



Resolución:

Se tiene:

$M_t = 60\ P$

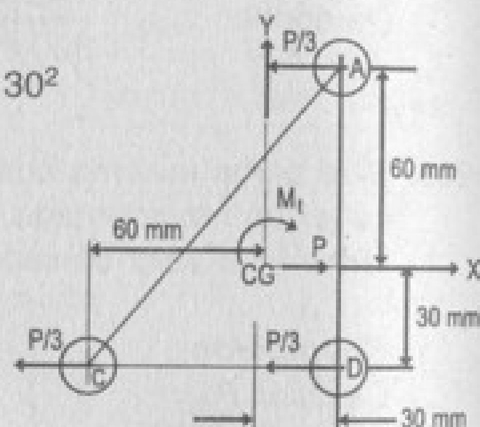
$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 30^2 + 30^2 + 60^2 + 60^2 + 30^2 + 30^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 10\ 800\ mm^2 = 0{,}0108\ m^2$

Se toma el remache A como el crítico:

Carga constante: $P_{d_x} = P/3 \leftarrow$

$P_{d_y} = 0$



Carga variable en A:

$$P_{t_x} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\ y = \frac{60\ P\times 10^{-3} m}{0{,}0108\ m^2} \times 60 \times 10^{-3} m \Rightarrow P_{t_x} = \frac{60^2 P}{10\ 800} = \frac{P}{3} \leftarrow$$

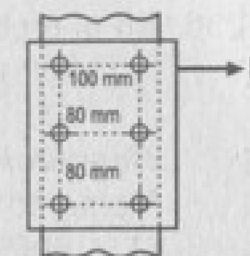
$$P_{t_y} = \frac{60\ P\times 10^{-3} m}{0{,}0108\ m^2} \times 30\times 10^{-3} m^2 \Rightarrow P_{t_y} = \frac{1800}{10800} P = \frac{P}{6} \uparrow$$

Luego carga en A: $P_r = \sqrt{\left(\frac{P}{3}+\frac{P}{3}\right)^2 + \left(\frac{P}{6}\right)^2}$

De donde: $\frac{\sqrt{17}}{6} P = P_r$; como: $P_r = 15$ kN

Se tiene: $\frac{\sqrt{17}}{6} P = 15$ kN; de donde: $\boxed{P = 21{,}8282 \text{ kN}}$; carga de seguridad

1235. En la unión remachada de la figura se ha empleado remaches de 22 mm de diámetro. Si P = 90 kN, hallar el espesor que debe tener la placa para que la presión de contacto no exceda de 140 MPa.



Resolución:

(Por contacto, esfuerzo admisible)

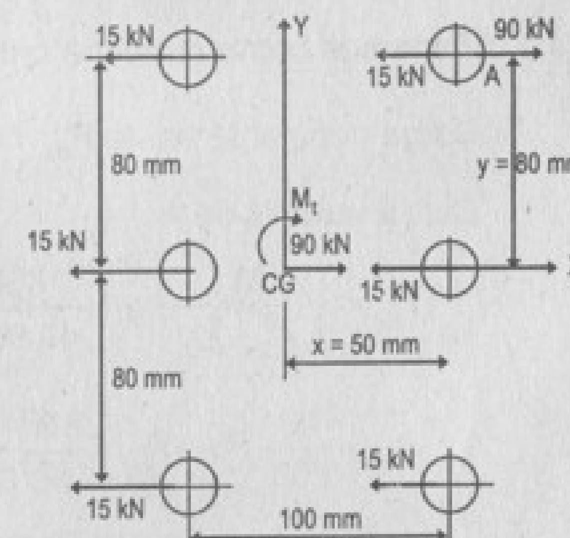
Cálculo del espesor de placa

$M_t = (90\ kN)(80 \times 10^{-3}\ m)$

$M_t = 7{,}2\ kN{\cdot}m$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 6 \times 50^2 + 4 \times 80^2$

$= 40\ 600\ mm^2 = 0{,}0406\ m^2$



Carga constante por remache:

$P_{d_x} = 15\ kN \leftarrow$; $P_{d_y} = 0$

Remache crítico en el remache A:

Carga variable en A:

$$P_{t_x} = \frac{7{,}2\ kN{\cdot}m}{0{,}0406\ m^2} \times 80 \times 10^{-3}\ m \Rightarrow P_{t_x} = 14{,}18719212\ kN \leftarrow$$

$$P_{t_y} = \frac{7{,}2\ kN{\cdot}m}{0{,}0406\ m^2} \times 50 \times 10^{-3} m \Rightarrow P_{t_y} = 8{,}866995\ kN \uparrow$$

Luego en A: $P_r = \sqrt{(15 + 14{,}18719212)^2 + (8{,}866995)^2}$

De donde $P_r = 30{,}50435681$ kN

Conocido P_r, se tiene que chequear que el esfuerzo por contacto no debe sobrepasar $\sigma_b = 140$ MPa:

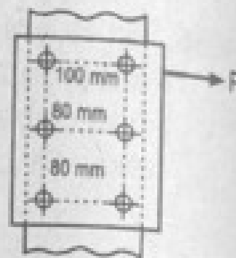
$$\frac{P_r}{(22\times 10^{-3} m)(e)} \leq 140\times 10^6\ MPa$$

Con valores: $\frac{30{,}50435681\times 10^3 N}{22\times 10^{-3}\ m(e\times 10^{-3} m)} \leq 140\times 10^6 \frac{N}{m^2}$

Donde "e" está en milímetros.

Luego: $e \geq 9{,}90401195 \times 10^{-3}$ m $\Rightarrow$ $\boxed{e = 9{,}90401195 \text{ mm}}$

1236. En el problema 1235 anterior, determinar P de manera que la máxima carga por remache sea de 20 kN.



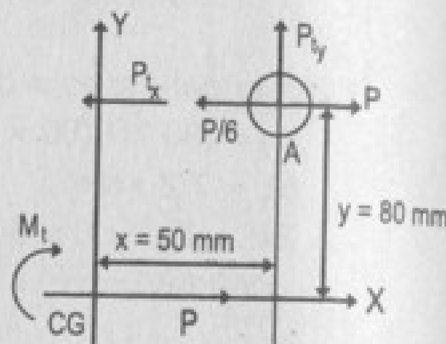
Resolución:

Momento en CG

$M_t = 80P$ mm

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 40\ 600\ mm^2 = 0{,}4006\ m^2$

Tomamos como remache crítico el A:



Carga constante en A: $P_{dx} = \frac{P}{6} \leftarrow$; $P_{dy} = 0$

Carga variable en A:

$$P_{t_x} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\ y = \frac{80P\ mm}{40\ 600\ mm^2} \times 80\ mm$$

$$P_{t_x} = \frac{32}{203}\ P \leftarrow P_{t_y} = \frac{80P \times 50\ mm^2}{40\ 600\ mm^2} = \frac{20P}{203} \uparrow$$

Luego en A: $P_r = \sqrt{\left(\frac{P}{6} + \frac{32P}{203}\right)^2 + \left(\frac{20P}{203}\right)^2}$; de donde $P_r = 0{,}338937298P$.

Como: $P_{rmáx} = 20$ kN;

tenemos: $0{,}338937298P = 20\ kN \Rightarrow \boxed{P = 59{,}0\ kN}$; carga de seguridad en A

1237. Resolver el problema 1235, suponiendo que la carga P se sustituye por una de 90 kN que pasa por el centro del remache superior con pendiente de 75% hacia arriba a la derecha.

Resolución:

Trasladando al CG

Tenemos el momento en CG:

$M_t = 54 \times 50 - 72 \times 80$

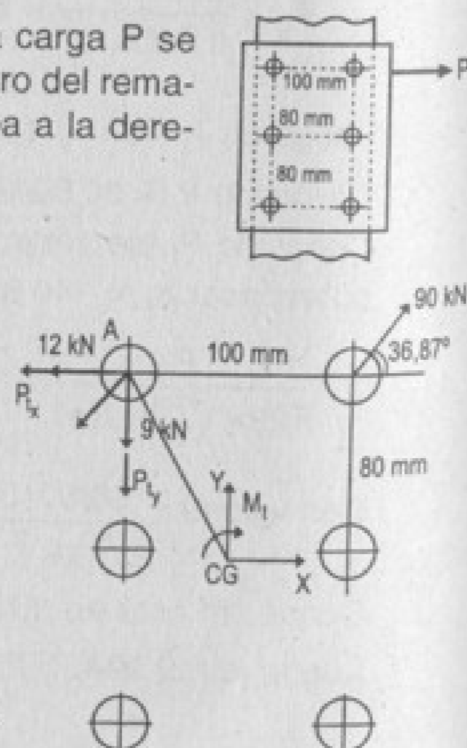
$M_t = 3\ 060\ 000$ N·mm ↻

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 40\ 600\ mm^2$

Tomamos punto crítico en el remache A.

Carga constante en A:

$$P_{d_x} = \frac{72\ kN}{6} = 12\ kN \leftarrow \quad P_{d_y} = \frac{54\ kN}{6} = 9\ kN \downarrow$$



Carga variable en A:

$$P_{t_x} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\ y = \frac{3\ 060\ 000\ N{\cdot}mm}{40\ 600\ mm^2} \times 80\ mm \Rightarrow P_{t_x} = 6{,}02955665\ kN \leftarrow$$

$$P_{t_y} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\ x = \frac{3\ 060\ 000}{40\ 600} \times 50 = 3{,}7684729\ kN \downarrow$$

$$P_r = \sqrt{\left(P_{d_x} + P_{t_x}\right)^2 + \left(P_{d_y} + P_{t_y}\right)^2}$$

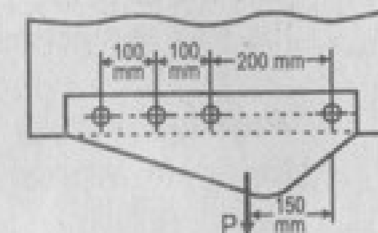
$$P_r = \sqrt{(12 + 6{,}02955665)^2 + (9 + 3{,}7684729)^2} \Rightarrow P_r = 22{,}09295845\ kN$$

Esfuerzo de contacto $\leq 140 \times 10^6\ N/m^2$

$$\frac{22{,}09295845 \times 10^3\ N}{(22 \times 10^{-3}\ m)(e \times 10^{-3})} \leq 140 \times 10^6\ N/m^2 \Rightarrow e \geq 6{,}97378739\ mm$$

$$\therefore \boxed{e = 6{,}974\ mm}$$

1238. En la conexión de la placa de amarre a un bastidor fijo que representa la figura; si P = 60 kN, calcular el esfuerzo cortante en el más cargado de los cuatro remaches de 22 mm.



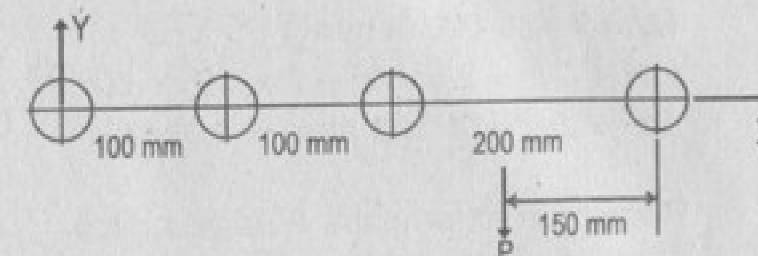
Resolución:

Cálculo del CG:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A}$$

$$\bar{x} = \frac{A\Sigma\bar{x}}{4A} = \frac{\Sigma\bar{x}}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{0 + 100 + 200 + 400}{4} = 175\ mm$$



Trasladamos la carga P al CG:

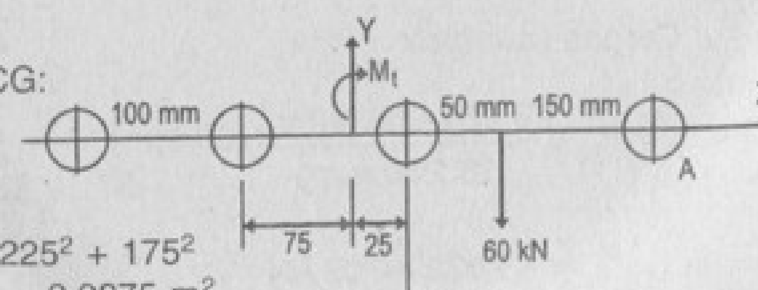
P = 60 kN

$M_t = 60\ kN \times 75\ mm$

$M_t = 4\ 500\ 000$ N·mm

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 25^2 + 75^2 + 225^2 + 175^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 87\ 500\ mm^2 = 0{,}0875\ m^2$



Remache crítico en A:

Carga constante: $P_{d_x} = 0$; $P_{d_y} = \dfrac{60}{4} = 15$ kN↑

Carga variable: $P_{t_y} = \dfrac{4\ 500\ 000}{87\ 500} \times 225$

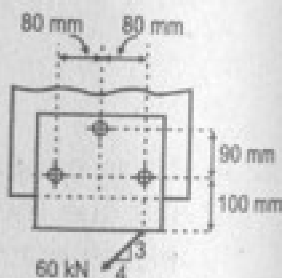
$P_{t_y} = 11{,}57142857$ kN ↑; $P_{t_x} = 0$

$P_r = P_{t_y} + P_{d_y} = 15 + 11{,}57142857 = 26{,}57142857$ kN

Luego como: $\tau = \dfrac{P_r}{\frac{\pi d^2}{4}}$; d = 22 mm; $\Rightarrow$ $\tau = \dfrac{26{,}57142857 \times 10^3\ \text{N}}{\frac{\pi \times (22\times10^{-3})^2\ \text{m}^2}{4}}$

De donde: $\boxed{\tau = 69{,}90040003\ \text{MPa}}$

1239. Dada la conexión que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante en el más cargado de los tres remaches de 22 mm.



Resolución:

En figura adjunta; trasladando la carga al CG del remache.

M_t = (48 kN)(130 mm) + (36 kN)(80 mm)

M_t = 9 120 000 N·mm

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 2 \times 80^2 + 2 \times 30^2 + 60^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 18\ 200\ \text{mm}^2 = 0{,}0182\ \text{m}^2$

Tomamos al remache A como crítico.

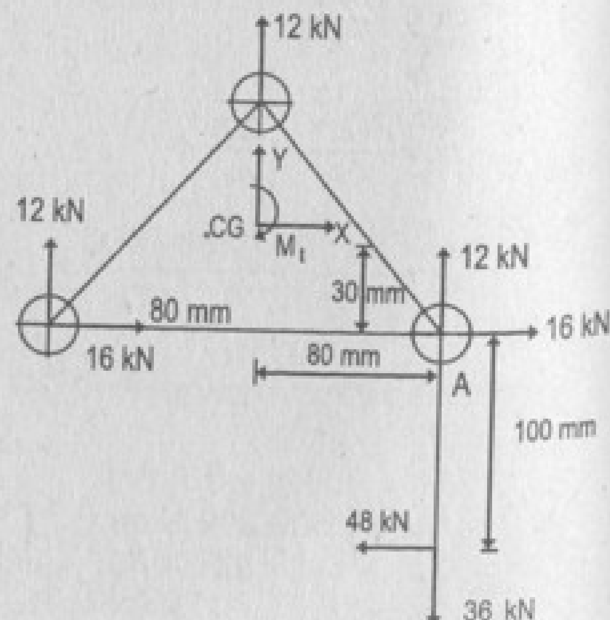
Carga constante: P_{d_x} = 16 kN→

P_{d_y} = 12 kN↑

Cargas variables:

$P_{t_x} = \dfrac{9\ 120\ 000\ \text{N·mm}}{18\ 200\ \text{mm}^2}(30\ \text{mm})$

P_{t_x} = 15,03296703 kN →



$P_{t_y} = \dfrac{9\ 120\ 000\ \text{N·mm}}{18\ 200\ \text{mm}^2}(80\ \text{mm})$

P_{t_y} = 40,0879 kN ↑

$P_r = \sqrt{(P_{d_x} + P_{t_x})^2 + (P_{d_y} + P_{t_y})^2}$

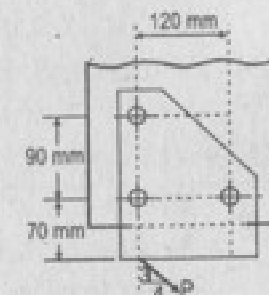
Con valores conocidos:

$P_r = \sqrt{(16 + 15{,}03296703)^2 + (12 + 40{,}0879)^2} \Rightarrow P_r = 60{,}63162846$ kN

Luego: $\tau = \dfrac{P_r}{\frac{\pi d^2}{4}}$, pero d = 22 mm

$\tau = \dfrac{60{,}63162846 \times 10^3\ \text{N}}{\frac{\pi (22\times10^{-3})^2\ \text{m}^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau = 159{,}5012128\ \text{MPa}}$

1240. Dada la conexión de la figura, calcular la carga admisible P si el esfuerzo cortante en los remaches de 25 mm está limitado a 140 MN/m².



Resolución:

En la figura adjunta, trasladando la carga al centro de gravedad.

M_t = (0,8P)(100) + (0,6P) (40)

M_t = 104P

Tomamos el punto crítico en el remache A

Carga constante: $P_{d_x} = \dfrac{0{,}8P}{3} = \dfrac{4P}{15}$ ←

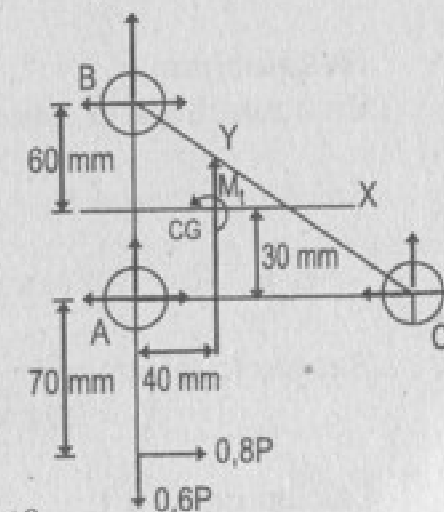
$P_{d_y} = \dfrac{0{,}6P}{3} = \dfrac{P}{5}$

Carga variable en A:

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 80^2 + 40^2 + 40^2 + 60^2 + 30^2 + 30^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 15\ 000\ \text{mm}^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 0{,}015\ \text{m}^2$



$$P_{t_x} = \frac{104P\ mm}{15\ 000\ mm}(30\ mm) = \frac{26}{125}P \leftarrow$$

$$P_{t_y} = \frac{104P\ mm}{15\ 000\ mm}(40\ mm) = \frac{104}{375}P \uparrow$$

Sumando ambas cargas en A:

$$P_r = \sqrt{\left(\frac{4P}{15} + \frac{26}{125}P\right)^2 + \left(\frac{P}{5} + \frac{104}{375}P\right)^2}$$

De donde: $P_r = 0,673168296\ P$ ...(α)

Como: $\dfrac{P_r}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq 140 \times 10^6 N/m^2$ ...(β)

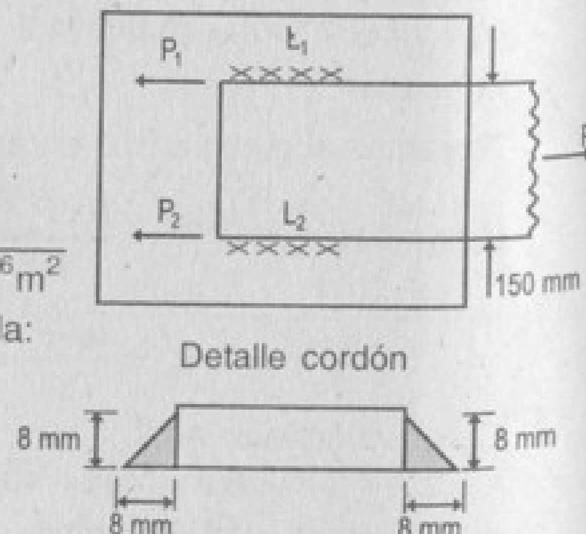
Con (α) y (β) tenemos: $P \leq \dfrac{140 \times \pi \times (25 \times 10^{-3})^2 \times 10^6}{4 \times 0,673168296} \Rightarrow \boxed{P = 102,0879024\ kN}$

1241. Problema Ilustrativo.

1242. Una placa de 150 mm de ancho por 14 mm de espesor se coloca sobre una placa fija y se suelda mediante filetes laterales. Determinar la mínima longitud de una soldadura de filete de 8 mm si la placa ha de soportar una fuerza de tracción axial que le produce un esfuerzo de 140 MPa; el esfuerzo cortante admisible en la garganta de la soldadura es de 145 MPa.

Resolución:

En figura adjunta tenemos:



Cálculo de carga P:

$$\sigma_t = 140 \times 10^6\ N/m^2 = \frac{P}{150 \times 14 \times 10^{-6} m^2}$$

Resistencia a tracción de la placa usada:

$P = 294\ kN$

Cálculo de $L_1 = L_2$:

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2} = 147\ kN$$

$$q = \frac{P}{L} = 103a = 103(8)$$

También $\dfrac{P}{L} = 145 \times 10^6 (\cos 45°)\ a \times 10^{-6}$; $q = \dfrac{P}{L} = 820,2438662\ \dfrac{N}{mm}$

Se sabe: $\dfrac{P_1}{L_1} = q \Rightarrow L_1 = \dfrac{P_1}{q}$

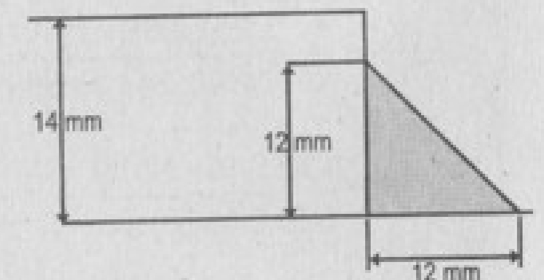
$$L_1 = \frac{147 \times 10^3\ N}{820,2438662\ \frac{N}{mm}} \Rightarrow \boxed{L_1 = 179,21\ mm}$$

1243. Resolver el problema 1242 empleando el máximo tamaño permitido de soldadura.

Resolución:

En problema anterior considere "a" lo máximo posible.

Tenemos de la figura:



$$q = 145 \times 10^6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) a \times 10^{-6}$$

Como a = 12 mm:

$q = 1230,365799\ N/mm$

$$L_1 = \frac{P_1}{q} = \frac{147 \times 10^3\ N}{1230,365799\ \frac{N}{mm}} \Rightarrow \boxed{L_1 = 119,476663\ mm}$$; por cada lado.

1244. Un ángulo de 150 × 100 × 13 mm se suelda a una placa con el ala de 150 mm en contacto con la placa. Si el ángulo soporta una carga centroidal de 400 kN, calcular la longitud de los cordones, en la base y en el borde superior, si son de 8 mm, suponiendo que el esfuerzo cortante admisible, en las gargantas de la soldadura, es de 145 MPa.

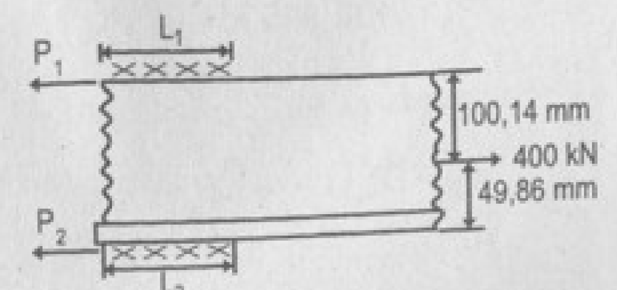
Resolución:

En la figura adjunta

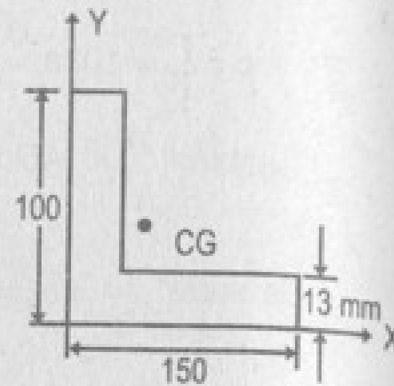
Tamaño del cordón: a = 8 mm

Sabemos: $\sigma_a = 145\ MPa$

Resistencia del cordón



Cálculo del CG:



$$\bar{x}=\frac{\sum \bar{x}A}{\sum A}$$

$$\bar{x}=\frac{75\times150\times100-81{,}5\times87\times137}{150\times100-87\times137}$$

$\bar{x}$ = 49,86 mm

Cálculo de P_1 y P_2:

Momentos respecto a la normal al plano que corte a P_1 y P_2.

$400 \times 100{,}16 = 150P_2 \Rightarrow P_2 = 267{,}056$ kN

$150\ P_1 = 400 \times 49{,}86 \Rightarrow P_1 = 132{,}945$ kN

$$q = 145 \times 10^6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) a \times 10^6\ \frac{N}{mm}\ ;\ a = 8\ mm$$

q = 820,244 N/mm

$$L_2=\frac{P_2}{q}=\frac{267{,}056\times10^3\ N}{820{,}244\ N/mm} \Rightarrow \boxed{L_2 = 325{,}54\ mm}$$

$$L_1=\frac{132{,}945\times10^3 N}{820{,}244\ N/mm} \Rightarrow \boxed{L_1 = 162{,}08\ mm}$$

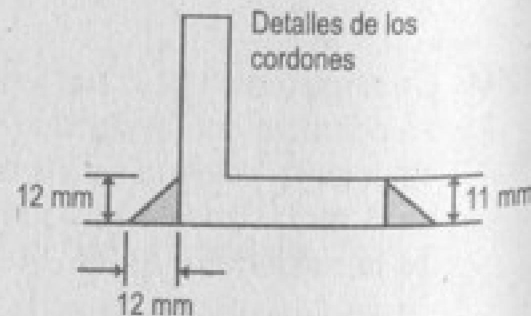
1245. Resolver el problema anterior si los cordones son de 12 mm en la base del ángulo y del máximo tamaño permitido en el borde superior.

Resolución:

En el problema anterior.

a = 12 mm; en la base del ángulo.

a = 13 – 2 = 11 mm; en borde superior.



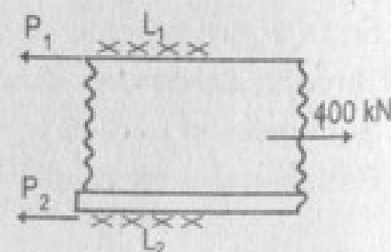
Del problema anterior tenemos:

P_2 = 267,056 kN

P_1 = 132,945 kN

Sabemos que:

$$q_2=\frac{P_2}{L_2};\ L_2=\frac{P_2}{q_2}$$

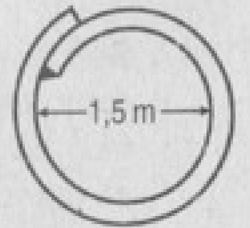


$$L_2=\frac{267{,}056\times10^3\ N}{145\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times12\ \frac{N}{mm}} \Rightarrow \boxed{L_2 = 217{,}053\ mm}$$

Luego: $L_1=\frac{P_1}{q_1}$; con valores tenemos;

$$L_1=\frac{132{,}945\times10^3\ N}{145\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times11\ \frac{N}{mm}} \Rightarrow \boxed{L_1 = 117{,}876\ mm}$$

1246. Con una placa de acero de 16 mm se forma un cilindro de 1,5 m de diámetro que se suelda mediante filetes frontales interior y exterior, como indica la figura. Determinar la máxima presión interior que puede aplicarse si los esfuerzos admisibles son de 160 MN/m² en la chapa y de 120 MN/m² a cortante en las gargantas de la soldadura. Emplear cordones del mayor tamaño admisible.

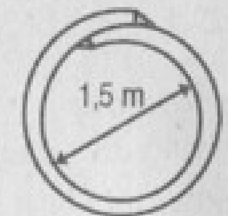


Resolución:

En la figura adjunta:

t = 16 mm

D = 1,5 m



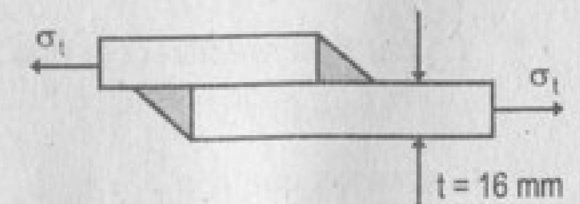
Sabemos: $\sigma_t=\frac{pD}{2t}$

Para casos D >> t

Resistencia de la chapa: σ_t = 160 MPa

Resistencia de soldadura: σ_a = 120 MPa

Como t = 16 mm; a = 16 – 2 = 14 mm



$$q = 120 \times 10^6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) 14 \times 10^{-6}\ N/mm$$

q = 1187,939 N/mm

$$\sigma_t = 160 \times 10^6\ N/m^2 = 160 \times 10^6\ \frac{N}{10^6 mm^2} = 160\ N/mm^2$$

Tomamos de la placa espesor = 16 mm y profundidad = 1 mm

Carga que soporta la placa: $P_1 = A\sigma_t = \frac{pD}{2t}A$

$P_1 = 160 \dfrac{N}{mm^2} \times 16\ mm \times 1\ mm = 2560\ N/mm$; profundidad

Resistencia de cordón por cada milímetro de profundidad:

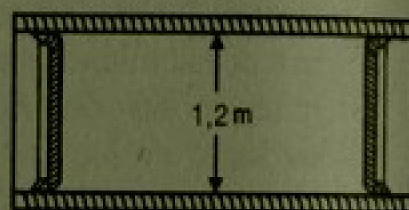
$P_2 = 2q = 2(1187{,}9394\ N/mm) = 2375{,}8787\ N/mm$

Sumando ambas cargas para 1 mm de profundidad; tenemos $P_1 + P_2 = pDL$

$4935{,}878784\ N = p \times 1{,}5 \times 10^3 \times 1\ mm^2 \Rightarrow p = 3{,}29 \dfrac{N}{mm^2}$

$\boxed{p = 3{,}29\ MPa}$; máxima carga o presión en cilindro.

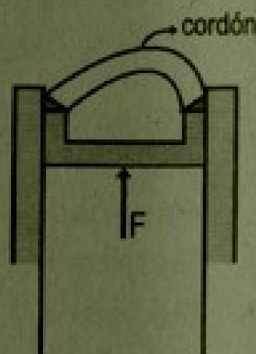
1247. Se construye un depósito cilíndrico soldando, como se ve en la figura, dos tapas en los extremos de un cilindro de 1,20 m de diámetro. Tanto el cilindro como las tapas son de placa de 10 mm. Determinar la presión interior de seguridad de manera que no se exceda un esfuerzo cortante de 110 MPa en la garganta del filete circunferencial, que será del máximo tamaño admisible.



Resolución:

De la figura adjunta tenemos:

Fuerza debida a la presión sobre la tapa es:



$$F_p = p\frac{\pi D^2}{4}$$

La carga de resistencia que el cordón opone.

$F_{cordón} = qL = q\pi D$

Sabemos que $q = \dfrac{P}{L} = \sigma_a L_a \cos 45°$

$$q = 110 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \times 8\ mm \times 10^{-6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = 622{,}254 \frac{N}{mm}$$

Como: $F_p = F_{cordón}$

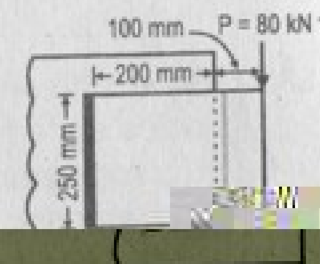
$p\pi \dfrac{D^2}{4} = q\pi D$; donde "p" presión del tanque

$$p = \frac{4q}{D} = \frac{4 \times 622{,}254}{1{,}2 \times 10^3} \frac{N}{mm};\ p = 2{,}074179891\ N/mm^2$$

$\boxed{p = 2{,}074179891\ MPa}$

1248. Problema ilustrativo.

1249. Un soporte ménsula se suelda a la base de una máquina como indica la figura. Determinar el tamaño a de los cordones de soldadura, rodeados al milímetro, usando $\tau = 145\ MPa$ en las gargantas de la soldadura.

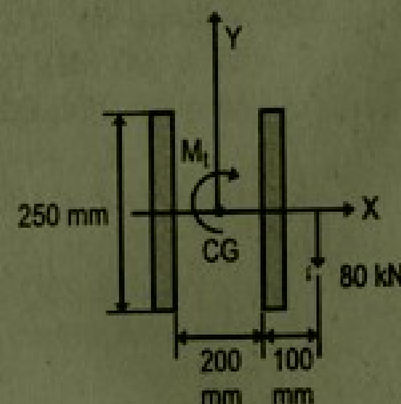


Resolución:

En figura adjunta, trasladando la carga al centro de gravedad:

$M_t = (80\ kN)(200\ mm)$

$M_t = 16\ kN{\cdot}mm$



$$I_P = \Sigma L\left(\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$I_P = 2 \times 250\left(\frac{250^2}{12} + 100^2 + 0^2\right)$$

$$I_P = 7\ 604\ 166\ \frac{2}{3}\ mm^3$$

Tomamos como punto crítico el punto A.

Carga constante: $q_{d_y} = \dfrac{80 \times 10^3}{500\ mm} N = 160 \dfrac{N}{mm} \uparrow$; $q_{d_x} = 0$

Carga variable en A: $q_{t_x} = \dfrac{16\ 000\ 000\ N{\cdot}mm}{7\ 604\ 166\ \frac{2}{3}\ mm^3}(125\ mm) = 263{,}014 \dfrac{N}{mm}$

$$q_{t_y} = \frac{16\ 000\ 000\ mm^2}{7\ 604\ 166\ \frac{2}{3}\ mm^3}(100) = 210{,}411\ N/mm \uparrow$$

La resultante en A será: $q_A = \sqrt{(q_{d_x} + q_{t_x})^2 + (q_{d_y} + q_{t_y})^2}$

$$q_A = \sqrt{(160 + 210{,}411)^2 + 263{,}014^2};\ q_A = 454{,}2914\ N/mm$$

Como: τ = 145 MPa ; resistencia del cordón.

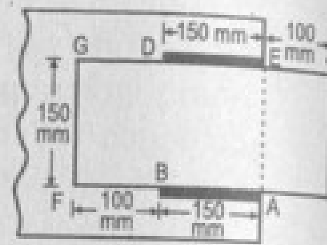
$q = 103a = q_A = 454{,}2914$ N/mm

Luego: $103a = 454{,}2914$ N/mm

De donde: $a = 4{,}41$ mm

El superior más cercano: $\boxed{a = 5 \text{ mm}}$

1250. Se suelda una placa soporte a una placa fija como se indica en la figura. Determinar el calibre de los cordones rodeando al milímetro. Hallar el valor máximo de P que podría aplicarse con cordones de 8 mm, usando t = 145 MPa en las gargantas de la soldadura.



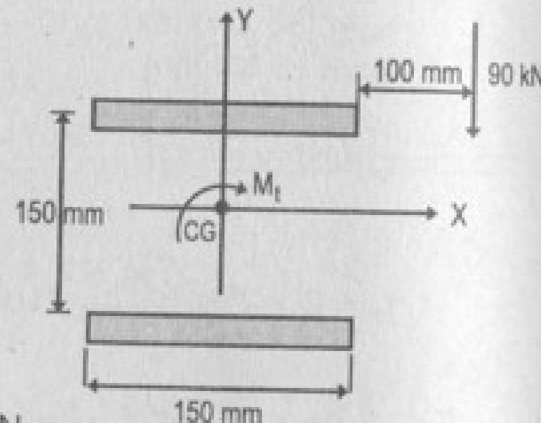
Resolución:

En figura adjunta:

a) Cálculo de "a", para P = 90 kN

$M_t = (90 \text{ kN})(175 \text{ mm})$

$M_t = 15\,750\,000$ N·mm



Luego: $I_p = 2 \times 150\left(\dfrac{150^2}{12} + 75^2 + 0^2\right)$

$I_p = 2\,250\,000 \text{ mm}^3$

Tomamos A como punto crítico:

Carga constante: $q_{d_y} = \dfrac{90 \times 10^3 \text{ N}}{300 \text{ mm}} = 300 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}} \uparrow$

$q_{d_x} = 0$

Carga variable:

$$q_{tx} = \frac{M_t\, y}{I_p} = \frac{15\,750\,000 \text{ N.mm}}{2250000 \text{ mm}^3} \times 75 \text{ mm} = 525 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \leftarrow$$

$$q_{ty} = 525 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \uparrow$$

Luego: $q_A = \sqrt{(300+525)^2 + (525)^2}$, de donde: $q_A = 977{,}88$ N/mm

Como τ_a= 145 MPa en cordón E-70; A36

$q_A = 103a = 977{,}88$ N/mm

De donde: $a = 9{,}4939$ mm

El más cercano superior: $\boxed{a = 10 \text{ mm}}$

b) Si a = 8 mm. Cálculo de valor máximo de P.

Considerando A el punto crítico:

Carga constante: $q_{d_y} = \dfrac{P}{300} \uparrow;\ q_{d_x} = 0$

Momento en CG: $M_t = 175$ P

Carga variable en A:

$$q_{t_x} = \frac{175\, P \times 75}{2\,250\,000} = \frac{7P}{1200} \leftarrow;\quad q_{t_y} = \frac{7\,P}{1200} \uparrow$$

$$q_A = \sqrt{\left(\frac{P}{300} + \frac{7P}{1200}\right)^2 + \left(\frac{7P}{1200}\right)^2} = 0{,}010865337P$$

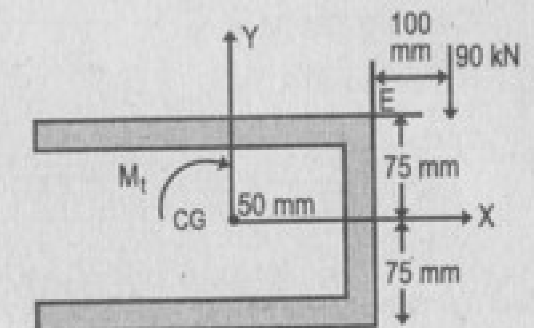
Como $q_A = 103a = 103(8) = 824 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}} = 0{,}010865337P \Rightarrow \boxed{P = 75{,}8375 \text{ kN}}$

1251. En el problema 1250, determinar la fuerza máxima por milímetro de cordón si se añade otro cordón frontal a lo largo de todo el borde AE.

Resolución:

En figura adjunta:

Centro de gravedad es:



$\bar{y} = 75$ mm

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma \bar{x} L}{\Sigma L} = 50$ mm

El momento torsor es:

$M_t = 90 \times 150 \times 10^3$ N·mm

$M_t = 13\,500\,000$ N·mm

$$I_p = \Sigma L\left(\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$I_p = 2 \times 150\left(\frac{150^2}{12} + 25^2 + 75^2\right) + 150\left(\frac{150^2}{12} + 50^2\right) \Rightarrow I_p = 3\,093\,750 \text{ mm}^3$$

Se toma punto crítico en el punto E:

Carga constante: $q_{d_y} = \dfrac{90\,000 \text{ N}}{450 \text{ mm}} = 200 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}} \uparrow;\ q_{d_x} = 0$

Carga variable en E: crítico en E

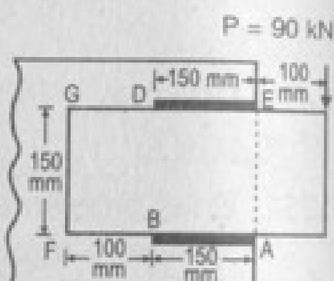
$$q_{t_x} = \frac{M_t\, y}{I_p} = \frac{13\,500\,000 \text{ N.mm}}{3\,093\,750 \text{ mm}^3} \times 75 \text{ mm} \Rightarrow q_{t_x} = 327{,}273 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \leftarrow$$

$$q_{t_y} = \frac{M_t\, x}{I_p} = \frac{13\,500\,000}{3\,093\,750 \text{ mm}^3}(50 \text{ mm}) \Rightarrow q_{t_y} = 218{,}182 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \uparrow$$

$$q_E = \sqrt{(200 + 218{,}182)^2 + 327{,}273^2}$$

$$\boxed{q_E = 531{,}02147 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$; carga máxima que soporta el cordón por mm.

1252. En la figura se sueldan también los bordes AE y GF. Determinar la fuerza máxima por milímetro de cordón.



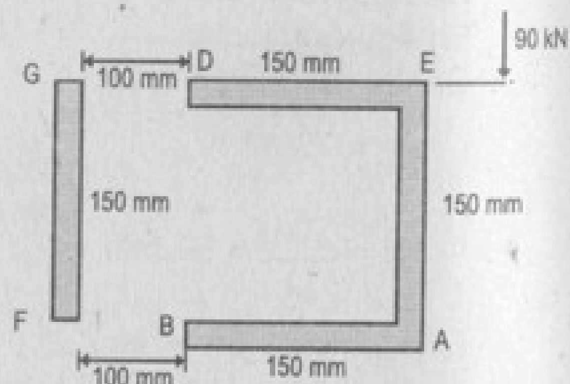
Resolución:

El problema 1250 se suelda AE y GF

Hallar el $q_{máx}$ del cordón

Cálculo de $\bar{x}$ y $\bar{y}$:

Referido a A:



$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}\, L}{\sum L}$$

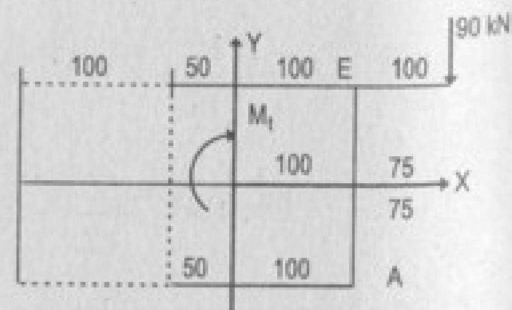
$$\bar{x} = \frac{75 \times 150 \times 2 + 250 \times 150}{600}$$

$\bar{x}$ = 100 mm; por simetría: $\bar{y}$ = 75 mm

El momento M_t es:

M_t = (90 kN)(200 mm)

M_t = 18 000 000 N·mm



Tomamos como punto crítico A o E:

Iguales por simetría

Carga constante: $q_{d_y} = \frac{90\,000 \text{ N}}{600 \text{ mm}} = 150 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \uparrow$; $q_{d_x} = 0$

Carga variable en E:

$$I_P = \Sigma L\left(\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$I_P = 150\left(\frac{150^2}{12} + 25^2 + 75^2\right) \times 2 + 150\left(\frac{150^2}{12} + 100^2\right) + 150\left(\frac{150^2}{12} + 150^2\right)$$

De donde: $I_p = 7\,875\,000 \text{ mm}^3$

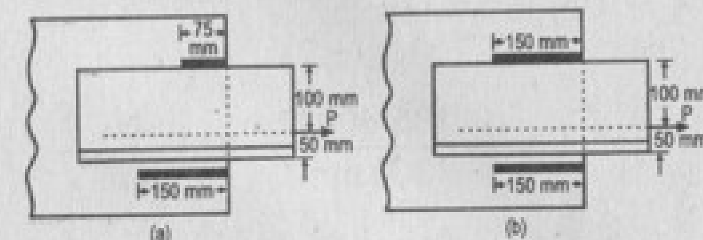
$$q_{t_x} = \frac{M_t}{I_p} y = \frac{18\,000\,000 \text{ N·mm}}{7\,875\,000 \text{ mm}^3}(75 \text{ mm}) \Rightarrow q_{t_x} = 171{,}428 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \leftarrow$$

$$q_{t_y} = \frac{18\,000\,000 \text{ N·mm}}{7\,875\,000 \text{ mm}^3}(100 \text{ mm}) \Rightarrow q_{t_y} = 228{,}571 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \uparrow$$

$$q_E = \sqrt{171{,}428^2 + (228{,}571 + 150)^2} \Rightarrow \boxed{q_E = 415{,}576 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

Valor máximo del cordón en E.

1253. Se suelda un ángulo a una placa para soportar una carga P cuya línea de acción pasa por el centro de gravedad de la sección del ángulo. (a) En la figura se indican las longitudes necesarias de los cordones de 8 mm; pero un soldador aplicó los cordones como en (b) de la misma figura. Con la carga P determinada en (a), calcular la máxima carga por milímetro de cordón en (b), suponiendo que las placas son rígidas y que sólo las soldaduras trabajan elásticamente, con un valor de τ = 145 MPa en las gargantas de las soldaduras.



Resolución:

a) Cálculo de P, en la figura (a) se tiene:

$P = P_1 + P_2$

Como τ = 145 MPa

q = 103 a

$q = 103(8) = 824 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

$$P = (75\ mm)\ (824\ \frac{N}{mm}) + 150\ mm\ (824\ \frac{N}{mm})$$

$P = 185\ 400\ N$

$P = 185{,}4\ kN$

b) Carga máxima $q_{máx}$ si por error en vez de (a) se hizo (b)

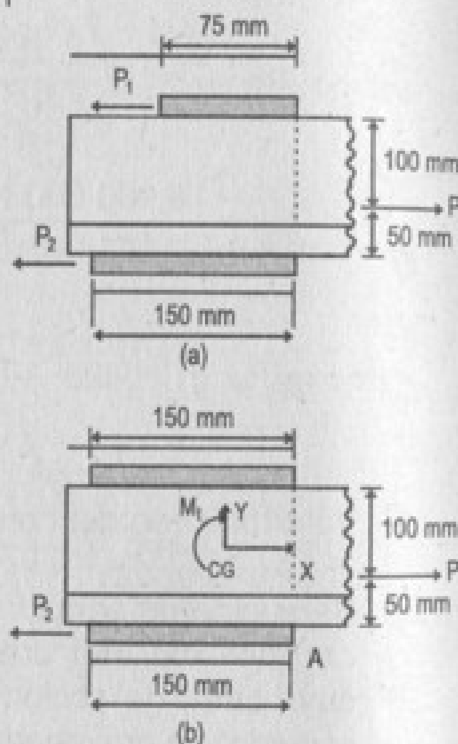
De lo anterior: $P = 185{,}4\ kN$

$M_t = 185\ 400\ N \times 25\ mm = 4\ 635\ 000\ N{\cdot}mm$

$$I_p = \Sigma L\left(\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$I_p = 2 \times 150\left(\frac{150^2}{12} + 0^2 + 75^2\right)$$

$I_p = 2\ 250\ 000\ mm^3$



Se toma punto crítico en interior derecho A:
Carga constante:

$$q_{d_x} = \frac{185\ 400\ N}{300\ mm} = 618\ \frac{N}{mm} \leftarrow$$

$q_{d_y} = 0$

Carga variable: $q_{t_x} = \frac{M_t\ y}{I_p}$; $q_{t_y} = \frac{M_t\ x}{I_p}$

$$q_{t_x} = \frac{4\ 635\ 000\ N{\cdot}mm}{2\ 250\ 000\ mm^3}(75\ mm) = 154{,}5\ \frac{N}{mm} \leftarrow$$

$$q_{t_y} = 154{,}5\ \frac{N}{mm} \downarrow$$

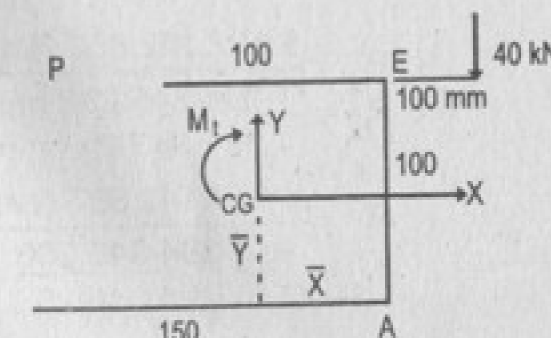
$$q_A = \sqrt{(618 + 154{,}5)^2 + 154{,}5^2} \Rightarrow q_A = 787{,}7985\ \frac{N}{mm}$$

1254. Resolver el problema ilustrativo 1248 si se añade otro cordón a lo largo del borde de 100 mm de espesor, en A.

Resolución:

En la figura adjunta cordones DE, EA, AB y cálculo de $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Referido al punto A



$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x} L}{\Sigma L}$$

$$\bar{x} = \frac{50 \times 100 + 75 \times 150}{350}$$

$$\bar{x} = 46\frac{3}{7}\ mm\ ;\ \bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} L}{\Sigma L} = \frac{100 \times 100 + 100 \times 50}{350}$$

$$\bar{y} = 42\frac{6}{7}\ mm$$

Trasladando la carga al CG hallado:

$$M_t = (40\ 000\ N)\left(146\frac{3}{7}\right) mm \Rightarrow M_t = 5\ 857\ 142{,}857\ N{\cdot}mm$$

$$I_P = \Sigma L\left(\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$I_P = 100\left(\frac{100^2}{12} + \left(3\frac{4}{7}\right)^2 + \left(57\frac{1}{7}\right)^2\right) + 100\left(\frac{100^2}{12} + \left(46\frac{3}{7}\right)^2 + \left(7\frac{1}{7}\right)^2\right)$$

$$+150\left(\frac{150^2}{12} + \left(28\frac{4}{7}\right)^2 + \left(42\frac{6}{7}\right)^2\right)$$

$I_p = 1\ 394\ 345{,}238\ mm^3$

Elegimos el punto E como crítico.
Carga constante en E:

$$P_{d_y} = \frac{40\ 000}{350\ mm}N = 114\frac{2}{7}\ N.m \uparrow$$

$P_{d_x} = 0$

Carga variable en E: $P_{t_x} = \frac{M_t}{I_p} y$

$$P_{t_x} = \frac{5\,857\,142{,}857 \text{ N.mm}}{1\,394\,345.238 \text{ mm}^3}\left(57\frac{1}{7}\text{mm}\right) \Rightarrow P_{t_x} = 240{,}0366\ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \leftarrow$$

$$P_{t_y} = \frac{5\,857\,142{,}857 \text{ N.mm}}{1\,394\,345{,}238}\left(46\frac{3}{7}\text{mm}\right) \Rightarrow P_{t_y} = 195{,}0297\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Luego: $P_E = \sqrt{\left(114\frac{2}{7} + 195{,}0297\right)^2 + 240{,}0366^2}$

$P_E = 391{,}5272594$ N/mm

Como $\tau = 145$ MPa; electrodo E-70, A36

$q_E = 103a$; $\boxed{q_E = 391{,}5272394 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$

De donde: a = 3,801235 mm
El más cercano superior es: a = 4 mm recomendable.

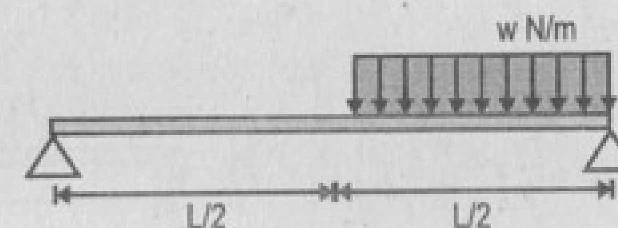
CAPÍTULO 13

TEMAS ESPECIALES

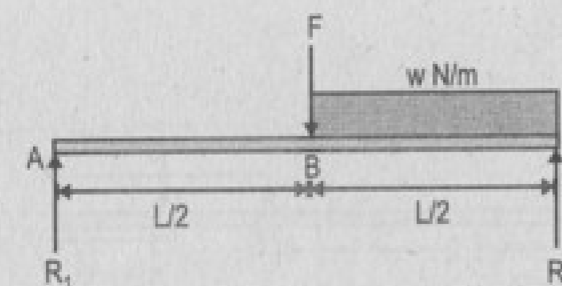
1301; 1302: problemas ilustrativos.

1303. Determinar el valor de EIδ en el centro del claro en una viga simplemente apoyada en sus extremos, de longitud L, que soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m sobre su mitad derecha.

Resolución:



Graficando una viga simplemente apoyada, con carga uniforme sobre su mitad derecha:



Como nos piden la deflexión en el centro del claro, es decir, en el punto medio de la viga, aplicaremos ahí una carga ficticia F de valor nulo en ese punto. En el diagrama del cuerpo libre del sistema hallaremos las reacciones en los puntos de apoyo.

Por las ecuaciones de la estática: $\Sigma M_A = R_2(L) - F\left(\frac{L}{2}\right) - w\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) = 0$

Así: $R_2 = \frac{F}{2} + \frac{3}{8}wL$ ...(1)

$$\Sigma F_{verticales} = R_1 + R_2 - F - \frac{wL}{2} = 0$$

Así: $R_1 = \frac{F}{2} + \frac{wL}{8}$ ...(2)

La deflexión en el punto B será: $\delta_B = \frac{\partial T}{\partial F}$, donde $T = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

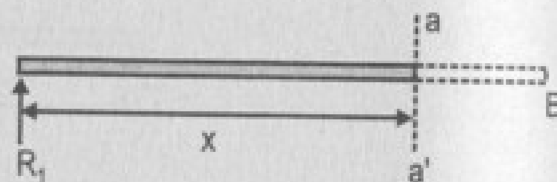
Así: $\delta_B = \frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial F} ds$; para F = 0

Ya que EI es constante.

Hallando los momentos flectores en cada tramo respecto a la variable redundante "x".

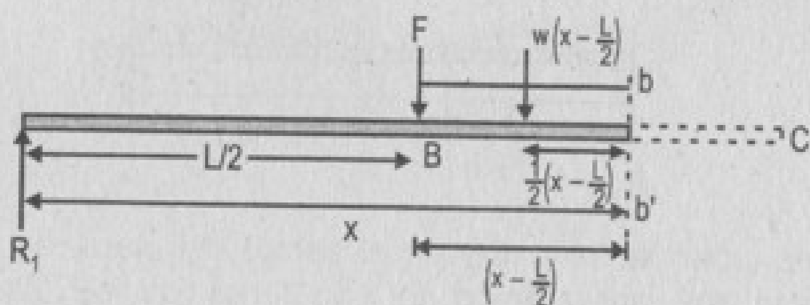
Tramo AB:

$\Sigma M_{aa'} = R_1 x = \left(\frac{F}{2}x + \frac{w}{8}Lx\right) = M$



donde $\frac{\partial M}{\partial F} = \frac{x}{2}$, para x ∈ [0; L/2]

Tramo BC:



$\Sigma M_{bb'} = R_1(x) - F\left(x - \frac{L}{2}\right) - w\left(x - \frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) = M$

Luego: $M = \left(\frac{F}{2} + \frac{wL}{8}\right)x - F\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{w}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2$

Y: $\frac{\partial M}{\partial F} = \frac{(L-x)}{2}$ para x ∈ [L/2 ; L]

Como F = 0, hallando δ_B:

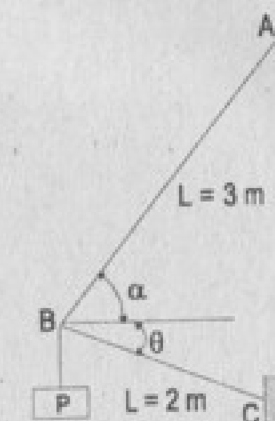
$$\delta_B = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{L/2}\left(\frac{wL}{8}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_{L/2}^{L}\left(\frac{wL}{8}x - \frac{w}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2\right)\left(\frac{L-x}{2}\right)dx\right)$$

$$EI\delta_B = \frac{w}{16}\left(\int_0^{L/2} Lx^2dx + \int_{L/2}^{L}\left(4x^3 - 9Lx^2 + 6L^2x - L^3\right)dx\right)$$

Operando y simplificando: $Ei\delta_B = \frac{w}{16}L^4\frac{5}{(48)}$

Tenemos que: $\boxed{EI\delta_B = \frac{5}{768}wL^4}$

1304. Como se indica en la figura, dos varillas de aluminio AB y BC, articuladas en A y C a apoyos rígidos, soportan en B una carga vertical de 20 kN. Si las dos varillas tienen la misma sección recta de 400 mm² y E = 70 GPa, calcular los desplazamientos horizontal y vertical del punto B. Tómese α = 30° y θ = 30°.



Resolución:

Por efecto de la carga P, las varillas AB y BC soportan efectos de tensión o compresión. Haciendo el diagrama del cuerpo libre en el punto B:

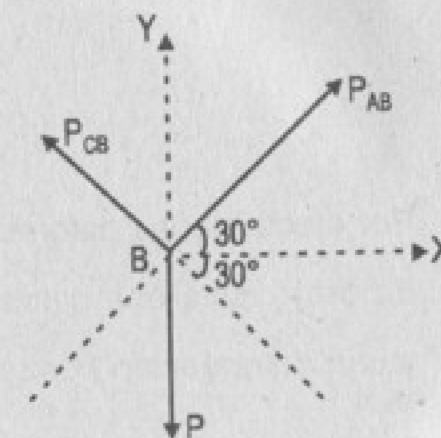
Para el equilibrio:

$\Sigma F_x = 0$, así:

P_{AB} (cos 30°) = P_{CB} (cos 30°)

$\Sigma F_y = 0$, así:

P_{AB} (sen 30°) + P_{CB} (sen 30°) = P



Resolviendo:

$P_{AB} = P_{CB} = P$ ...(1)

Las deformaciones de cada varilla son: $\left(\text{utilizando } \delta = \frac{PL}{EA}\right)$

Varilla AB: P_{AB} = P, de tensión.

Así: $\delta_{AB} = \dfrac{P_{AB}\,L_{AB}}{EA}$, de alargamiento. $\Rightarrow \delta_{AB} = \dfrac{(20\,kN)(3m)}{(70GPa)(400\,mm^2)}$

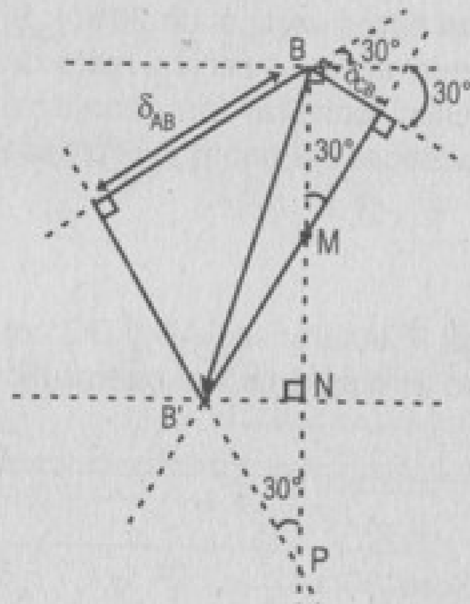
$$\delta_{AB} = \frac{(20\times10^3\,N)(3)(1000)^3\,mm^3}{(70\times10^9\,N)(400\,mm^2)} \Rightarrow \delta_{AB} = \frac{15}{7}\text{ mm de alargamiento}$$

Varilla CB:

P_{CB} = P de compresión

$$\delta_{AB} = \frac{P_{CB}.L_{CB}}{EA} = \frac{(20\,kN)(2m)}{(70GPa)(400\,mm^2)} \Rightarrow \delta_{AB} = \frac{10}{7}\text{ mm de acortamiento}$$

Haciendo el gráfico de deformaciones:



Por efecto de las deformaciones el punto B es trasladado al punto B'.

Es decir, sufre una deformación vertical: δ_v = BN = BM + MN

y una deformación horizontal: δ_h = B'N

Por relaciones geométricas: BM = $2\delta_{CB}$; BP = $2\delta_{AB}$ y MN = NP = $\delta_{AB} - \delta_{CB}$

Así: $\quad BN = \delta_{AB} + \delta_{CB} = \delta_V \qquad ...(2)$

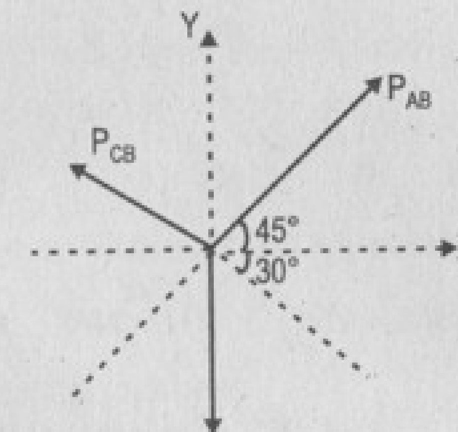
Además: $\quad B'N = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,MN = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(\delta_{AB} - \delta_{CB}) = \delta_h \qquad ...(3)$

Por lo tanto: $\quad \boxed{\delta_v = \dfrac{25}{7}\text{ mm}} \wedge \boxed{\delta_h = \dfrac{5\sqrt{3}}{21}\text{ mm}}$

1305. Resolver el problema anterior si la varilla AB es de acero, con E = 200 GPa, $\alpha = 45°$ y $\theta = 30°$. El resto de los datos no varía.

Resolución:

Haciendo el diagrama del cuerpo libre en el punto B:



Para el equilibrio:

$\Sigma F_x = 0$; $P_{AB}\cos 45° = P_{CB}\cos 30° \qquad ...(1)$

$\Sigma F_y = 0$; $P_{AB}\text{sen } 45° = P_{CB}\text{sen } 30° = P \qquad ...(2)$

Resolviendo: $P_{AB} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}-1)P$, de tensión.

$P_{CB} = (\sqrt{3}-1)P$, de compresión.

Como tenemos los datos:

P = 20 kN ; L_{AB} = 3 m ; L_{CB} = 2 m

E = 200 GPa ; A = 400 mm^2

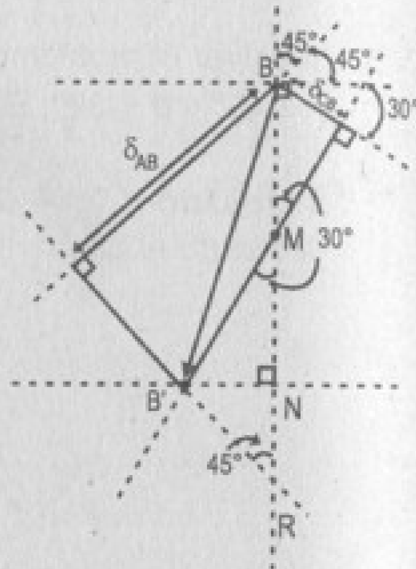
Hallando las deformaciones:

$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB}\,L_{AB}}{EA} = \frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{(\sqrt{3}-1)(20\,kN)(3\,m)}{(200GPa)(400\,mm^2)}$$

$$\delta_{AB} = \frac{3}{8}\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right) \text{ mm, de alargamiento.}$$

$$\delta_{CB} = (\sqrt{3}-1)\ \frac{(200\text{ kN})(2\text{ m})}{(200\text{ GPa})(400\text{ mm}^2)}$$

$$\delta_{CB} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} \text{ mm, de acortamiento.}$$



Llevando a la gráfica de deformaciones. El punto B se deforma hasta alcanzar el punto B':

La deformación horizontal será:

$\delta_H = B'N$ ...(3)

La deformación vertical será:

$\delta_v = BN = BM + MN$ ...(4)

Por relaciones geométricas:

$$BR = \sqrt{2}\delta_{AB}\ ;\ BM = 2\delta c_B\ ;\ B'N = NR\ ;\ MN = \sqrt{3}\,B'N$$

Así: $BR = BM + MN + NR$

Luego: $\sqrt{2}\delta_{AB} = 2\delta_{CB} + \sqrt{2}\,B'N + B'N$

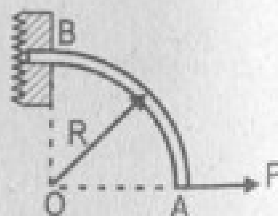
Por lo tanto: $\delta_h = B'N = \dfrac{\sqrt{2}\delta_{AB} - 2\delta_{CB}}{(\sqrt{3}+1)}$

y: $\delta_v = 2\delta_{CB} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\left(\sqrt{2}\delta_{AB} - 2\delta_{CB}\right) \Rightarrow \delta_v = \dfrac{2\delta_{CB} + \sqrt{6}\,\delta_{AB}}{\sqrt{3}+1}$

Reemplazando los valores:

$\boxed{\delta_h = 0{,}08 \text{ mm}}$ $\boxed{\delta_v = 0{,}87 \text{ mm}}$

1306. Una barra curva en forma de cuarto de círculo, empotrada en un extremo, está situada en un plano vertical, como se indica en la figura. Calcular los desplazamientos horizontal y vertical del punto A.



Resolución:

Tomando en cuenta solo los efectos de la flexión.

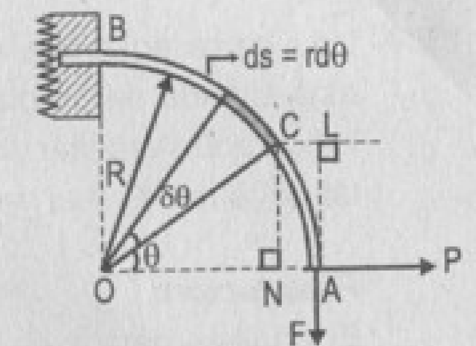
Para hallar el desplazamiento vertical aplicaremos una fuerza F ficticia de valor nulo. Para que de acuerdo con el teorema de Castigliano en el punto A tendremos:

Desplazamiento vertical: $\delta_v = \dfrac{\partial U}{\partial F}$, para F = 0

Desplazamiento horizontal: $\delta_h = \dfrac{\partial U}{\partial P}$, para F = 0

Donde: $U = \int \dfrac{M^2}{2EI}ds$ ...(1)

Haciendo el diagrama del cuerpo libre y tomando momentos en un punto genérico C, para un elemento diferencial:



El momento flexionante respecto a C es:

$$M = P(AL) - F(CL)$$

De las relaciones trigonométricas:

$$AL = CN = R\text{sen}\theta$$
$$CL = NA = R(1-\cos\theta)$$

Así: $M = (R\text{sen}\theta)P - (R)(1-\cos\theta)F$

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial P} = R\text{sen}\theta\ ;\ \theta \in \langle 0\,;\,\pi/2\rangle \ \wedge\ \dfrac{\partial M}{\partial F} = -R(1-\cos\theta)$

De (1): $\delta_h = \dfrac{\partial U}{\partial P} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial P}ds$, para F = 0

Asumiendo que EI es constante:

$$\delta_h = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{R\text{sen}\theta}{EI}\right)P(R\text{sen}\theta)Rd\theta$$

$$\delta_h = \frac{R^3P}{EI}\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2\theta d\theta \Rightarrow \boxed{\delta_h = \frac{\pi R^3 P}{4EI}}$$

Como: $\delta_v = \dfrac{\partial U}{\partial F} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial F}\,ds$, si $F = 0$

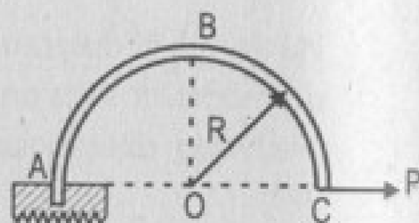
$$\delta_v = \int_0^{\pi/2} \frac{(R\,sen\theta)}{EI} P(-R)(1-\cos\theta)\,Rd\theta$$

$$\delta_v = \frac{R^3P}{EI}\int_0^{\pi/2}(-1+\cos\theta)\,sen\theta d\theta \Rightarrow \boxed{\delta_v = -\frac{1}{2}\frac{R^3P}{EI}}$$

El signo negativo indica que el desplazamiento vertical es hacia arriba.

Nota: la fuerza ficticia hay que colocarla siempre en la dirección que se busca, o se supone se produce.

1307. Una barra en forma de media circunferencia está situada en un plano vertical, como indica la figura. Determinar el desplazamiento horizontal del punto C y el vertical del punto B.



Resolución:
El análisis para este problema es el mismo que el anterior, con la única salvedad que $\theta \in \langle 0;\pi\rangle$; produciendo con ello un cambio de los límites de la integral.

Para el desplazamiento horizontal en el punto C:

$$\delta_h = \int_0^{\pi}\frac{R^3P}{EI}sen^2\theta\,d\theta \Rightarrow \boxed{\delta_h = \frac{R^3P}{EI}\frac{\pi}{2} = \delta_{C_h}}$$

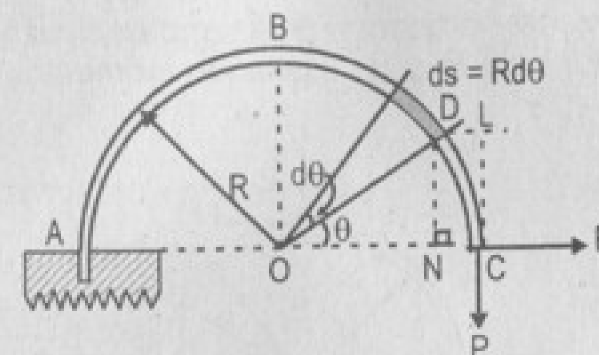
Para el desplazamiento vertical del punto B. Para este valor, θ varía de $\langle 0;\pi/2\rangle$; así:

$$\delta_v = \frac{R^3P}{EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,sen\theta d\theta \Rightarrow \boxed{\delta_v = \frac{R^3P}{2EI} = \delta_{B_v}}$$

Nota: aquí ya cambiamos el signo, dado que el desplazamiento vertical es hacia arriba.

1308. Repetir el problema anterior si P está aplicada en C, pero verticalmente hacia abajo.

Resolución:
Graficando la carga P vertical en C y una carga ficticia F nula horizontal en C donde se supone se desplaza.



Tomando el momento flexionante en el punto genérico D:
$M = F(LC) - P(DL)$ ...(1)

Como: $LC = DN = R\,sen\theta$
$DL = NC = R(1-\cos\theta)$

En (1): $M = F(Rsen\theta) - PR(1-\cos\theta)$ ...(1)*

con $\theta \in \langle 0;\pi\rangle$

Por el teorema de Castigliano tenemos:

Desplazamiento vertical: $\delta_v = \dfrac{\partial U}{\partial P}$, para $F = 0$

Desplazamiento horizontal: $\delta_h = \dfrac{\partial U}{\partial F}$, para $F = 0$

Donde: $U = \int \dfrac{M^2}{2EI}ds$

Así: $\dfrac{\partial U}{\partial P} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial P}ds \quad \wedge \quad \dfrac{\partial U}{\partial F} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial F}ds$

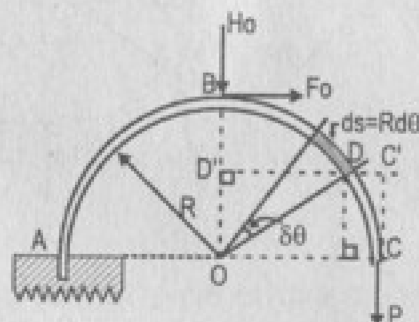
De (1)*: $\dfrac{\partial M}{\partial P} = -(1-\cos\theta)R$ y $\dfrac{\partial M}{\partial F} = Rsen\theta$

Para el desplazamiento horizontal en C:

$$\delta_h = \int_0^{\pi}\frac{-PR(1-\cos\theta)}{EI}(-1)(1-\cos\theta)R\,(Rd\theta)$$

$$\delta_h = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta \Rightarrow \delta_h = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \delta_{Ch}$$

Para el desplazamiento vertical en B, y también horizontal: colocar dos fuerzas ficticias de valor nulo F_o y H_o. Hallando momentos respecto a un genérico D:



Por efecto de la carga P vertical solo genera flexión, así:

Desplazamiento vertical:

$$\delta_v = \frac{\partial U}{\partial H_o}, \text{ para: } \quad H_o = 0 \ ; \ F_o = 0$$

Desplazamiento horizontal: $\delta_h = \dfrac{\partial U}{\partial F_o}$ para: $H_o = 0$; $F_o = 0$

Como: $U = \int \dfrac{M^2}{2EI}ds$ y $\dfrac{\partial U}{\partial Q} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial Q}ds$

El momento flexionante en el punto D es:

$$M = F_o(BD') + P(DC') - H_o(D'D)$$

Así: $M = F_o(R)(1-\cos\theta) + PR(1-\cos\theta) - H_oR\cos\theta$, donde $F_o = H_o = 0$

Luego: $\dfrac{\partial M}{\partial F_o} = R(1-\cos\theta)$ ...(1)

$\dfrac{\partial M}{\partial H_o} = -R(\cos\theta)$ ...(2)

y $M = PR(1-\cos\theta)$ ...(3)

Utilizando las ecuaciones:

$$\delta_h = \int_0^{\pi}\frac{PR}{EI}(1-\cos\theta)\,R\,(1-\cos\theta)\,Rd\theta$$

$$\delta_h = \int_0^{\pi}\frac{PR^3}{EI}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$\delta_h = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$\delta_h = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{3\theta}{2} - 2\operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{\delta_h = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

Para el desplazamiento vertical: $\delta_v = \int_0^{\pi}\dfrac{PR}{EI}(1-\cos\theta)(-R\cos\theta)Rd\theta$

$$\delta_v = \int_0^{\pi}\frac{PR^3}{EI}\left(\cos^2\theta - \cos\theta\right)d\theta$$

$$\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos\theta + \frac{\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

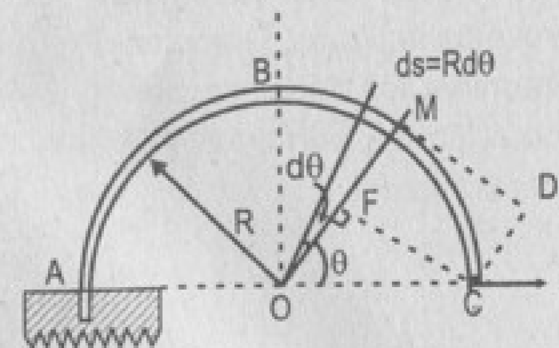
$$\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

1309. En el problema 1307, si la carga P está aplicada en C, perpendicular al plano ABC, calcular el desplazamiento de C en la dirección de la carga.

Resolución:

La carga perpendicular en C al plano ABC genera tanto torsión como flexión.

Graficando:



Hallando el momento flexionante:

$M = MD \,.\, P = FC \,.\, P \Rightarrow \quad M = R\operatorname{sen}\theta \,.\, P$ ...(1)

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial P} = R\operatorname{sen}\theta$ ...(2)

Hallando el momento torsionante:

$$T = FM \,.\, P = R(1-\cos\theta)P$$

Donde: $\dfrac{\partial T}{\partial P} = R(1-\cos\theta)$

Por el teorema de Castiglianio $\delta = \dfrac{\partial U}{\partial P}$

Siendo: $\dfrac{\partial U}{\partial P} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial P}ds + \int \dfrac{T}{\partial G}\dfrac{\partial T}{\partial P}ds$

Llevando los valores:

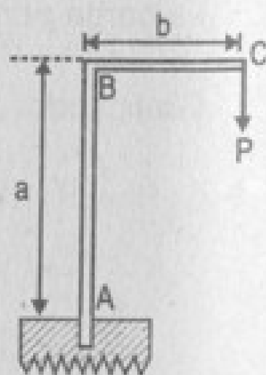
$$\delta = \int_0^{\pi} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}(R\,d\theta) + \int_0^{\pi}\frac{T}{JG}\frac{\partial T}{\partial P}(R\,d\theta)$$

$$\delta = \int_0^{\pi}\frac{PR^3 sen^2\theta}{EI}d\theta + \int_0^{\pi}\frac{PR^3}{JG}(1-\cos\theta)^2 d\theta$$

$$\delta = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{sen2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{PR^3}{JG}\left(\frac{3\theta}{2} - 2sen\theta + \frac{sen2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}\frac{PR^3}{EI} + \frac{3\pi}{2}\frac{PR^3}{JG}}$$

1310. Se aplica una carga vertical P a la estructura en voladizo que representa la figura. Suponiendo EI constante, determinar los desplazamientos vertical y horizontal en los puntos B y C. Despreciar la deformación axial.



Resolución:

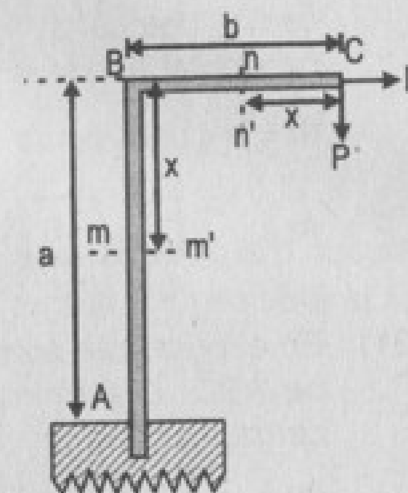
Para hallar el desplazamiento horizontal en el punto C, colocamos una carga ficticia F de valor nulo. Para el desplazamiento vertical ya está la carga P. Por el teorema de Castigliano tenemos:

Desplazamiento vertical: $\delta_v = \dfrac{\partial U}{\partial P}$; F = 0.

Desplazamiento horizontal: $\delta_h = \dfrac{\partial U}{\partial F}$; F = 0.

Donde $U = \int \dfrac{M^2}{2EI}ds$

Realizando el diagrama para hallar los momentos flectores. (Ojo, solo hay flexión en la estructura).



Momentos flectores: (ojo: F = 0)

$M = Fx + Pb$; $x \in \langle 0; a\rangle$

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial F} = x \;\wedge\; \dfrac{\partial M}{\partial P} = b$

$M = Px$; $x \in \langle 0; b\rangle$

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial F} = 0 \;\wedge\; \dfrac{\partial M}{\partial P} = x$

Hallando el desplazamiento horizontal en el punto C:

$$\delta_h = \frac{\partial U}{\partial F} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F}ds \;\Rightarrow\; \delta_h = \int_0^a \frac{(Pb)}{EI}x\,dx + \int_0^b \frac{(Px)}{EI}(0)\,dx$$

$$\delta_h = \frac{Pb}{EI}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a \;\Rightarrow\; \frac{Pba^2}{2EI} = \delta_{C_h}$$

Para el desplazamiento vertical en C:

$$\delta_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}ds \;\Rightarrow\; \delta_v = \int_0^a \frac{Pb}{EI}(b)dx + \int_0^b \frac{(Px)}{EI}(x)dx$$

$$\delta_v = \frac{Pb^2}{EI}(x)\Bigg|_0^a + \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^b \;\Rightarrow\; \delta_v = \frac{Pb^2a}{EI} + \frac{P}{EI}\frac{b^3}{3} = \frac{Pb^2}{EI}\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

$$\therefore \boxed{\delta_v = \delta_{C_v} = \frac{Pb^2}{EI}\left(a + \frac{b}{3}\right)}$$

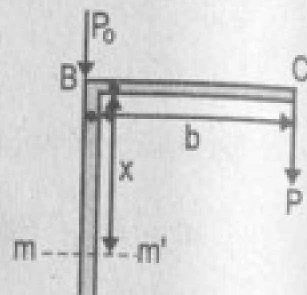
Para el desplazamiento horizontal en el punto B: si colocamos una carga ficticia F_o de valor nulo en dirección horizontal en el punto B, produciría el mismo efecto flexionante que F; por lo tanto, el desplazamiento horizontal en B es igual al de C:

$$\boxed{\delta_{B_h} = \delta_{C_h} = \frac{Pba^2}{2EI}}$$

Para el desplazamiento vertical en el punto B, si colocamos una carga ficticia P_o de valor nulo en dirección horizontal donde el momento flector en el corte es:

$M = b$; pero como $\frac{\partial M}{\partial P_o} = 0$ y $\delta_{Bv} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_o} ds$

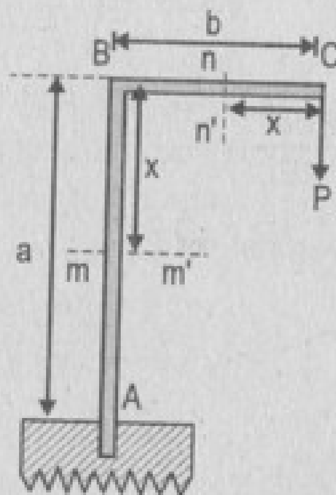
Así: $\boxed{\delta_{B_v} = 0}$



1311. En el problema anterior, la carga P está aplicada perpendicularmente al plano ABC. Determinar los desplazamientos de B y C en la dirección de la carga.

Resolución:

La carga P dirigida perpendicularmente al plano ABC, generará tanto flexión y torsión; hay qué hallar los momentos flexionantes y torsionantes respecto a una variable "x" genérica. Graficando:



Hay torsión en el tramo AB por efecto de la carga P. El brazo torsionante es "b", así: $T = Pb \quad , \quad x \in \langle 0;a \rangle$

Luego: $\frac{\partial T}{\partial P} = b$

En este mismo tiempo, en el corte mm' hay flexión. El brazo flexionante es "x", así:

$$M = Px \quad ; \quad x \in \langle 0;a \rangle \quad y \quad \frac{\partial M}{\partial P} = x$$

Para el tramo BC, el momento flexionante es:

$$M = Px \wedge \frac{\partial M}{\partial P} = x \quad ; \quad x \in \langle 0;b \rangle$$

Por el teorema de Castigliano, la deformación viene dada por:

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} \quad ; \quad \text{siendo } U = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{T^2}{2JG} ds$$

Nota: para el tramo BC no existe torsión, ya que la varilla tiene radio despreciable, por lo tanto, no hay brazo torsionante, o mejor dicho, es de valor nulo.

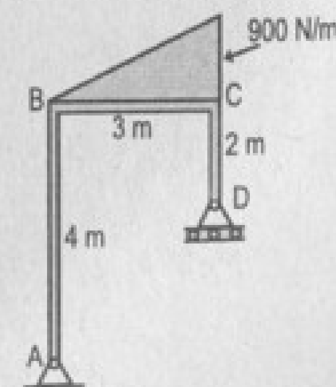
Como: $\frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P} ds + \int \frac{T}{\partial G}\frac{\partial T}{\partial P} ds$

Por lo tanto: $\delta_C = \left(\int_0^a \frac{(Px)}{EI} xdx + \int_0^b \frac{(Px)}{EI} xdx\right) + \left(\int_0^a \frac{(Pb)}{\partial G} bdx\right)$

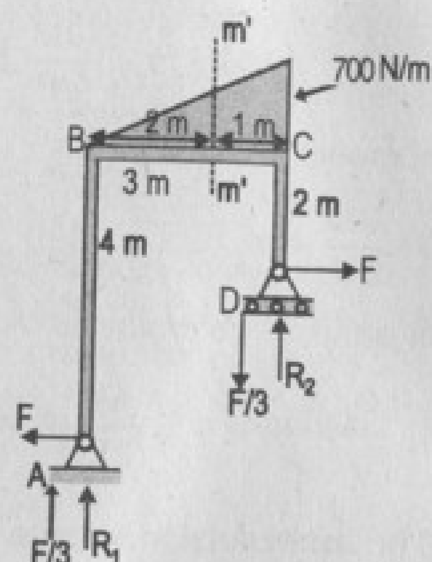
$$\delta_C = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a + \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^b + \frac{Pb^2}{\partial G}(x)\Big|_0^a$$

$$\boxed{\delta_C = \frac{P}{EI}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}\right) + \frac{Pb^2 a}{\partial G}}$$

1312. El pórtico de la figura está articulado en A y apoyado en D mediante rodillos. Soporta una carga distribuida triangularmente. Con EI constante, calcular EIδ en el apoyo D. Despreciar la deformación axial.



Resolución:



Por estática hallamos R_1 y R_2 (además equilibramos la fuerza ficticia nula que hemos puesto para hallar el desplazamiento δ del sistema).

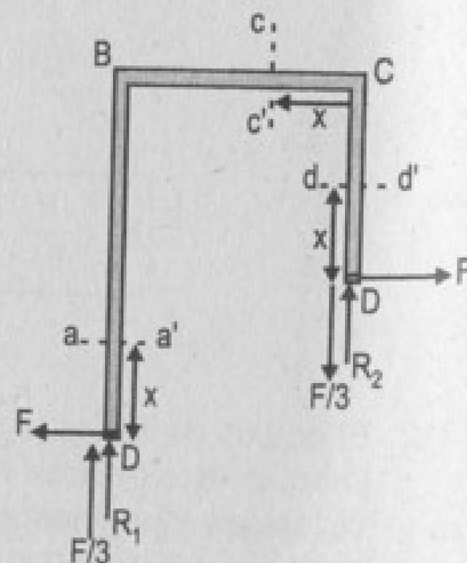
$$\Sigma M_{m'm'} = 0 = 2R_1 - R_2 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 450(3)\text{ N}$$

Resolviendo:

$$R_1 = 450\text{ N} \ \wedge \ R_2 = 900\text{ N}$$

Hallando los momentos flexionantes respecto a una variable "x" genérica:



Tramo AB: $x \in \langle 0;4 \rangle$

$$M_{aa'} = Fx \text{ ; como } F = 0 \ \Rightarrow \ M_{aa'} = 0$$

Tramo BC: $x \in \langle 0;3 \rangle$

$$M_{cc'} = 2F + xR_2 - \frac{F}{3}x - 150\frac{x}{3}(9 - x)$$

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial F} = 2 - \dfrac{x}{3}$

Y: $M = R_2 x - 150\dfrac{x}{3}(9 - x) \ \Rightarrow \ M = 450x + 50x^2$

Tramo CD: $x \in \langle 0;2 \rangle$

$$M_{dd'} = Fx\text{, como } F = 0 \ \Rightarrow \ M_{dd'} = 0$$

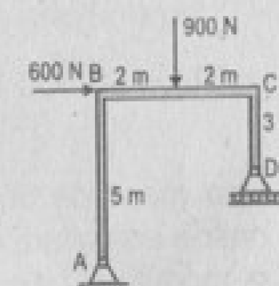
Solo existe flexión en el tramo BC aplicando el teorema de Castigliano:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F}, \quad \text{para } F = 0 \text{ como } U = \frac{M^2}{2EI}$$

Así: $\delta = \displaystyle\int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F}\,ds$

Para el tramo BC: $\delta = \displaystyle\int_0^3 \frac{(450x + 50x^2)}{EI}(2 - x/3)\,dx$

Así: $EI\delta = \left(450x^2 - \dfrac{50}{3}x^3 - \dfrac{50}{12}x^4\right)\Bigg|_0^3 \ \Rightarrow$ $\boxed{EI\delta = 3262{,}5\text{ N.m}^3}$

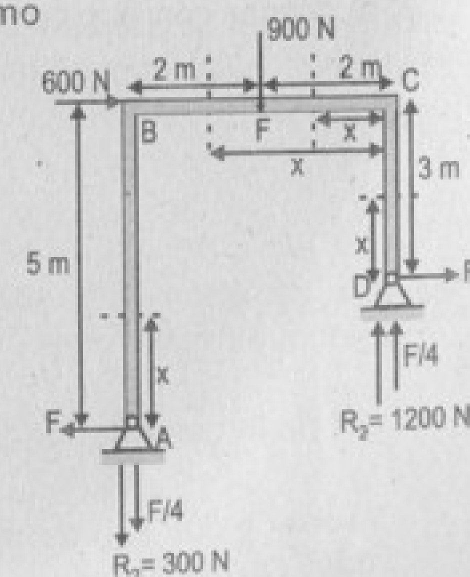


1313. Se aplican cargas horizontal y vertical a la estructura de la figura. Si EI es constante y se desprecia la deformación axial, determinar el valor de EIδ en el apoyo D.

Resolución:

Aplicando una fuerza ficticia de valor nulo en dirección del movimiento. (Por las leyes de la estática se hallan las demás reacciones).

Hallando los momentos flectores en cada tramo respecto a una variable "x" genérica:



Tramo AB: $x \in \langle 0;5 \rangle$

$$M = Fx + 600x \text{ ; } \frac{\partial M}{\partial F} = x$$

Tramo CF: $x \in \langle 0;2 \rangle$

$$M = 3F + \frac{F}{4}x + 1200x \text{ ; } \frac{\partial M}{\partial F} = 3 + \frac{x}{4}$$

Tramo CB: $x \in \langle 2;4 \rangle$

$$M = 3F + \frac{F}{4}x + 1200x - 900(x-2) \;;\; \frac{\partial M}{\partial F} = 3 + \frac{x}{4}$$

Tramo DC, $x \in \langle 0;3 \rangle$, entonces: $M = Fx \;;\; \frac{\partial M}{\partial F} = x$

Por el teorema de Castigliano el desplazamiento:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F} ds \;;\; \text{si } F = 0$$

Así:

$$\delta = \int_0^5 \frac{(600x)}{EI} x dx + \int_0^2 \frac{(1200x)}{EI}\left(3+\frac{x}{4}\right)dx + \int_2^4 \frac{(300x+1800)}{EI}\left(3+\frac{x}{4}\right)dx + \int_0^3 0(x)dx$$

Luego:

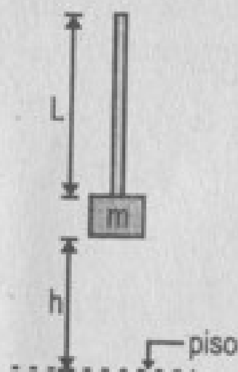
$$EI\delta = 600\int_0^5 x^2 dx + 1200\int_0^2 x\left(3+\frac{x}{4}\right)dx + 300\int_2^4 (x+6)\left(3+\frac{x}{4}\right)dx$$

$$EI\delta = 53\,300 \text{ N.m}^3 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 53{,}3 \text{ kN.m}^3}$$

1314. Una masa de 50 kg atada al extremo de un alambre de 30 m de longitud cae desde una altura de 2 m. La sección del alambre es de 250 mm² y se supone que el módulo elástico es E = 100 GPa. Calcular el esfuerzo máximo en el alambre.

Resolución:

El alambre de acero al caer libremente con la masa atada a su extremo, almacena energía potencial que se conserva en la deformación que alcanza al chocar con el piso:



Donde la deformación final es: $\delta = \delta_{ST}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{ST}}}\right)$ ...(1)

Tenemos que δ_{ST}, es la deformación estática causada solo por el peso de la masa "m".

Así: $\delta_{ST} = \frac{(mg)L}{EA}$

Donde: m = 50 kg ; g = 9,81 m/s²
L = 30 m ; A = 250 mm²
E = 100 GPa

Luego: $\delta_{ST} = \frac{(50)(9{,}81)(30)\text{ N.m}}{(10^{11})(250\times10^{-6})\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\text{m}^2} \Rightarrow \delta_{ST} = 58{,}86 \times 10^{-5}$ m

En (1): como h = 2 m; la deformación dinámica será:

$$\delta = (58{,}86\times10^{-5}\text{ m})\left(1+\sqrt{1+\frac{2(2)}{58{,}86\times10^{-5}}}\right) \Rightarrow \delta = 0{,}0491 \text{ m}$$

La relación entre el esfuerzo máximo y la deformación máxima es:

$$\sigma_{máx} = \frac{E}{L}\delta_{máx}\,, \text{ es decir: } \sigma_{máx} = \frac{E}{L}\delta$$

Llevando los datos: $\sigma_{máx} = (100\text{ GPa})\left(\frac{0{,}0491\text{ m}}{30\text{ m}}\right)$

$$\sigma_{máx} = 0{,}163714\text{ GPa} \;\text{ ó }\; \boxed{\sigma_{máx} = 163{,}714\text{ MPa}}$$

1315. Un ascensor cuya masa es 2 Mg desciende a una velocidad de 2 m/s. El tambor de accionamiento se detiene bruscamente cuando se ha desenrollado 30 m de cable. Si la sección recta de este es de 50 mm² y E = 100 GNm², calcular el esfuerzo máximo que aparece en el cable, despreciando el peso del mismo.

Resolución:

En el frenado del ascensor toda la energía cinética de la masa del ascensor genera la deformación dinámica y por ende el máximo esfuerzo dinámico:

Así: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{AE}{2L}\delta^2$ ...(1)

Pero: $\delta = \frac{L}{E}\sigma$ ...(2)

(2) en (1): $\sigma^2 = \dfrac{E}{AL} mv^2$

De los datos: m = 2 Mg = 2000 kg ; v = 2 m/s

L = 30 m; A = 600 mm^2 = 6.10^{-4} m

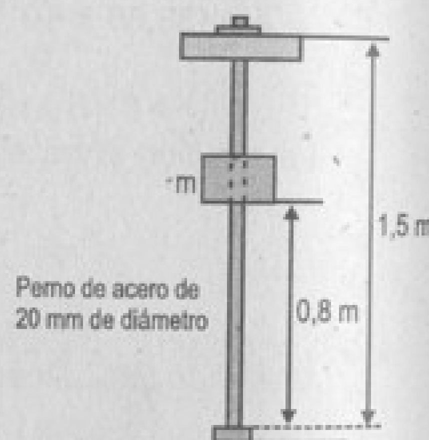
E = 100 GN/m^2 = 10^{11} N/m^2

Operando:

$$\sigma^2 = \frac{(2000)(4)(10^{11})}{6\times10^{-4}(30)}\frac{N^2}{m^4} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{40}{9}.10^{16}\frac{N^2}{m^4}$$

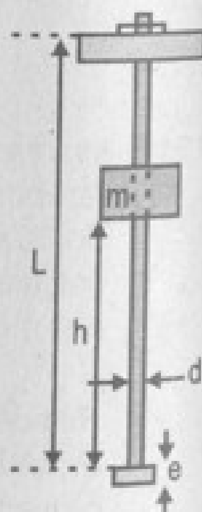
$$\sigma = 2{,}108 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{máx} = 210{,}8 \text{ MN/m}^2 = 210{,}8 \text{ MPa}}$$

1316. Una masa de 6 kg cae desde una altura de 0,8 m golpeando la cabeza de un perno de acero, como se indica en la figura. Suponiendo que toda la energía es absorbida por el perno, calcular el espesor *e* de su cabeza si el esfuerzo cortante, en la superficie cilíndrica de unión de la cabeza, no debe exceder de 80 MN/m^2, suponiendo que E = 200 GN/m^2.



Resolución:

Despreciando la energía acumulada en la varilla; solo tomaremos en cuenta la energía trasmitida por la masa "m" a la cabeza del perno de espesor "e":



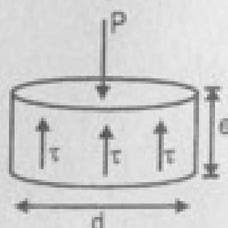
La energía potencial de la masa "m" se trasmite a la deformación dinámica δ:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{AE}{2L}\delta^2 \qquad ...(1)$$

Siendo A: área de la sección de la varilla.

Así: $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$ ...(2)

La fuerza P que golpea la cabeza se opone a la fuerza cortante "τ" que actúa a lo largo de su superficie:



Así: $\tau = \dfrac{P}{A_1}$ ...(3),

A_1: área de la superficie del cilindro de diámetro "d" y altura "e"

Donde: $A_1 = \pi de$ ...(4)

De (3) y (4): $\pi de = \dfrac{P}{\tau}$

Como: $\delta = \dfrac{PL}{EA}$, luego: $\pi de = \dfrac{\delta EA}{L\tau}$

Entonces: $\delta = \dfrac{\pi deL\tau}{EA}$ ...(5)

(5) y (2) en (1): $e^2 = \dfrac{mghE}{2\pi L\tau^2}$ (obsérvese que "e" no depende de "d")

De los datos: m = 6 kg τ = 80 MN/m^2 = 80 × 10^6 N/m^2

h = 0,8 m E = 200 GN/m^2 = 2 × 10^{11} N/m^2

δ = 9,81 m/s^2

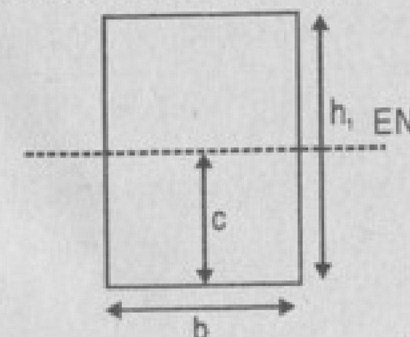
Reemplazando: $$e^2 = \frac{6(9{,}81)(0{,}8)(2\times10^{11})(10^6)}{2\pi(1{,}5)(80^2)(10^6)^2} \text{ mm}^2$$

$$\boxed{e = 12{,}49 \text{ mm}}$$

1317. Una viga simplemente apoyada, de longitud L y sección rectangular, es golpeada en su centro por una masa m que cae desde una altura h. Demostrar que el valor del esfuerzo máximo en la viga, es σ^2 = 18 mghE/AL.

Resolución:

Como la sección de la viga es rectangular, tenemos:



Así: $A = bh_1$ $\qquad c = \dfrac{h_1}{2}$ $\qquad I = \dfrac{bh_1^3}{12}$

Del problema de la página 438, tenemos:

$$\sigma^2_{máx.} = \frac{6mghEc^2}{LI} \Rightarrow \sigma^2_{máx.} = \frac{6mgh(h_1/2)^2}{L\left(\dfrac{bh_1^3}{12}\right)}$$

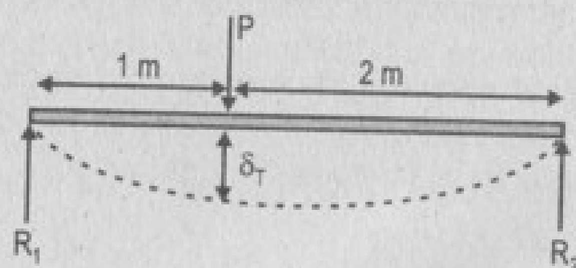
$$\sigma^2_{máx.} = \frac{6(12)mghEh_1^2}{4L\left(bh_1^3\right)} \Rightarrow \sigma^2_{máx.} = \frac{18mghE}{Lbh_1}$$

$$\therefore \boxed{\sigma^2_{máx} = \frac{18mghE}{AL}}$$

1318. Calcular el coeficiente de impacto para una viga simplemente apoyada de 3 m de longitud sometida al impacto de una masa de 900 kg que cae desde una altura de 2,5 m en un punto a 1,0 m de uno de los apoyos. Supóngase que la sección de la viga es rectangular y mide 40 mm de ancho por 90 mm de altura y que $E = 200 \times 10^9$ N/m². Despreciar el peso de la viga.

Resolución:

Primero hallamos la deformación estática δ_T producida por una carga de masa 900 kg colocada sobre la superficie de la viga:



Por las ecuaciones de la estática: $R_1 = \dfrac{2}{3}P$ y $R_2 = \dfrac{1}{3}P$

Téngase en cuenta que $P = mg$ ...(1)

Siendo M el momento flector, por el teorema de Castigliano tenemos:

$$\delta_T = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}ds$$

Donde: $M = \dfrac{2}{3}Px \wedge \dfrac{\partial M}{\partial P} = \dfrac{2}{3}x$ si $x \in \langle 0;1 \rangle$

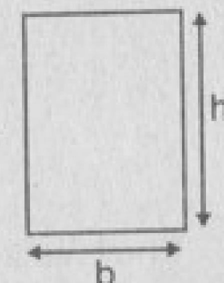
Y: $M = P\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$; $\dfrac{\partial M}{\partial P} = \left(1-\dfrac{x}{3}\right)$ si $x \in \langle 1;3 \rangle$

Así: $\delta_T = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{9EI}Px^2dx + \int_1^3 \frac{P}{EI}(1-x/3)^2 dx$

$$\delta_T = \frac{4P}{9EI}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{P}{EI}\left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27}\right)\Bigg|_2^3$$

$$\delta_T = \frac{4P}{9EI} \qquad ...(2)$$

Para la sección rectangular:



Así: $I = \dfrac{bh_1^3}{12}$ ...(3)

(3) en (2): ¡cuidado con las unidades!

$$\delta_T = \frac{4P(12)}{9E\left(bh_1^3\right)} = \frac{16P}{3E\left(bh_1^3\right)}$$

De los datos: $m = 900$ kg $\quad b = 40$ mm
$E = 200 \times 10^9$ N/m² $\quad h_1 = 90$ mm

Luego: $\delta_T = \dfrac{16(900)(9{,}81)\ N.m^3}{3(200\times10^9)\ \dfrac{N}{m^2}(40)(90)^3\ mm^4}$

$$\delta_T = \frac{16(900)(9{,}81)(10^3)^5\ mm}{3(200\times10^9)(40)(90)^3} \Rightarrow \delta_T = 8{,}074\ mm$$

El coeficiente de impacto es: $\dfrac{\delta}{\delta_T} = 1 + \sqrt{1+\dfrac{2h}{\delta_T}}$

donde $h = 2{,}5$ m $= 2500$ mm

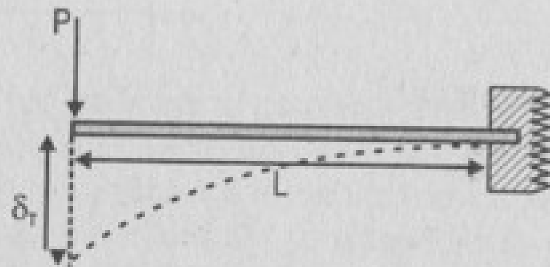
Reemplazando valores:

$$\frac{\delta}{\delta_T}=1+\sqrt{1+\frac{2500}{8,074}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\delta}{\delta_T}=25,9}$$

1319. Una viga de sección rectangular de 60 mm de ancho por 10 mm de altura se emplea como viga en voladizo de 2 m de longitud. Una masa de 40 kg cae desde una altura de 0,2 m golpeando su extremo libre. Calcular el esfuerzo máximo y la deflexión máxima en el punto de impacto; E = 200 GPa.

Resolución:

Primero hallamos la deflexión estática δ_T, colocando una masa de 40 kg en el extremo del voladizo:



El momento flector genérico es:

$$M=-Px \;\wedge\; \frac{\partial M}{\partial P}=-x \quad ; \quad x\in\langle 0;\,L\rangle$$

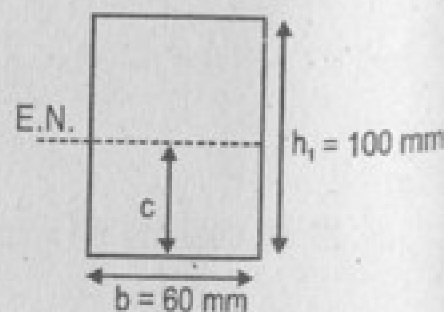
Por el teorema de Castigliano:

$$\delta_T=\frac{\partial U}{\partial P}=\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}ds \quad\Rightarrow\quad \delta_T=\frac{1}{EI}\int_0^L(-Px)(-x)dx=\frac{P}{EI}\int_0^L x^2dx$$

$$\delta_T=\frac{PL^3}{3EI} \qquad \text{...(1)}$$

Para la sección rectangular:

$$I=\frac{bh_1^3}{12}=\frac{(60)(100)^3\,mm^4}{12}=5\times10^6\ mm^4$$



Además: $c=\frac{h_1}{2}=50$ mm

De los datos:

m = 40 kg L = 2 m E = 200 × 10⁹ N/m²

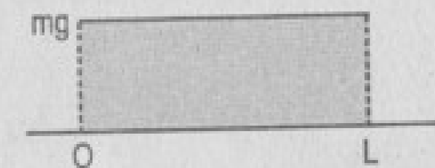
$$\text{Luego:}\quad \delta_T=\frac{(40)(9,81)\ N(8)\ m^3}{200(10^9)\frac{N}{m^2}(3)(5)10^6\ mm^4}\Rightarrow \delta_T=1,0464\ mm$$

Para hallar la deflexión dinámica:

$$\delta=\delta_T\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_T}}\right),\quad \text{donde } h=0,2\ m=200\ mm$$

$$\delta=(1,0464)\left(1+\sqrt{1+\frac{2(200)}{1,0464}}\right)mm \quad\Rightarrow\quad \boxed{\delta=21,53\ mm}$$

Del diagrama de fuerzas tenemos:



Así: M = mgL

El esfuerzo estático es:

$$\sigma_T=\frac{Mc}{I}\quad\Rightarrow\quad \sigma_T=\frac{(mgL)}{\frac{bh_1^3}{12}}(h_1/2)$$

$$\sigma_T=\frac{(40)(9,81\,N)(2\,m)(50\,mm)}{(5\times10^6)mm^4}$$

$$\sigma_T=\frac{(40)(9,81)(2)(50)}{(5\times10^6)(10^{-9})}\ N/m^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma_T=7848\times10^3\ N/m^2=7,848\ MPa$$

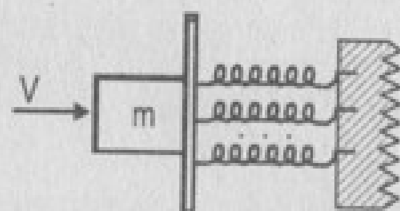
El esfuerzo dinámico se expresa por:

$$\sigma=\sigma_T\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_T}}\right)$$

$$\text{Luego:}\quad \sigma=(7,848\ MPa)\left(1+\sqrt{1+\frac{2(200)}{1,0464}}\right)\Rightarrow \boxed{\sigma=161,489\ MPa}$$

1320. Un furgón de ferrocarril de 12 Mg de masa se mueve a razón de 1,2 m/s cuando choca con un tope que tiene un juego de 8 resortes en paralelo. Cada uno de los resortes tiene 10 espiras de varilla de acero de 25 mm de diámetro, siendo el radio medio de la espira de 100 mm. Aplicando la fórmula de Wahl dada en la ecuación (3-10), determinar el esfuerzo máximo desarrollado en los resortes, si G = 80 GPa.

Resolución:



La energía cinética del tren es "absorbida" por los 8 resortes recibiendo estos una contracción "δ".

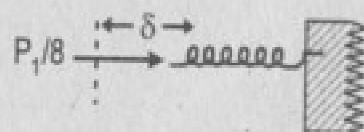
Así: $\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^\delta kxdx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^\delta$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k\delta.\delta}{2} \qquad ...(1)$$

Como $k\delta = P_1$ la fuerza es aplicada para contraer los ocho resortes, de (1) tenemos:

$$mv^2 = P_1\delta \qquad ...(2)$$

Del diagrama del cuerpo libre de un resorte:



Por la fórmula de Wahl tenemos esfuerzo máximo:

$$\tau_{máx} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m_o-1}{4m_o-4}+\frac{0,615}{m_o}\right)$$

Donde: $m_o = \frac{D}{d} = \frac{2R}{d}$

De los datos:
n = 10 (número de espiras)
d = 25 mm
R = 100 mm
G = 80 GPa = 80 × 10^9 N/m^2
$P = P_1/8$
m = 12 mg = 12 000 kg
v = 1,2 m/s

La deformación del resorte es: $\delta = \frac{P_1R^2(2\pi Rn)}{JG}$

Donde: $J = \frac{\pi d^4}{32}$

Así: $\delta = \frac{64P_1R^3n}{Gd^4} \qquad ...(3)$

En (2): $mv^2 = P_1\frac{(64P_1R^3n)}{Gd^4} \Rightarrow P_1^2 = \frac{mv^2Gd^4}{64R^3n}$

$$P_1^2 = \frac{(12\ 000\ kg)(1,2)^2 m^2/s^2(80\times 109)\ N/m^2\ (0,025)^4\ m^4}{64(0,1)^3 m^3(10)}$$

$$P_1^2 = \frac{(12\ 000)(1,2)^2(80.10^9)(0,025)^4\ N^2}{64(0,1)^3(10)} \Rightarrow P_1 = 29\ 047,375\ N$$

En la fórmula de Wahl:

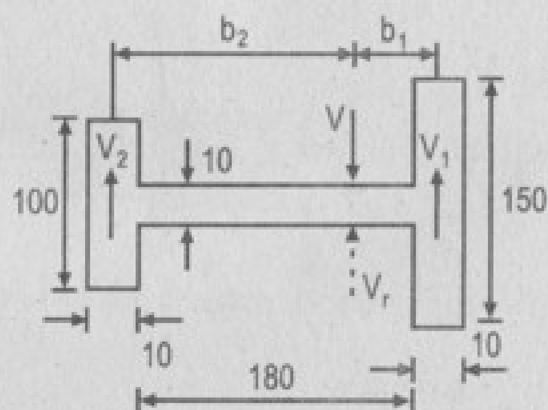
$$\tau_{máx} = \frac{16(29\ 047,375/8)(0,1)}{\pi(0,025)^3}\left(\frac{4(8)-1}{4(8)-4}+\frac{0,615}{8}\right) Pa$$

$$\tau_{máx} = 140\ 128\ 102,4\ Pa \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 140,128\ Pa}$$

1321. Problema ilustrativo.

1322. Determinar la posición del centro de torsión en la sección indicada en la figura, si $t_1 = t_2 = t_3 = 10$ mm, $h_1 = 150$ mm, $h_2 = 100$ mm y $h_3 = 180$ mm.

Resolución:



Cálculo del centro torsión:

En el centro de torsión se contraponen V y V_r, luego en la figura:

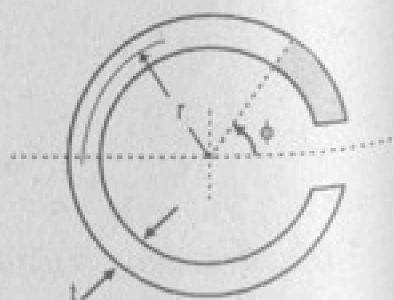
$b_1 + b_2 = 190$; por Geometría.

Por equilibrio: $V_1 b_1 = V_2 b_2$; momentos en centro torsión. Por igual radio de curvatura del derecho e izquierdo: $\frac{P}{E} = \frac{I_1}{M_1} = \frac{I_2}{M_2}$; pero V_1 y V_2 son D.P. a M_1 y M_2. De donde: $\frac{I_1}{V_1} = \frac{I_2}{V_2}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{I_2}{I_1}$

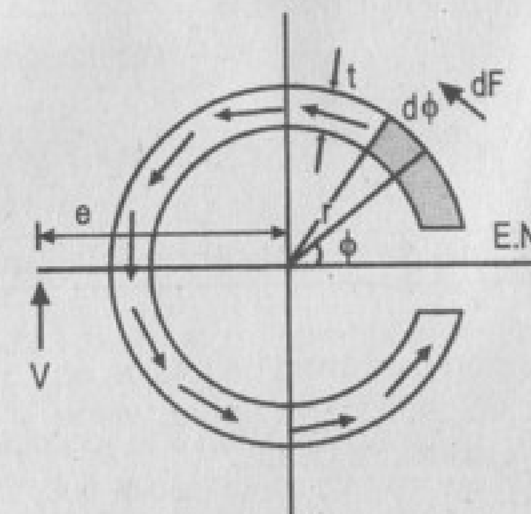
Con datos: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{10\times100^3}{12}}{\frac{10\times150^3}{12}} = \frac{8}{27}$, con lo cual: $\begin{cases} b_1 + b_2 = 190 \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{8}{27} \end{cases}$

Resolviendo tenemos: $b_1 = 43\frac{3}{7}$ mm y $b_2 = 146\frac{4}{7}$ mm

1323. Determinar la posición del centro de torsión en la sección de la figura, que consiste en un cilindro de pared delgada, partido a lo largo de una generatriz. El espesor de la pared es e y el radio medio r.



Resolución:



Ubicación del centro de torsión

Cálculo de q, flujo de cortante cuando el ángulo es φ:

$$q = \frac{V}{I}Q \text{ ; donde } Q = \int_0^{\phi}(r\,\text{sen}\phi)tr\,d\phi$$

Luego $q = \frac{Vt}{I}r^2\left[-\cos\phi\right]_0^{\phi}$, resolviendo: $q = \frac{Vtr^2}{I}(1-\cos\phi)$

Momentos de fuerzas respecto del centro: $Ve = 2\int_0^{\pi} r\,dF = 2\int_0^{\pi}(q\,ds)r$

Reemplazando el valor de q en la integral: $Ve = 2\int_0^{\pi}\frac{Vtr^3}{I}(1-\cos\phi)r\,d\phi$

Consideramos $r = r_m$; un valor medio: $e = \frac{2tr_m^4}{I}\int_0^{\pi}(1-\cos\phi)d\phi$

Calculamos I:

Por tablas: $I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ donde: $R = r_m + \frac{t}{2}$; $r = r_m - \frac{t}{2}$

Luego: $e = \frac{2tr_m^4}{\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)}\int_0^{\pi}(1-\cos\phi)d\phi = \frac{2tr_m^4\pi}{\frac{\pi}{4}(R^2+r^2)(R+r)(R-r)}$; pero: $R - r = t$,

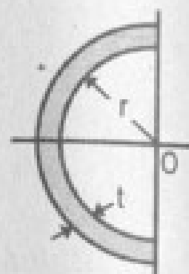
También: $R + r = 2r_m$; $R^2 + r^2 = 2\left(r_m^2 + \frac{t^2}{4}\right)$

Despreciamos $\frac{t^2}{4} << r_m^2$; con esto: $e = \dfrac{2tr_m^4}{\frac{\pi}{4}(2r_m^2)(2r_m)t} = 2r_m$

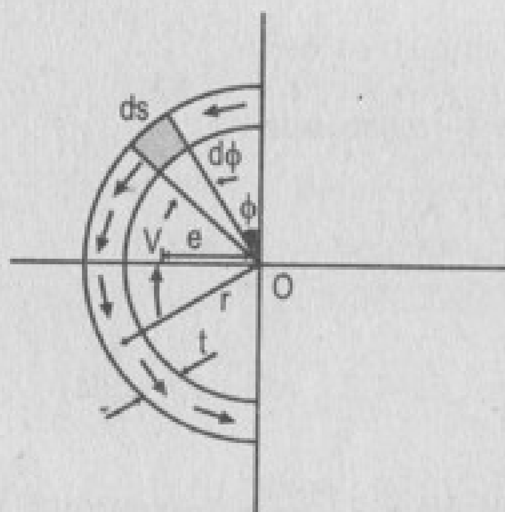
$\Rightarrow$ $e = 2r_m$, donde r_m es radio medio

$\therefore$ e: ubicado a $2r_m$ del centro del cilindro a la izquierda

1324. Demostrar que la posición del centro de torsión en el anillo semicircular delgado de la figura, viene dada por $e = 4r/\pi$ a la izquierda de O.



Resolución:



Demostración: el centro de torsión está a $e = \frac{4r}{\pi}$ a la izquierda del centro

$$q = \frac{V}{I}Q = \frac{V}{I}\int_0^{\phi} r\cos\phi(trd\phi)$$

$$q = \frac{Vtr^2}{I}\text{sen}\phi$$

Equilibrio de momentos respecto del centro:

$$Ve = 2\int_0^{\pi/2}(qds)r\text{; tomamos la mitad y duplicamos}$$

$$Ve = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Vtr^2\text{sen}\phi}{I}\, r\, rd\phi$$

$$e = \frac{2tr_m^4}{I}\text{; consideramos } r = r_m\text{: radio medio.}$$

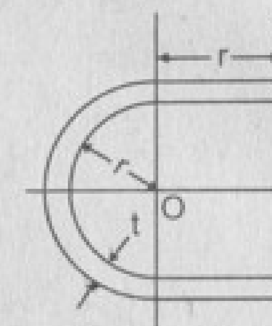
Como: $I = \frac{\pi}{8}(R^2 - r^4)$ para un círculo hueco $\Rightarrow I = \frac{\pi}{8}(R^2 + r^2)(R + r)(R - r)$

Donde: $R + r = 2r_m$; $R - r = t$; $R^2 + r^2 = 2r_m^2$

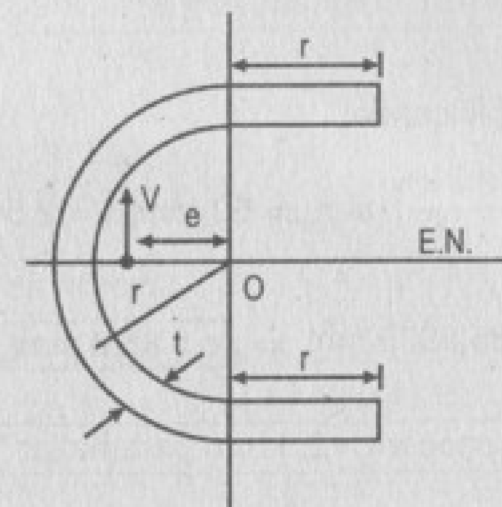
Reemplazando valores tenemos:

$$e = \frac{2t\,r_m^4}{\frac{\pi}{8}(2r_m^2)(2r_m)t}\text{, simplificando: } \boxed{e = \frac{4r_m}{\pi}}\text{; donde } r_m\text{: radio medio.}$$

1325. La sección de pared delgada representada en la figura consiste en un anillo semicircular de radio medio r, prolongado por dos partes rectas de longitud r. Comprobar que el centro de torsión está a una distancia $e = (tr^4/I)\ (\pi + 3)$ a la izquierda de O, y que para r = 50 mm y t = 2,5 mm, se obtiene e = 86,0 mm. ¿Es necesario conocer el valor del espesor t?



Resolución:



Calculamos I respecto al eje neutro:

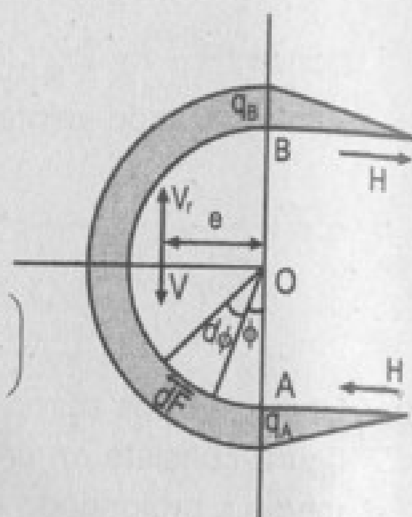
$$I = 2r_m t r_m^2 + \frac{\pi}{8}(R^4 - r^4) = 2r_m^3 t + \frac{\pi}{8}(2r_m^2)t(2r_m)$$

$$\Rightarrow I = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r_m^3 t\text{; donde } r_m\text{: radio medio.}$$

Cálculo de cargas en el semicírculo y las horizontales:

$$q_B = q_A = \frac{V}{I}r_m t r_m \Rightarrow q_B = q_A = \frac{Vr_m^2 t}{I}$$

Luego: $H = \frac{1}{2} q_B r_m \Rightarrow H = \frac{V r_m^3 t}{2I}$



Luego: $dF = q\,ds$; $dM = q r_m\, ds$.
Equilibrando momentos respecto del centro:

$$Ve = \frac{V r_m^3 t}{2I} \times r_m \times 2 + 2\int_0^{\pi/2} r_m^3\, d\phi \left(\frac{V r_m^2 t}{I} + \frac{V t r_m^2 \operatorname{sen}\phi}{I} \right)$$

Operando:

$$Ve = \frac{V r_m^4 t}{I} + 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{V r_m^2 t}{I} + \frac{V t r_m^2 \operatorname{sen}\phi}{I} \right) r_m^2\, d\phi$$

$$Ve = \frac{V r_m^4 t}{I} + \frac{2 r_m^4 V t}{I}\frac{\pi}{2} + \frac{2 V t r_m^4}{I}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow e = \frac{r_m^4 t}{I} + \frac{r_m^4 t \pi}{I} + \frac{2 t r_m^4}{I}$$

$\therefore$ $\boxed{e = \frac{r_m^4 t(\pi + 3)}{I}}$ Donde: $I = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r_m^3 t$

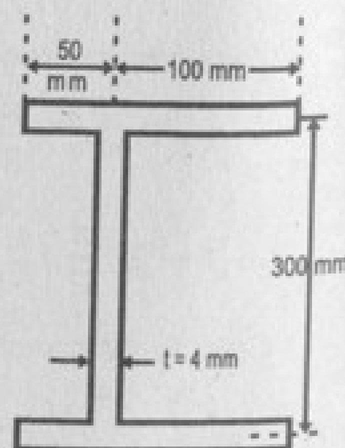
Reemplazando y simplificando:

$$e = \frac{r_m^4 t}{I}(3 + \pi) = \frac{2 r_m (3 + \pi)}{(4 + \pi)};\ \text{si } r_m = 50 \text{ mm};\ t = 2{,}5 \text{ mm}$$

$$e = \frac{2 \times 50(3 + \pi)}{(4 + \pi)} = 85{,}9975 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{e = 86{,}0 \text{ mm}}$$

$\therefore$ No es necesario conocer $t = 2{,}5$ mm para hallar "e".

1326. Si la fuerza cortante vertical a que queda sometida la sección de la figura es de 3600 N, dibujar el diagrama de flujo de cortante y situar el centro de torsión.

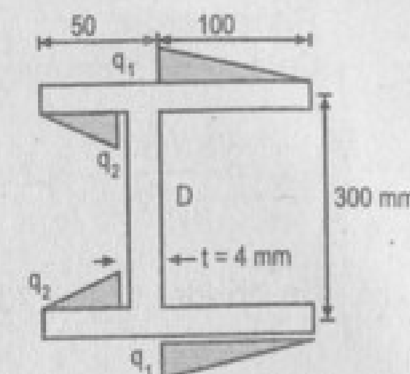


Resolución:

En el patín más largo: $q_{(z)} = \left(\frac{Vht}{2I}\right) z$

para $z = 100$ mm; $t = 4$ mm; y $h = 300$ mm

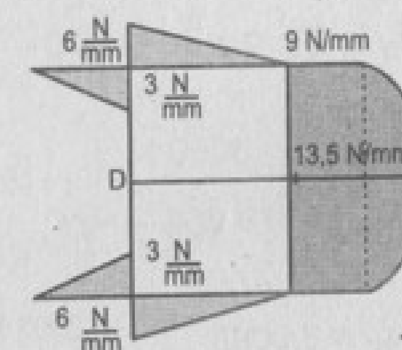
$$q_1 = \frac{3600 \text{ N} \times 300 \text{ mm} \times 4 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2 \times 36 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$



$$q_1 = 6\frac{\text{N}}{\text{mm}} <> 6\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

En el patín más corto:

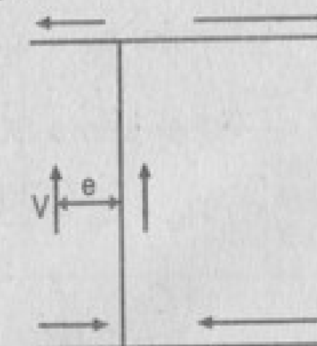
$$q_2 = \frac{3600 \times 300 \times 2 \times 50 \times 2}{2 \times 36 \times 10^6}$$



$$q_2 = 3\frac{\text{N}}{\text{mm}} <> 3\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

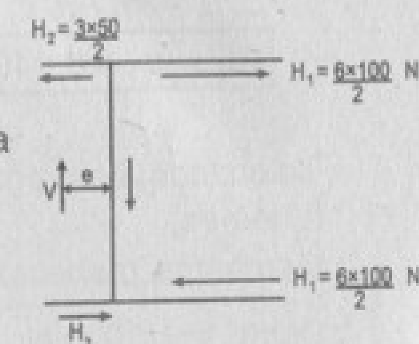
$$\Rightarrow q_B = q_1 + q_2 = 3 + 6 = 9\frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Flujo que ingresa al alma:



$$q_D = 9\frac{\text{N}}{\text{mm}} + \frac{3600 \text{ N} \times 150 \text{ mm} \times 4 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}}{36 \times 10^6 \text{mm}^4 \times 2}$$

Luego: $q_D = 9\frac{\text{N}}{\text{mm}} + 4{,}5\frac{\text{N}}{\text{mm}} = 13{,}5\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; que es el valor máximo de q_D en el alma.



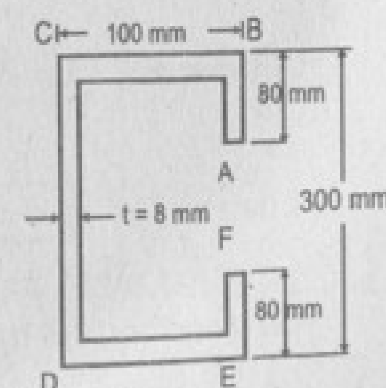
Equilibrando momentos respecto al alma de la viga de modo que la carga en el alma se anule:

$Ve = 300 \text{ N} \times 300 \text{ mm} - 75 \text{ N} \times 300 \text{ mm}$

$(3600 \text{ N})(e) = 225 \times 300 \text{ N·mm}$

$\boxed{e = 18{,}75 \text{ mm; izquierda del alma}}$

1327. Si la fuerza cortante vertical en la sección representada en la figura es de 3000 N, trazar el diagrama de flujo de cortante y situar el centro de torsión. Nota: aunque el flujo de cortante en AB y FE varía realmente en forma parabólica, puede suponerse sin error apreciable que varía linealmente.

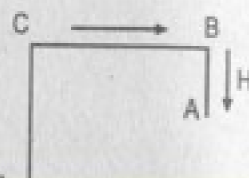


Resolución:

Cálculo de I del eje neutro:

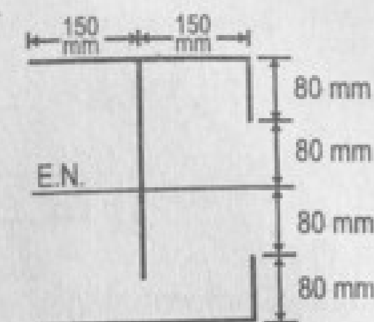
$$I_{E.N.} = \frac{8\times300^3}{12} + 2\times8\times100\times150^2 + \left(\frac{8\times80^3}{12} + 80\times8\times110^2\right)\times2$$

De donde: $I_{E.N.} = 70\ 170\ 666\frac{2}{3}\ \text{mm}^4$



Cálculo de $q_B = q_E$: $q = \frac{V}{I}\left(8z\left(70+\frac{z}{\ }\right)\right)$

1328. Situar el centro de torsión en la sección de pared delgada de la figura.



Resolución:

Cálculo de los flujos de cortantes:

Sabemos: $q = \frac{V}{I}Q$;

luego: $q_B = q_H = 9600\frac{Vt}{I}$